УДК 519.6:539.3

Академик НАН Украины **В. С. Дейнека, А. А. Аралова**

Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого длинного цилиндра

Рассмотрена задача оптимального управления термоупругим состоянием длинного полого кругового цилиндра. Построены явные выражения градиентов функционалов невязки для идентификации параметров задачи термоупругости. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

В работах [1, 2] рассматривались вопросы оптимального управления упругим и термоупругим состоянием составных тел с квадратичными функционалами стоимости при различных наблюдениях и управлениях. В данной работе изучаются проблемы оптимального управления термоупругим состоянием длинного полого кругового цилиндра. Полученные результаты использованы для построения явных выражений градиентов функционалов невязки для идентификации параметров задачи термоупругости. Приведены результаты вычислительных эксперементов.

Управление тепловым потоком при наблюдении за смещением поверхностей тела. Рассмотрим длинный полый изотропный круговой цилиндр. С учетом симметрии, следуя [3], его термонапряженное состояние описываем уравнением

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \qquad r \in (r_1, r_2), \tag{1}$$

где σ_r, σ_φ — компоненты тензора напряжений,

$$\begin{gathered}\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \qquad \sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\varphi - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,\\ \varepsilon_r = \frac{dy}{dr}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{y}{r};\end{gathered} \tag{1$'$}$$

$y = y(r)$ — радиальное смещение; λ, μ — постоянные Ламе; α — коэффициент температурного расширения; ε_r, ε_φ — компоненты тензора деформации; T — изменения температуры $\overline{T}$ от начального ее состояния T_0. С учетом ($1'$) равенство (1) принимает вид:

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) - \frac{y}{r}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha r\frac{dT}{dr}\right\} = f(r), \qquad r \in (r_1, r_2). \tag{2}$$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)\right\} = \bar{f}(r), \qquad r \in (r_1, r_2), \tag{3}$$

где k — коэффициент теплопроводимости; $\bar{f}$ — мощность источников/стоков.

На внутренней и внешней поверхностях цилиндра заданы напряжения

$$\sigma_r(y)|_{r=r_i} = -p_i, \qquad i = 1, 2, \tag{4}$$

на внутренней поверхности заданно плотность теплового потока

$$-k\frac{dT}{dr} = u, \qquad r = r_1, \tag{5}$$

а на внешней поверхности — краевое условие третьего рода

$$k\frac{dT}{dr} = -\overline{\alpha}T + \beta_2, \qquad r = r_2. \tag{6}$$

Задано наблюдение

$$Z(u) = Cy(u), \tag{7}$$

где $C \in L(V; H)$, H — некоторое гильбертово пространство. Примем

$$Cy(u) = y(u; r_2). \tag{8}$$

Поставим в соответствие каждому управнению $u \in \mathcal{U} = R$ значение функционала стоимости

$$J(u) = \frac{1}{2}\|Cy(u) - Z_g\|^2_{\mathcal{H}} + (Nu, u)_{\mathcal{U}}. \tag{9}$$

Здесь $Z_g \in \mathcal{H} = R = (-\infty, \infty)$; $N \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$; $(Nu, u)_{\mathcal{U}} \geqslant \nu_0\|u\|^2_{\mathcal{U}}$ $\forall\, u \in \mathcal{U}$; $\nu_0 = \mathrm{const} > 0$. Пусть $Nu = au$, $a = \mathrm{const} > 0$.

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (2)–(6) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in H$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in H$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(T; z_1), \tag{10}$$

$$a_0(T, z_2) = l_0(u; z_2), \tag{11}$$

где $H = V \times V$, $V = W_2^1(\Omega)$ — пространство функций Соболева, $\Omega = (r_1, r_2)$,

$$a(y, w) = \int\limits_{r_1}^{r_2} r\left((\lambda + 2\mu)\frac{dy}{dr}\frac{dw}{dr} + \lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{dy}{dr}\frac{w}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{y}{r}\frac{w}{r}\right)dr,$$

$$l(T; w) = \int\limits_{r_1}^{r_2} r(3\lambda + 2\mu)\alpha T\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right)dr + r_1p_1w(r_1) - r_2p_2w(r_2),$$

$$a_0(T, w) = \int\limits_{r_1}^{r_2} rk\frac{dT}{dr}\frac{dw}{dr}dr + \overline{\alpha}r_2T(r_2)w(r_2),$$

$$l_0(u; w) = \int\limits_{r_1}^{r_2} r\overline{f}wdr + r_1uw(r_1) + \beta_2r_2w(r_2).$$

