6. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. – Москва: Радио и связь, 1985. – 304 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
8. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – Москва: Мир, 2001. – 412 с.
9. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация / Под ред. Г. Ш. Рубинштейна, Н. Н. Яненко. – Москва: Мир, 1975. – 496 с.
10. *Кулик С. І., Литвин О. М.* Узагальнені оператори Хаара, побудовані на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара // Праці Міжнар. конф. Укробраз'2004. – Київ, 2004. – С. 297–300.
11. *Кулик С. І., Литвин О. М.* Використання мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами у стисканні інформації // Праці Міжнар. конф. Укробраз'2006. – Київ, 2006. – С. 155–158.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
Надійшло до редакції 07.06.2007

УДК 519.21

Є. Ф. Царков, І. В. Малик

Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Necessary and sufficient conditions of the mean square exponential stability of a linear stochastic differential-difference equation of neutral type in the scalar case are obtained.

Питанню стійкості за Ляпуновим розв'язків детермінованих диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (ДДФРНТ) присвячено достатньо велику кількість робіт, серед яких особливе місце займають праці наукових шкіл Дж. Хейла [1], Н. Азбелєва [2], М. Каменського [3], Д. Хусаїнова [4], В. Слюсарчука [5]. У роботах В. Колмановського [6], Є. Царкова [7], Д. Хусаїнова [4] та їхніх учнів вивчалися питання поведінки розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь. Питанню існування сильного розв'язку стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу та узагальнення другого методу Ляпунова присвячено роботи Є. Андрєєвої, Л. Шайхета, В. Колмановського [6], В. Берези, В. Ясинського [8] та ін.

Нехай на імовірнісному базисі [9] $(\Omega, F, P, \mathrm{Im})$, де $\mathrm{Im} \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано сильний розв'язок [6, 10] $x(t) = x(t,\omega) \in R^1$ лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (ЛСДРРНТ)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + \{Gx_t\}dw(t) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0\} \in C([-h,0])$; $\varphi \in C([-h,0]) - F_0$ — вимірний випадковий процес; $w(t) = w(t,\omega)$ — одновимірний випадковий вінерів процес, що узгоджений з $\mathrm{Im} = \{F_t, t \geqslant 0\}$; D, L, G — різницеві оператори, що задані на просторі співвідношеннями [1, 3] для $\psi \in C([-h,0])$

$$\begin{aligned} &D\psi \equiv \psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi(-\tau_k), \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n \leqslant h; \\ &L\psi \equiv \alpha\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} b_k \psi(-\lambda_k), \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m \leqslant h; \\ &G\psi \equiv f\psi(0) + \sum_{k=1}^{q} g_k \psi(-\theta_k), \qquad 0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q \leqslant h. \end{aligned} \tag{3}$$

Для ЛСДРРНТ (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in R^1$ [8], для якого існує $E\{x^2(t)\} < \infty$.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (ДДРРНТ) [1, 2]

$$d\{Dy_t\} = \{Ly_t\}dt \tag{4}$$

за початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), \qquad -h \leqslant t \leqslant 0. \tag{5}$$

Наведемо спочатку деякі твердження.

Лема 1 [11, 12]. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| < 1, \tag{6}$$

то розв'язок $y(t) \equiv 0$ *ДДРРНТ* (4), (5) *є експоненціально стійкий тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома*

$$V(z) \equiv z\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-z\tau_k}\delta_k\right) - a - \sum_{l=1}^{m} e^{-z\lambda_l} b_l \tag{7}$$

лежать у лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$, *тобто*

$$\exists\, \rho > 0, \qquad \forall\, z \in \mathbf{C}\colon \qquad V(z) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{Re}\, z < -\rho. \tag{8}$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [1, 13] як розв'язок (4), що задовольняє початкову умову

$$X(t) \equiv 1(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Тоді вірне твердження [1, 3] щодо зображення функції Коші $X(t)$ за характеристичним квазіполіномом.

