

УДК 517.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВХОДА ЖИДКОСТИ В КАНАЛ С ЛИНЕЙНОЙ ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Е. А. ГАЕВ*, С. З. ШИХАЛИЕВ**

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Институт проблем моделирования в энергетике НАН Украины, Киев

Получено 10.04.02

Численно решены стационарные уравнения Навье-Стокса, описывающие вход и постепенную стабилизацию несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале с симметричными "пористыми слоями" у стенок, в которых на жидкость действует распределенная линейная сила сопротивления. Для формулировки граничного условия и тестирования численного алгоритма используется аналитическое решение одномерных уравнений, описывающих течение на участке его стабилизации. Трансформация потока жидкости на входном участке канала иллюстрируется детальными расчетами нескольких ламинарных течений с числом Рейнольдса $Re \leq 10$. Представлены графики, обобщающие зависимость Шлихтинга для длины начального участка канала с учетом влияния двух новых параметров, характеризующих течение.

Чисельно розв'язано стаціонарні рівняння Нав'є-Стокса, які описують вхід нестисливої в'язкої рідини в плоский канал і поступову стабілізацію цієї течії за умов, що біля стінок каналу знаходяться симетричні "пористі" шари, в яких на рідину впливає розподілена лінійна сила опору. Для формулювання граничної умови і тестування алгоритму використано аналітичний розв'язок одновимірної течії на ділянці її стабілізації. Трансформацію потоку на вхідній ділянці каналу проілюстровано детальними розрахунками кількох ламинарних течій з числом Рейнольдса $Re \leq 10$. Залежність Шліхтинга для довжини початкової ділянки каналу узагальнена з урахуванням двох нових параметрів, які характеризують течію.

Stationary Navier-Stokes equations have been solved numerically to describe incompressible viscous flow that enters a channel with symmetrical near-wall porous layers where the fluid experiences a distributed linear drag force being proportional and opposite to local velocity vector. Analytical one-dimensional steady-state solution has been used to formulate boundary condition and examine numerical solution. Flow transformation over initial region of the channel is highlighted by detailed computation of several laminar flows with Reynolds number $Re \leq 10$. A generalisation of Schlichting relationship for the channel's initial region length is suggested to account for two new parameters determining the flow.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости на входе в плоский канал бесконечной длины и высоты H . Полагаем, что у стенок канала симметрично расположены слои пористой среды высотой h ($h \leq H/2$), в пределах которых на жидкость действуют локальные линейные массовые силы

$$\vec{f} = -kn\vec{U}, \quad \text{м/с}^2, \quad (1)$$

направленные противоположно вектору скорости жидкости $\vec{U} = \{U(x, z), V(x, z)\}$. Такая среда, названная *легкопроницаемой шероховатостью* (ЛПШ), характеризуется концентрацией идеализированных точечных препятствий n , $1/\text{м}^3$ и коэффициентом сопротивления последних k , $\text{м}^3/\text{с}$ [1]. Картина течения и некоторые обозначения поясняются рис. 1, где препятствия, составляющие ЛПШ, условно показаны кружочками. Задача о течении в канале с ЛПШ впервые решена в [1], но лишь для стабилизированного одномерного течения, т. е. на значительном удалении x от входа

в канал. Данная работа распространяет модель ЛПШ [1] на входной (начальный) участок канала.

Полагаем, что движение жидкости подчиняется уравнениям Навье-Стокса

$$(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p + \nu\nabla^2\vec{U} + \vec{f}_*, \quad \text{div } \vec{U} = 0 \quad (2)$$

с разрывной массовой силой

$$\vec{f}_* = \begin{cases} \vec{f}, & z \in [0, h], \\ 0, & z \in (h, H-h), \\ \vec{f}, & z \in [H-h, H], \end{cases} \quad (3)$$

где ρ , ν и p — соответственно плотность, кинематическая вязкость и давление в жидкости. Скорость на входе в канал ($x = 0$) полагаем распределенной равномерно и равной $U = U_0 = \text{const}$, $V = 0$; на стенках канала ($z = 0$ и $z = H$) выполняются условия прилипания $U = V = 0$. Граничное условие для давления p обсуждается ниже.