Теорема 1. *Каждому управлению $u \in \mathcal{U}$ соответствует единственная составляющая $y(u)$ состояния $Y = (y, T)$ системы (2)–(6) как функция $y = y(u) \in V$, доставляющая на V минимум функционалу*

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(T; v) \tag{12}$$

и являющаяся единственным в V решением следующей задачи в слабой постановке: найти элемент $y \in V$, который удовлетворяет тождеству

$$a(y, v) = l(T; v), \qquad \forall\, v \in V, \tag{13}$$

где T — единственная функция из V, доставляющая на V минимум функционалу

$$\Phi_0(w) = a_0(w, w) - 2l_0(u; w) \tag{14}$$

и являющаяся единственным в V решением задачи: найти элемент $T \in V$, который $\forall\, w \in$ $\in V$ удовлетворяет тождеству

$$a_0(T, w) = l(u; w). \tag{15}$$

Справедливость теоремы устанавливается на основе леммы Лакса–Мильграма [4], следуя [2]. Пусть $y' = y(u')$, $y'' = y(u'')$ — решения из V эквивалентных задач (12), (13) при элементе $u \in \mathcal{U}$, равному соответственно u', u'', которые определяются фиксированными единственными решениями $T' = T(u')$, $T'' = T(u'')$ эквивалентных задач (14), (15). С учетом обобщенного неравенства Фридрихса имеем

$$\alpha_0'|y' - y''|^2_{r_2} \leqslant \alpha_0\|y' - y''\|^2_V \leqslant a(y' - y'', y' - y'') \leqslant C_0\|y' - y''\|_V\|T' - T''\|,$$

$$\|T' - T''\|^2_V \leqslant C_1 a_0(T' - T'', T' - T'') \leqslant C_1|u' - u''|\|T' - T''\|_V.$$

Следовательно, $|y' - y''|(r_2) \leqslant C_2|u' - u''|$. Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ представления $2J(u) =$ $= \|y(u) - Z_g\|^2_{\mathcal{H}} + +(\overline{a}u, u) = \pi(u, u) - 2L(u) + \|y(0) - Z_g\|^2_{\mathcal{H}}$. Где $L(v) = (Z_g - y(0), y(v) - y(0))_{\mathcal{H}}$, $\pi(u, v) = (y(u) - y(0), y(v) - y(0))_{\mathcal{H}} + (\overline{a}u, v)$, $y(v)|_{\mathcal{H}} = y(v; r_2)$. На основании [5, гл. 1, теорема 1.1] доказано утверждение.

Теорема 2. *Пусть состояние системы определяется как единственное решение эквивалентных задач* (10), (11)*;* (12), (14)*. Тогда существует единственный элемент u выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \tag{16}$$

Неравенство

$$\pi(u, v - u) \geqslant L(v - u), \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_\partial \tag{17}$$

является необходимым и достаточным условием существования единственного оптимального управления $u \in \mathcal{U}_\partial$.

Согласно [1, 2], сопряженное состояние $Y^* = (p, \Psi) \in H^* = H$ для каждого управления $v \in \mathcal{U}_\partial$ определяется как обобщенное решение краевой задачи, заданной равенствами:

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right) - \frac{p}{r}\right) = 0, \qquad r \in \Omega;\\
&\sigma_r(p)|_{r=r_1} = 0, \qquad \sigma_r(p)|_{r=r_2} = \frac{1}{r_2}(y(v; r_2) - Z_g),\\
&-\frac{d}{dr}\left(rk\frac{d\Psi}{dr}\right) - r(3\lambda + 2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r}\right) = 0, \qquad r \in \Omega;\\
&-k\frac{d\Psi}{dr}|_{r=r_1} = 0, \qquad k\frac{d\Psi}{dr}\bigg|_{r=r_2} = -\overline{\alpha}\Psi(r_2),
\end{aligned} \tag{18}$$

где $\sigma_r(p) = (\lambda + 2\mu)\dfrac{dp}{dr} + \lambda\dfrac{p}{r}$. На основании (13), (15), (18) получаем

$$(y(u) - Z_g, y(v) - y(u))_{\mathcal{H}} = (v - u, r\Psi(u)|_{r=r_1})_{\mathcal{U}}. \tag{19}$$

С учетом (19) неравенство (17) принимает вид

$$(r\Psi(u)|_{r=r_1} + \overline{a}, v - u) \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_\partial. \tag{20}$$

Таким образом, выполнение выражений (13), (15), (18), (20) является необходимым и достаточным условием существования оптимального управлении $u \in \mathcal{U}_\partial$.