Лема 2. *Функція Коші $X(t)$ має вигляд*

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Re z=\mu} e^{zt} V^{-1}(z)\, dz, \tag{10}$$

де $\mu > -\rho$.

Далі має місце таке твердження [7].

Лема 3 [14]. *Розв'язок ЛСДРРНТ* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t X(t-s) G x_s dw(s), \tag{11}$$

де $y(t)$ — розв'язок (4), (2).

Для одержання необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ ЛСДРРНТ (1), (2) введемо деякі позначення і пов'язані з ними твердження.

Використовуючи інтегральне зображення (11) сильного розв'язку (1), а також зображення функції Коші $X(t)$ у вигляді (10), запишемо інтегральне рівняння Вольтерра нейтрального типу для випадкового процесу $\gamma(t) \equiv G x_t$:

$$\gamma(t) = G y_t + \int\limits_0^t H(t-s) \gamma(t) dw(s), \tag{12}$$

де

$$H(t) \equiv G X_t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, z=\mu} e^{zt} G_1(z) V^{-1}(z)\, dz, \tag{13}$$

$$G_1(z) \equiv f + \sum_{i=1}^{q} g_i e^{-z\theta_i}. \tag{14}$$

Введемо такі позначення:

$$M(t,\varphi) \equiv E\{|x(t)|^2 / F^0\} = E\{|x(t)|^2\}, \tag{15}$$

$$\Gamma(t,\varphi) \equiv E\{|\gamma(t)|^2 / F^0\} = E\{|\gamma(t)|^2\}. \tag{16}$$

Тут умовні математичні сподівання дорівнюють звичайним на підставі незалежності випадкових процесів $x(t)$ і $\gamma(t)$ від початкової σ-алгебри F_0 [9].

Одержимо рівняння для другого моменту $M(t,\varphi)$ та $\Gamma(t,\varphi)$ вигляду

$$M(t,\varphi) = |y(t)|^2 + \int\limits_0^t |X(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds. \tag{17}$$

$$\Gamma(t,\varphi) = |G y_t|^2 + \int\limits_0^t |H(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds. \tag{18}$$

Наведемо одне допоміжне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (6) *і* (8). *Тоді розв'язок інтегрального рівняння* (18) *задовольняє умову*

$$\exists C_1 > 0, \qquad \exists C_2 > 0, \qquad \forall \varphi \in C([-h,0]) \colon \qquad \int\limits_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{tC_2} < C_1 \|\varphi\|^2 \tag{19}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$B \equiv \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 dt < 1. \tag{20}$$

Лема 4. *В умові* (20) *інтеграл у лівій частині нерівності обчислюється таким чином:*

$$B \equiv \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds.$$

Доведення. Якщо замість $H(t)$ підставимо його інтегральний вигляд (13), то матимемо [15]

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(is) e^{zt} V^{-1}(is)\, ds. \tag{21}$$

Зауважимо, що $G_1(is)e^{zt}V^{-1}(is)$ є образом для $H(t)$ або

$$G_1(is) e^{zt} V^{-1}(is) = \int\limits_0^\infty e^{-ist} H(t)\, dt. \tag{22}$$

Тоді за рівністю Планшереля–Парсеваля [3] одержимо

$$\int\limits_0^\infty |H(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds + \int\limits_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds \right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^\infty |G(-is)|^2 |V(-is)|^{-2} ds + \int\limits_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds.$$

Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (6) *і* (8) *для коефіцієнтів ЛСДРРНТ і коренів його характеристичного квазіполінома* (7).