Естественно ожидать, что распределение скорости течения при наличии ЛПШ по мере удаления от входа в канал перестает зависеть от x , также

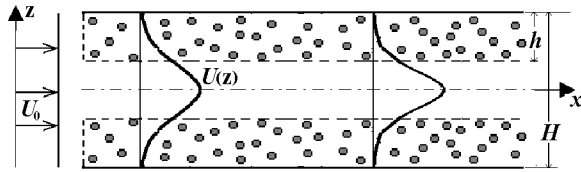


Рис. 1. Постановка задачи и основные обозначения

как в классическом течении через канал с гладкими стенками [2–4]. По прошествии некоторой длины $x = L_x$ распределение скоростей достигает стабилизации (термин [2]), а продольный градиент давления $\partial p / \partial x$ становится постоянным и может быть найден решением одномерной задачи [2, 4]. При расчетах входа жидкости в канал с гладкой стенкой его величина используется в краевом условии на выходе из начального участка $x = L_x$ [5–7]. Так же принимаем и в данной задаче:

$$x = L_x : \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad V \equiv 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \stackrel{Df}{=} -\beta \quad (4)$$

(значек Df над знаком равенства здесь и далее указывает на введение новой величины). Нахождению $\beta > 0$ посвящен раздел 2.

Таким образом, область определения задачи (2)–(4) является прямоугольником $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq z \leq H$, а ее решение зависит от параметров жидкости ν, ρ , параметров канала и ЛПШ H, h, kn , а также градиента давления β на стабилизированном участке. Длина участка стабилизации (его называют также входным или начальным) L_x неизвестна и подлежит определению в процессе решения. Режим течения полагаем ламинарным, а ЛПШ — симметричной относительно оси канала $z = 0.5H$.

Рассматриваемая задача при отсутствии массовой силы (3) для гладких стенок широко известна. Ее инженерное решение для практических задач предложено еще Шиллером [3]. Решение для ламинарного течения с позиций теории пограничного слоя, расширяющегося у стенок и асимптотически сходящегося к ускоряющемуся центральному течению, дано Шлихтингом [4]. В 1970-х годах задача была использована для тестирования первых алгоритмов решения на ЭВМ полных уравнений Навье-Стокса [5–7].

Задача о входе жидкости в канал с пористыми слоями (ЛПШ) у стенок в данной работе ставится и рассматривается впервые. Изучаемое течение представляет интерес во многих отношениях. Например, в гидравлике трубопроводных систем используют длинные участки труб с пори-

стой вставкой у стенок или по оси трубы. Первый случай рассмотрен здесь, второму будет посвящена отдельная работа. Случай короткой пористой вставки, который также планируется рассмотреть позднее, интересен тем, что по окончании пористой вставки в течении может возникать вихревая зона, интенсивностью которой можно управлять с помощью параметров h и A .

В последние годы в инженерных и экологических приложениях появляется все больше работ, посвященных обтеканию протяженных пористых тел — слоя развитой шероховатости теплообменника, городской застройки, лесного массива [8], придонных зарослей речным потоком и т.п. Теоретические работы такого вида используют в большинстве случаев приближение пограничного слоя. Работа [9] отличается тем, что обтекание неограниченным вязким потоком пористых блоков рассчитывалось с помощью полных уравнений Навье-Стокса; сделан вывод о малости членов, которыми в приближении пограничного слоя пренебрегают. Физическая ситуация, изучаемая в данной работе, предоставляет еще одну методологическую возможность сравнить точный и приближенный подходы.

Цель данного исследования ограничивается, однако, изучением гидромеханической трансформации потока под действием ЛПШ при его входе в канал, а также определением длины входного участка канала.

1. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В качестве характерных масштабов выберем ширину канала H и скорость на входе в него U_0 . Введем безразмерные координаты, компоненты скорости, давление и трение:

$$\bar{x} = \frac{x}{H}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_0}, \quad \bar{V} = \frac{V}{U_0}, \quad (5)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho U_0^2}$$

($\tau \stackrel{Df}{=} \rho \nu \frac{\partial U}{\partial z}$ называем далее *трением*). Тогда задача (2)–(3) может быть приведена к "консервативной форме" подобно [5]:

$$\frac{\partial \bar{U}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U} \bar{V}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} \right) - \begin{cases} A \bar{U}, & \bar{z} \in [0, \bar{h}] \cup [1 - \bar{h}, 1], \\ 0, & \bar{z} \in (\bar{h}, 1 - \bar{h}), \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{U} \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}^2}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{z}^2} \right) -$$

$$- \begin{cases} A \bar{V}, & \bar{z} \in [0, \bar{h}] \cup [1 - \bar{h}, 1], \\ 0, & \bar{z} \in (\bar{h}, 1 - \bar{h}), \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} = 0$$

с граничными условиями

$$\bar{x} = 0 : \bar{U} = 1, \bar{V} = 0, \bar{p} = \bar{p}_0 = 0;$$

$$\bar{x} = \bar{x}_L : \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} = 0, \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\bar{\beta}; \quad (7)$$

$$\bar{z} = 0 : \bar{U} = \bar{V} = 0;$$

$$\bar{z} = 1 : \bar{U} = \bar{V} = 0.$$

Здесь $\text{Re} = \frac{U_0 H}{\nu}$; $A = \frac{knH}{U_0}$ – безразмерная плотность ЛПШ; $\bar{h} = \frac{h}{H}$ и \bar{L}_x – безразмерные высота ЛПШ и длина начального участка канала соответственно. Алгоритм численного решения задачи построен "от стенки" $\bar{z} = 0$ "до стенки" $\bar{z} = 1$ без учета симметрии течения, чтобы применить его позднее для более общего случая $h_1 \neq h_2$.

Параметр задачи "длина начального участка" \bar{L}_x неизвестен и подлежит определению. Вместо него выходное граничное условие выполняем на заведомо большей длине $\bar{x} = \bar{x}_L$. По окончании расчетов находим \bar{L}_x как дистанцию, за которой дальнейшего изменения в решении не происходит, т. е. условие $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = \bar{V} = 0$ из (4) выполняется с заданной точностью. Для канала с гладкими стенками Шлихтинг [4] рекомендует оценку

$$\bar{L}_x = 0,04 \text{Re}. \quad (8)$$

Далее получено обобщение такой зависимости с учетом новых параметров задачи A и \bar{h} .

В дальнейшем черту над безразмерными символами опускаем.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ

Для постановки граничного условия (7) необходимо задать продольный градиент давления на основном участке β . Для его отыскания рассмотрим задачу о стабилизированном течении в бесконечно длинном канале с ЛПШ у стенок [1]. Ввиду линейности принятой зависимости силы от скорости (1) задача может быть решена аналитически.

Так как на достаточном удалении от входа в канал продольная скорость U зависит только от ко-

ординаты z , а поперечная скорость в силу уравнения неразрывности и граничных условий тождественно равна нулю $V \equiv 0$ [2, 4], то краевая задача (6)–(7) на участке стабилизации течения вырождается в одномерную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью:

$$\frac{1}{\text{Re}} U''_{zz} + \beta = \begin{cases} AU, & z \in [0, h], \\ 0, & z \in (h, 1/2), \end{cases} \quad (9)$$

$$z = 0 : U = 0, \quad z = 1/2 : \frac{dU}{dz} = 0.$$

При отыскании непрерывно дифференцируемого в области $z \in [0, 0.5]$ решения задачи (9) следуют [1].

