УДК 515.162.3

В. В. Круглов

О кривизне контактных структур и слоений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Using the result of D. Hardorp on the existence of total foliations, we prove that each closed orientable 3D manifold has a strong saddle foliation. We also prove that any contact structure with vanishing Euler class admits an uniformization.

1. Двумерные распределения на трехмерных многообразиях. Пусть M — замкнутое C^∞-гладкое ориентируемое трехмерное многообразие. Распределение на M — это двумерное подрасслоение касательного расслоения TM. Скажем, что распределение η интегрируемо, если найдется двумерное слоение на M, касательное в каждой точке к слоям расслоения η. Следующая теорема Фробениуса дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы распределение было интегрируемым:

Теорема 1. *Пусть η — распределение на многообразии M. Тогда η интегрируемо тогда и только тогда, когда для любых сечений S и T распределения η их скобка Ли $[S,T]$ лежит в η.*

Распределение η называется контактной структурой, если для любых линейно независимых сечений S и T в η их скобка Ли $[S,T]$ не принадлежит η.

Определение 1. Два распределения η_0 и η_1 называются гомотопными, если найдется непрерывный путь $\eta(t)$ в пространстве распределений такой, что $\eta(0) = \eta_0$ и $\eta(1) = \eta_1$.

Распределение η называется трансверсально ориентируемым, если на M существует глобальная 1-форма α такая, что $\eta = \ker(\alpha)$. В случае, когда η является контактной структурой, α называется контактной формой контактной структуры η.

Определение 2. Классом Эйлера $e(\eta) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ распределения называется класс Эйлера расслоения η.

Известно, что если класс Эйлера двумерного распределения η равен нулю, то распределение имеет ненулевое сечение. Класс Эйлера инвариантен относительно гомотопий, поэтому можно говорить о классе Эйлера гомотопического класса распределений.

Определение 3. Оснащение трехмерного многообразия M — это представление касательного расслоения M в виде произведения $TM \simeq M \times \mathbb{R}^3$.

Оснащение на M состоит из трех линейно независимых векторных полей. Известно, что всякое ориентируемое замкнутое трехмерное многообразие допускает оснащение. Любые два векторных поля в оснащении задают распределение с равным нулю классом Эйлера. Следовательно, на каждом ориентируемом замкнутом трехмерном многообразии существует распределение с $e(\eta) = 0$.

Определение 4. Тотальное распределение на трехмерном многообразии — это тройка $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^3$ трансверсально ориентируемых распределений таких, что для каждой точки p в M пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{3} \eta_i(p) = 0$. Распределение η называется тотальным слоением, если каждое η_i интегрируемо. Два тотальных распределения η_0 и η_1 гомотопны, если найдется непрерывный путь в пространстве тотальных распределений, соединяющий η_0 с η_1.

Каждое тотальное распределение задает оснащение на M с помощью пересечений $\eta_1 \bigcap \eta_2$, $\eta_1 \bigcap \eta_3$ и $\eta_3 \bigcap \eta_2$. Следовательно, каждое из распределений η_i имеет равный нулю класс Эйлера.

Лемма 1. *Если два трансверсально ориентируемых распределения η_0 и η_1 трансверсальны, то они гомотопны.*

Доказательство. Выберем на M некоторую риманову метрику g. Векторы единичных нормалей к η_0 и η_1 определяют на M два трансверсальных ненулевых векторных поля X_0 и X_1. Для каждого t зададим векторное поле $X_t = (1-t)X_0 + tX_1$. Распределение η_t, ортогональное полю X_t, реализует гомотопию между η_0 и η_1.

Поскольку распределения η_i попарно трансверсальны, они гомотопны, а значит, лежат в одном гомотопическом классе. Этот класс мы назовем гомотопическим классом тотального распределения.

Верна следующая теорема:

Теорема 2 [1]. *На каждом замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M существует тотальное слоение.*

Очевидно, что тотальное слоение не может содержать слоения многообразия $S^2 \times S^1$ сферами. Элиашберг и Терстон [2] показали, что всякое трансверсально ориентируемое C^2-слоение на ориентируемом замкнутом многообразии, отличное от слоения $S^2 \times S^1$ сферами, может быть аппроксимировано C^0-близкой контактной структурой. Применив эту теорему к тотальному слоению, получаем, что на M существует пара трансверсальных слоений и трансверсальная им контактная структура.