1. Тоді необхідною і достатньою умовою експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку (1), (2) *є виконання інтегральної нерівності*

$$B = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds < 1, \tag{23}$$

де

$$G(z) \equiv f + \sum_{r=1}^{q} g_r e^{-z\theta_r}.$$

2. Тоді при $B > 1$ буде мати місце такий факт: у будь-якому околі нуля знайдеться початкова функція $\varphi(t)$ така, що

$$\lim_{t\to\infty} M\{|x(t)|^2\} = \infty. \tag{24}$$

Доведення 1. *Достатність.* Нехай виконується (23), а значить, виконується (20). Умови (6) і (8) гарантують [1] існування деякої сталої $M_2 > 0$ та $c_2 > 0$ таких, що

$$\begin{gathered} |Gy_t|^2 e^{tc_2} \leqslant M_2 \|\varphi\|^2, \\ |y(t)|^2 e^{tc_2} \leqslant M_2 \|\varphi\|^2, \qquad |X(t)|^2 e^{tc_2} \leqslant M_2 \qquad \text{і} \qquad |H(t)|^2 e^{tc_2} \leqslant M_2 \end{gathered} \tag{25}$$

для довільного $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$.

Зауважимо, сталу $c_2 > 0$ для виконання оцінок (25) слід вибирати як у теоремі 1.

Далі, при виконанні нерівностей (25) очевидна оцінка для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$

$$\Gamma(t,\varphi) e^{tc_2} = |Gy_t|^2 e^{tc_2} + \int\limits_0^t |H(t-s)|^2 e^{(t-s)c_2} e^{sc_2} \Gamma(s,\varphi)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \|\varphi\|^2 + M_2 \int\limits_0^t e^{sc_2} \Gamma(s,\varphi)\, ds \leqslant M_2(1 + c_1) \|\varphi\|^2, \tag{26}$$

де c_1 визначена в доведенні теореми 1.

Тоді з урахуванням одержаних нерівностей (25), (26) легко виписати оцінку для $M(t,\varphi)$, що задовольняє рівняння (17), а саме

$$M(t,\varphi) \leqslant M_2(1 + c_1)\|\varphi\|^2 e^{-tc_2}$$

для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$.

Достатність доведено.

Необхідність. При виконанні умов (6), (8) нехай розв'язок $x(t) \equiv 0$ експоненціально стійкий, тобто $E|x(t)|^2 \leqslant Me^{-ct} E\|\varphi\|^2$ для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$, де $M > 0$ та $c > 0$. Тоді матимемо

$$\Gamma(t,\varphi) = E\{|Gx_t|^2\} \leqslant (q+1) \left(|f|^2 + \sum_{r=1}^{q} |g_r|^2 \right) \max_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} E\{|x(t+\theta)|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant M(1+q)\left(|f|^2+\sum_{r=1}^{q}|g_r|^2\right)e^{-ct}\|\varphi\|^2.$$

А значить, можна підібрати сталу $c_1 > 0$ таку, що

$$\int\limits_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{tc_2dt} < c_1\|\varphi\|.$$

Залишилось використати теорему 1, що дає нерівність (23), якщо врахувати нерівність (19) леми 1. Перша частина теореми 2 доведена, друга частина доводиться аналогічно.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.
2. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1991. – 280 с.
3. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. – 1981. – **19**. – С. 55–126.
4. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев: Изд-во Киев. нац. ун-та, 1997. – 236 с.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. – 288 с.
6. *Андреева Е. А., Шайхет Л. Е., Колмановский В. Б.* Управление системами с последействием. – Москва: Наука, 1992. – 333 с.
7. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
8. *Береза В. Ю., Ясинський В. К.* Про існування розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фізико-мат. науки. – 2002. – Вип. 5. – С. 19–27.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
10. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. – Москва: Наука, 1994. – Т. 2. – 473 с.
11. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1996. – 655 с.
12. *Хусаинов Д. Я.* Оценки решений линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. – 1991. – № 9. – С. 1123–1135.
13. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
14. *Снекторский И. Я.* Обобщенные формулы вариации постоянной линейного неоднородного стохастического уравнения // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 5. – С. 107–112.
15. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Москва: Наука, 1971. – 288 с.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 20.02.2008