Вне ЛПШ, при $z \in [h, 1/2]$, решение задачи (9) имеет, очевидно, вид

$$U(z) = \frac{1}{2} \beta \text{Re} [h(h-1) - z(z-1)] + U_h,$$

где $U_h \stackrel{Df}{=} U(h)$ – подлежащая определению "скорость скольжения". Как обычно в канале, трение вне ЛПШ распределено линейно:

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial z} = \beta(1/2 - z).$$

Оно обращается в нуль на оси канала, а на уровне ЛПШ принимает значение

$$\tau_h \stackrel{Df}{=} \tau(h) = \beta(1/2 - h). \quad (10)$$

Внутри ЛПШ при $z \in [0, h]$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$U(z) = C_1 e^{\chi z} + C_2 e^{-\chi z} + \frac{\beta}{A}, \quad (11)$$

где $\chi = \sqrt{A \cdot \text{Re}}$. Неопределенные константы C_1 и C_2 находим из условия прилипания и условия

$$\frac{1}{\text{Re}} U'(0) \stackrel{Df}{=} \tau_0.$$

Получаем решение в виде:

$$U(z) = \begin{cases} \tau_0 \frac{\text{Re}}{\chi} \text{sh}(\chi z) - \frac{\beta}{A} \text{ch}(\chi z) + \frac{\beta}{A}, & \text{при } z \in [0, h], \\ \frac{1}{2} \beta \text{Re} [h(h-1) - z(z-1)] + U_h, & \text{при } z \in (h, 1/2). \end{cases} \quad (12)$$

Входящие в решение (12) параметры τ_0 и U_h находим из условий непрерывности и гладкости решения при переходе через верхнюю границу ЛПШ

$z = h$. Поскольку трение на уровне ЛПШ дается соотношением (10), то получаем

$$\tau_0 = \beta \frac{\chi(1-2h) + 2\text{sh}(\chi h)}{2\chi \text{ch}(\chi h)}, \quad (13)$$

$$U_h = \tau_0 \frac{\text{Re}}{\chi} \text{sh}(\chi h) - \frac{\beta}{A} \text{ch} \chi h + \frac{\beta}{A}.$$

Последние две формулы дают окончательное решение задачи (9). Из них вытекает следующее выражение для распределения безразмерного трения:

$$\tau(z) = \begin{cases} \tau_0 \text{ch}(\chi z) - \frac{\beta}{\chi} \text{sh}(\chi z), & z \in [0, h], \\ \frac{1}{2}\beta(1-2z), & z \in (h, 1/2]. \end{cases} \quad (14)$$

Найдем теперь необходимое для постановки полной задачи выражение для продольного градиента давления β . Для безразмерных расходов жидкости через слой ЛПШ и через свободную от препятствий часть сечения можем записать соответствующие выражения:

$$q_1 \stackrel{\text{Def}}{=} \int_0^h U(z) dz = \frac{\tau_0}{A} \text{ch}(\chi h) - \frac{\beta}{\chi A} \text{sh}(\chi h) - \frac{\tau_0}{A} - \frac{\beta h}{A},$$

$$q_2 \stackrel{\text{Def}}{=} \int_h^{1/2} U(z) dz = \frac{\beta \text{Re}}{24} - \frac{\beta \text{Re} h}{12} (4h^2 - 6h + 3) + U_h \left(\frac{1}{2} - h \right).$$

Очевидное условие равенства расходу жидкости, втекающей в канал, $2(q_1 + q_2) = 1$, приводит с учетом выражений (13) к следующей зависимости коэффициента гидравлического сопротивления и связанного с ним β ,

$$\lambda = -\frac{p'H}{\frac{1}{2}\rho U_{\text{cp}}^2} = 2\beta,$$

от параметров задачи:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\text{Re}}{12} \left\{ 1 - 2h(4h^2 - 6h + 3) - \frac{24}{\chi^3} (\text{sh}(\chi h) + \pi \text{ch}(\chi h) - \pi - \chi h) - \frac{2 + \chi(2h-1)\text{sh}(\chi h) - 2\text{sh}(\chi h)}{6\chi^2 \text{ch}(\chi h)} \right\}, \quad (15)$$