Идентификация плотности теплового потока. Пусть состояние системы описывается краевой задачей (2)–(6), где плотность теплового потока u считается неизвестной. При этом предполагаем, что на внешней поверхности цилиндра известно смещение

$$y = f_0, \qquad r = r_2. \tag{21}$$

Полученная задача (2)–(6), (21) состоит в определении элемента $u \in \mathcal{U} = R$, при котором решение $y = y(r)$ задачи (2)–(6) удовлетворяет равенству (21). Введем в рассмотрение функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2}(y(u; r_2) - f_0)^2. \tag{22}$$

Задачу (2)–(6), (22) будем решать с помощью градиентных методов [6], где $(n+1)$-е приближение u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ находим по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n. \tag{23}$$

Здесь $p_n = J'_{u_n}$; $\beta_n = \|e_n\|^2/\|J'_{u_n}\|^2$; $e_n = y(u_n; r_2) - f_0$, J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ при $u = u_n$. Следуя [7], имеем

$$\begin{aligned} \langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle = \lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u_n + \lambda\Delta u_n) - J(u_n)}{\lambda} = \pi(u_n, \Delta u_n) - L(\Delta u_n) = \\ = (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))(r_2). \end{aligned} \tag{24}$$

С учетом (24) для определения u_{n+1} сопряженная задача принимает вид (18), где $v = u_n$. На основании (19), (24) получаем $J'_{u_n} = r_1\Psi(r_1)$. При точном решении модельной задачи (2)–(6) $y(r) = \cos(r)$, $T(r) = 15\exp(0{,}5r) + 1$ решены задачи по идентификации плотности теплового потока u (его точное значение $\overline{u} = -24{,}731$). При различных начальных значениях u_0 в пределах $[-10000;\, 10000]$ относительные погрешности не превышают 10^{-12}. Количество итераций не превышает трех. Здесь $k = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\alpha = 3$, $\overline{\alpha} = 1$, $\beta_2 = 1$. Прямая и сопряженная задачи решались с помощь МКЭ с использованием квадратичных базисных функций, для которых справедливы оценки погрешностей $\|y - y_2^N\|_V \leqslant Ch^2$, $\|T - T_2^N\|_V \leqslant C_1h^2$, где h — длина наибольшего из элементарных отрезков конечно-элементного разбиения отрезка $[r_1, r_2]$.

Идентификация коэффициента теплопроводности. Состояние системы описывается краевой задачей (2)–(6), где $u = \beta_1 = -24{,}731$ — известно, а $k = u \in U = (0, +\infty)$

считается неизвестным. При этом предполагаем, что задано равенство (21) и, следовательно, функционал (22). Полученную задачу по идентификации коэффициента теплопроводности k решаем с помощью итерационного процесса (23), где сопряженная задача имеет вид (18) при $k = u_n$. В этом случае

$$J'_{u_n} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT(u_n)}{dr}\right)\Psi dr + r\frac{dT(u_n)}{dr}\Psi\bigg|_{r=r_1} - r\frac{dT(u_n)}{dr}\Psi\bigg|_{r=r_2}.$$

Решена задача идентификации коэффициента теплопроводности k с такими же исходными данными, как в предыдущем пункте. При различных начальных значениях k_0 в пределах $[10^{-15}; 10000]$ (его точное значение $\overline{k} = 2$) относительные погрешности при значении точности прекращения итерационного процесса $\varepsilon = 10^{-5}$ не превышают 10^{-6} (количество итераций не превышает 25) и при значении $\varepsilon = 10^{-10}$ — не превышают 10^{-11} (количество итераций не превышает 35).

1. *Дейнека В. С.* Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
2. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. – Киев: Наук. думка, 2007. – 703 с.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
4. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – Москва: Мир, 1980. – 512 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.
6. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
7. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 10.10.2011

Академік НАН України **В. С. Дейнека, А. А. Аралова**

Оптимальне керування термопружним станом довгого циліндра з порожниною

Розглянуто задачу оптимального керування термопружним станом довгого кругового циліндра з порожниною. Побудовано в явному вигляді вирази градієнтів функціоналів нев'язки для ідентифікації параметрів задачі термопружності. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Deineka, A. A. Aralova**

Optimal control over a thermal stressed state of a hollow long cylinder

The optimal control problem for the thermoelastic state of a long hollow circular cylinder is considered. The explicit expression for the residual functional gradient parameter identification problem of thermoelasticity is constructed. The results of computational experiments are presented.