2. Вторая фундаментальная форма распределения. Рассмотрим риманово многообразие M с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и ассоциированной связностью Леви-Чевита ∇ и пусть η — распределение на M. Обозначим через n единичный вектор нормали к η.

Определение 5 [3]. Вторая фундаментальная форма η — это симметрическая билинейная форма, которая определяется следующим образом:

$$B(S,T) = \frac{1}{2}\langle \nabla_S T + \nabla_T S, n \rangle$$

для всех сечений S и T в η.

Определение 6. Функция

$$K_e(\eta) = \frac{B(S,S)B(T,T) - B(S,T)^2}{\langle S,S \rangle \langle T,T \rangle - \langle S,T \rangle^2}$$

называется внешней кривизной η. Функцию $K(\eta)$, ставящую в соответствие точке $p \in M$ секционную кривизну площадки η_p, назовем секционной кривизной распределения η. Назовем функцию $K_0(\eta) = K(\eta) + K_e(\eta)$ внутренней кривизной распределения η.

Введенные функции не зависят от выбора сечений S и T в η.

3. Некоторые технические результаты.

Лемма 2. *Пусть $\{n, X, Y\}$ — некоторое оснащение замкнутого трехмерного многообразия M. Предположим, что распределение, порожденное полями n и Y, является контактной структурой. Тогда существует риманова метрика на M, в которой внешняя кривизна распределения, порожденного векторными полями X и Y, строго меньше нуля.*

Доказательство. Существует единственная риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на M, в которой оснащение $\{n, X, Y\}$ является ортонормированным. Пусть η — распределение, порожденное полями X и Y. Вычислим вторую фундаментальную форму распределения η в этой метрике. Применим для этого формулу Кошуля для связности Леви-Чевита:

$$2\langle \nabla_S T, U\rangle = S\langle T, U\rangle + T\langle U, S\rangle - U\langle S, T\rangle + \langle [S, T], U\rangle - \langle [S, U], T\rangle - \langle [T, U], S\rangle$$

для всех S, T, $U \in TM$. Следовательно,

$$B(S, T) = \frac{1}{2}(S\langle T, n\rangle + T\langle n, S\rangle - n\langle S, T\rangle - \langle [S, n], T\rangle - \langle [T, n], S\rangle)$$

для всех S и T в η. Подставляя в эту формулу векторные поля X и Y получаем

$$B(X, X) = \langle [n, X], X\rangle, \quad B(Y, Y) = \langle [n, Y], Y\rangle, \quad B(X, Y) = \frac{1}{2}(\langle [n, X], Y\rangle + \langle [n, Y], X\rangle).$$

Внешняя кривизна распределения η равна

$$K_e(\eta) = B(X, X)B(Y, Y) - B(X, Y)^2 = \langle [n, X], X\rangle\langle [n, Y], Y\rangle - \frac{1}{4}(\langle [n, X], Y\rangle + \langle [n, Y], X\rangle)^2.$$

Рассмотрим теперь на M новую риманову метрику. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ — единственная метрика на M, такая что $\{n, X, Y\}$ является ортогональным оснащением и

$$\langle n, n\rangle_\lambda = 1, \qquad \langle X, X\rangle_\lambda = \lambda^2, \qquad \langle Y, Y\rangle_\lambda = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Внешняя кривизна $K_e(\eta)$ в этой метрике равна

$$\begin{aligned}
K_e(\eta) &= \langle [n, X], X\rangle_\lambda\langle [n, Y], Y\rangle_\lambda - \frac{1}{4}(\langle [n, X], Y\rangle_\lambda + \langle [n, Y], X\rangle_\lambda)^2 = \\
&= \lambda^2\langle [n, X], X\rangle\frac{1}{\lambda^2}\langle [n, Y], Y\rangle - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2}\langle [n, X], Y\rangle + \lambda^2\langle [n, Y], X\rangle\right)^2 = \\
&= \langle [n, X], X\rangle\langle [n, Y], Y\rangle - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2}\langle [n, X], Y\rangle + \lambda^2\langle [n, Y], X\rangle\right)^2 = \\
&= \langle [n, X], X\rangle\langle [n, Y], Y\rangle - \frac{1}{4\lambda^4}\langle [n, X], Y\rangle^2 - \frac{1}{2}\langle [n, X], Y\rangle\langle [n, Y], X\rangle - \frac{\lambda^4}{4}\langle [n, Y], X\rangle^2.
\end{aligned}$$