где $\pi = \frac{\chi(2h-1) - 2\text{sh}(\chi h)}{2\text{ch}(\chi h)}$. (Использовано очевидное соображение, что средняя по сечению скорость U_{cp} равна скорости на входе U_0). Найденное соотношение ведет себя корректно в предельных

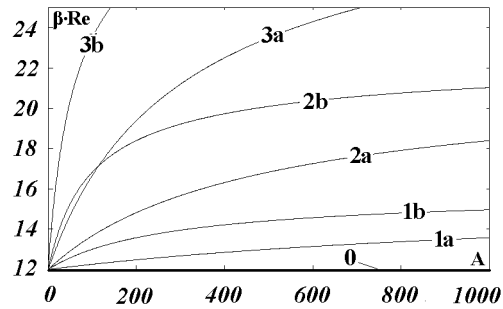


Рис. 2. Безразмерный градиент давления $\beta \cdot \text{Re}$ в зависимости от плотности ЛПШ A , числа Рейнольдса Re и относительной высоты ЛПШ: $0 - h = 0$ (независимо от Re); $1 - h = 0.05$, $2 - h = 0.10$, $3 - h = 0.15$; случаи $a - \text{Re} = 1$, случаи $b - \text{Re} = 5$

случаях – при $h \rightarrow 0$ или $A \rightarrow 0$ (ЛПШ исчезает) получаем известную зависимость для канала с гладкими стенками [2, 4]:

$$\beta = \frac{1}{2}\lambda = \frac{12}{\text{Re}}, \quad (16)$$

которая в [5] использована для задания краевого условия (4) на выходе из расчетной области. Таким образом, при наличии ЛПШ параметр β подчиняется более сложной зависимости (15). Последняя иллюстрируется графиками рис. 2, из которых видно, что при $A \rightarrow 0$, как и при $h \rightarrow 0$, имеет место предельный переход к известному случаю течения в канале с гладкими стенками (16):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \beta \cdot \text{Re} = \lim_{A \rightarrow 0} \beta \cdot \text{Re} = 12.$$

Аналогичные предельные переходы к случаю отсутствия ЛПШ у стенок справедливы и для других параметров течения:

$$\lim_{h \rightarrow 0} U_h = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \tau_h = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_0 = \frac{1}{2}\beta,$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} U_h = \frac{1}{2}\beta \cdot \text{Re} \cdot h(1-h),$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \tau_h = \frac{1}{2}\beta(1-2h), \quad \lim_{A \rightarrow 0} \tau_0 = \frac{1}{2}\beta.$$

Рассмотрим теперь предельное поведение течения при $A \rightarrow \infty$. В данной задаче, как показывает рис. 2, произведение $\beta \cdot \text{Re}$ растет вместе с A , причем тем интенсивнее, чем больше высота ЛПШ h и число Рейнольдса Re . При фиксированном $h \leq \frac{1}{2}$ произведение $\beta \cdot \text{Re}$, зависящее от A , выходит на некоторую горизонтальную асимптоту. Таким образом, $\beta \cdot \text{Re}$ является функцией трех аргументов – Re , A и h . Вместе с тем можно показать, что предельным значением этой функции

при $A \rightarrow \infty$ есть $\frac{12}{(1-2h)^3}$. Поскольку последняя функция не зависит от Re , то кривые с одинаковым номером выходят на общую горизонтальную асимптоту. Это, вместе с предельными соотношениями

$$\lim_{A \rightarrow \infty} U_h = 0, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \tau_0 = 0, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \tau_h = \frac{1}{2} \beta Re (1-2h),$$

означает, что при высокой плотности A ЛПШ становится "непроницаемой", течение переходит в таковое в канале с гладкими стенками через сечение, свободное от ЛПШ ($h \leq z \leq 1-h$).