Поскольку M компактно, существует такая положительная константа C, что

$$\left|\langle [n, X], X\rangle\langle [n, Y], Y\rangle - \frac{1}{2}\langle [n, X], Y\rangle\langle [n, Y], X\rangle\right| < C.$$

Мы предположили, что распределение, порожденное векторными полями n и Y, является контактной структурой. Форма $\alpha(*) = \langle *, X\rangle$ является контактной формой этого распределения. Поэтому $\langle [n, Y], X\rangle = \alpha([n, Y]) \neq 0$. Поскольку M компактно, существует такое ε, что

$$|\langle [n, Y], X\rangle| > \varepsilon.$$

Значит,

$$K_e(\eta) < C - \frac{\lambda^4\varepsilon^2}{4}.$$

Это выражение строго отрицательно для некоторого достаточно большого $\lambda = \lambda_0$. Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\lambda_0}$ является искомой.

Пусть $\{n, X, Y\}$ — некоторое оснащение трехмерного многообразия M и пусть a — гладкая положительная функция на M. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ единственную метрику на M, в которой оснащение $\{n, X, Y\}$ ортогонально и

$$\langle n, n\rangle_a = a, \qquad \langle X, X\rangle_a = 1, \qquad \langle Y, Y\rangle_a = 1.$$

Метрику, в которой оснащение $\{n, X, Y\}$ является ортонормированным, будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Лемма 3. *Секционная кривизна распределения η, порожденного векторными полями X и Y в метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ вычисляется по формуле*

$$K(\eta) = -\frac{3}{4}a\langle[X,Y],n\rangle^2 + (X\langle[X,Y],Y\rangle - Y\langle[X,Y],X\rangle - \\ - \langle[X,Y],X\rangle^2 - \langle[X,Y],Y\rangle^2) + \frac{1}{2}\langle[X,Y],n\rangle(\langle[Y,n],X\rangle + \langle[n,X],Y\rangle) + \\ + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{4}(\langle[X,n],Y\rangle + \langle[Y,n],X\rangle)^2 - \langle[Y,n],Y\rangle\langle[X,n],X\rangle\right).$$

Внутренняя кривизна вычисляется по формуле

$$K_0(\eta) = -\frac{3}{4}a\langle[X,Y],n\rangle^2 + (-X\langle[X,Y],Y\rangle - Y\langle[X,Y],X\rangle - \\ - \langle[X,Y],X\rangle^2 - \langle[X,Y],Y\rangle^2) + \frac{1}{2}\langle[X,Y],n\rangle(\langle[Y,n],X\rangle + \langle[n,X],Y\rangle).$$

4. Существование сильно седловых слоений на замкнутых трехмерных многообразиях.

Определение 7. Пусть $\mathcal{F}$ — двумерное слоение на римановом многообразии M. Слоение $\mathcal{F}$ называется сильно седловым, если все слои $\mathcal{F}$ являются седловыми поверхностями. Это эквивалентно тому, что распределение плоскостей, касательных к слоям $\mathcal{F}$, имеет $K_e < 0$.

Это определение естественным образом переносится на случай произвольного распределения.

Определение 8. Распределение η на римановом многообразии M называется сильно седловым, если его внешняя кривизна $K_e < 0$. Назовем векторное поле сильно седловым, если оно трансверсально сильно седловому распределению.

Сильно седловые слоения впервые были введены А. Борисенко в [4]. Классическим примером сильно седлового слоения является орисферическое слоение на расслоении единичных касательных векторов над гиперболической поверхностью. В работе [5] было показано, что рибовская компонента не является топологическим препятствием к существованию таких слоений. Конструкция сильно седлового слоения в рибовской компоненте была использована для построения сильно седлового слоения в трехмерной сфере. В работе [5] был задан вопрос о том, какие трехмерные многообразия допускают сильно седловые слоения. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *На каждом замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии существует слоение, сильно седловое в некоторой римановой метрике.*

Доказательство. По теореме 2 на M существует тотальное слоение. Обозначим его $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^3$. По теореме Элиашберга и Терстона [2] существует контактная структура ξ, настолько C^0-близкая к $\mathcal{F}_2$, что она трансверсальна как $\mathcal{F}_1$, так и $\mathcal{F}_3$. Пусть n — векторное поле, касательное к пересечению $\xi \bigcap T\mathcal{F}_3$. Дополним это векторное поле до оснащения $\{n, X, Y\}$, где векторное поле X касается пересечения $T\mathcal{F}_1 \bigcap T\mathcal{F}_3$, а Y — пересечения $\xi \bigcap T\mathcal{F}_1$. Применив лемму 2, приходим к выводу, что внешняя кривизна $\mathcal{F}_1$ строго меньше нуля. А значит, слоение $\mathcal{F}_1$ является сильно седловым.

В [6] был представлен результат, что на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии в каждом гомотопическом классе распределений с равным нулю классом Эйлера существует тотальное распределение. В случае, если этот результат окажется верным, теорему 3 можно усилить:

Теорема 4. *На замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии в каждом гомотопическом классе распределений с равным нулю классом Эйлера существует сильно седловое слоение.*

5. Униформизация контактных структур с $e(\eta) = 0$.

Теорема 5. *Пусть η — трансверсально ориентируемая контактная структура на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M. Предположим, что $e(\eta) = 0$. Тогда на M существует такая риманова метрика g_1, в которой $K(\eta) = -1$, и такая риманова метрика g_2, в которой $K_0(\eta) = -1$.*

Доказательство. Мы докажем это утверждение для случая секционной кривизны. Случай внутренней кривизны рассматривается аналогично.

Пусть n — некоторое глобальное трансверсальное к η векторное поле. Так как многообразие ориентируемо, контактная структура трансверсально ориентируема и $e(\eta) = 0$, то контактное распределение η тривиально. Пусть X и Y — два линейно независимых сечения η. Тройка векторов $\{n, X, Y\}$ образует оснащение многообразия M.

Мы будем искать метрику g_1 в классе метрик $C\langle\cdot,\cdot\rangle_a$. Рассмотрим уравнение $K(\eta) = -D$, где D — некоторая положительная константа. Так как распределение η является контактной структурой, то из леммы 3 следует, что коэффициент при старшей степени a в этом уравнении не равен нулю. Используя лемму 3 и компактность M, легко показать, что существует такое D_0, что уравнение имеет положительное решение a_0. В метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle_{a_0}$ распределение η имеет постоянную секционную кривизну $-D_0$. Положим $g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{D_0}}\langle\cdot,\cdot\rangle_{a_0}$. В этой метрике $K(\eta) = -1$.

Теорема 5 является частичным положительным ответом на вопрос, заданный Джоном Этниром. Этот, а также некоторые другие вопросы по контактной топологии можно найти на его персональной веб-странице http://www.math.gatech.edu/~etnyre/.

1. *Hardorp D.* All compact orientable three dimensional manifolds admit total foliations // Mem. Amer. Math. Soc. – 1980. – **26(233)**. – 74 p.
2. *Eliashberg Y. M., Thurston W. P.* Confoliations / University Lecture Notes, American Mathematical Society. – Providence, RI, 1998. – 66 p.
3. *Reinhart B.* The second fundamental form of a plane field // J. Diff. Geom. – 1977. – **12**. – P. 619–627.
4. *Борисенко А. А.* О слоениях отрицательной внешней кривизны на компактных римановых многообразиях // Мат. заметки. – 1997. – **67**. – P. 673–676.
5. *Bolotov D. V.* Extrinsic geometry of foliations on 3-manifolds. – Proceedings of the “Foliations 2005”. – Lodz, 2006. – P. 109–120.
6. *Asaoka M., Dufraine E., Noda T.* Homotopy classes of total foliations and bi-contact structures on three-manifolds. – Prepr. – http://arxiv.org/abs/0706.1879v1, 2007.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина, Харьков

Поступило в редакцию 31.10.2007