При произвольных значениях A , h и Re безразмерный градиент давления β вычисляется по формуле (15), замыкая формулировку задачи.

3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА

Численные исследования проведены с использованием программного комплекса моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости в прямом плоском канале на основе полных уравнений Навье-Стокса [10]. Стационарная задача (6)-(7) решалась методом установления в сочетании с методом искусственной сжимаемости ("Artificial Compressibility", AC) [6,7]. Поскольку эти методы и различные их модификации, различающиеся способами дискретизации и расчета давления, хорошо известны, ограничимся здесь кратким изложением общих характеристик алгоритма и критериев контроля достоверности получаемых численных результатов.

Вместо стационарных уравнений (6) рассматриваются их нестационарные аналоги, причем уравнение неразрывности заменяется уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma^2 \nabla U = 0,$$

где t – фиктивное время; γ – "коэффициент штрафа", интерпретируемый обычно как квадрат скорости звука. Когда при $t \rightarrow \infty$ решение устанавливается, искусственно введенное уравнение становится эквивалентным уравнению неразрывности. Дискретизация членов уравнений проводилась по методу "маркеров и ячеек" ("Markers And Cells", MAC) [6,7]: нестационарные уравнения импульса аппроксимированы обычной пятиточечной явной разностной схемой (вязкие члены заменялись центральными разностями, а конвективные – разностями против потока). Задача решалась с некоторым шагом по времени Δt , который не должен превосходить определенной величины для

обеспечения устойчивости и точности алгоритма. Итерационный расчет давления в методе AC реализуется по явной формуле $p^{(k)} = p^{(k-1)} + \gamma_k D_k$, где $\gamma_k = \gamma \Delta t$ и D_k – сеточный аналог дилатации $D = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$.

По пространственным координатам задавались равномерные шаги $\Delta x = x_L/n_x$ и $\Delta z = 1/n_z$, где n_x и n_z – число ячеек, покрывающих расчетную область $\{0 \leq x \leq x_L, 0 \leq z \leq 1\}$ соответственно вдоль и поперек канала.

В методе AC большую роль играет задание начального поля течения, и особенно – начальное приближение давления $p^{(0)}(x, z)$. От близости последнего к истинному распределению давления зависит скорость итерационного процесса и даже сам факт сходимости метода в целом. В наших расчетах функция $p^{(0)}$ задавалась постоянной поперек канала и убывающей вдоль него:

$$p^{(0)}(x, z) = p^{(0)}(x) = -\beta x, \quad x \in [0, L_x],$$

где параметр $\beta = \beta(Re, A, h)$ вычислялся по выражению (15). Выбор метода AC из множества иных вариантов схем установления обусловлен предыдущим опытом его успешной апробации в численном расчете невозмущенного течения Пуазейля ($A = 0$) в диапазоне чисел Рейнольдса $0.001 \leq Re \leq 1000$ [10].

Результат расчета признавался удовлетворительным, если относительная погрешность по расходу жидкости, усредненная по длине канала, не превышала 0.001%. Такое решение, однако, не всегда оказывалось достоверным. Критерием последнего может служить сближение эпюры продольной скорости по мере роста x с аналитически найденным выражением на участке стабилизации (12). Уменьшение шагов по пространственным координатам Δx и Δz такой результат гарантирует. Для достижения требуемой точности при умеренных A и $Re = 10$, как правило, оказывалась достаточной сетка, содержащая вдоль и поперек канала соответственно $n_x = 80$ и $n_y = 40$ ячеек. При $A > 100$ количество ячеек пространственной сетки доходило до 320×160 . Соответственно, счет одного варианта на ПЭВМ Pentium III 667/126 занимал от 10 – 20 минут до нескольких часов процессорного времени.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты численных расчетов входа жидкости в канал при $Re = 10$ приведены на рис. 3. Сплошные линии относятся к случаю наличия легкопроницаемой шероховатости безразмерной

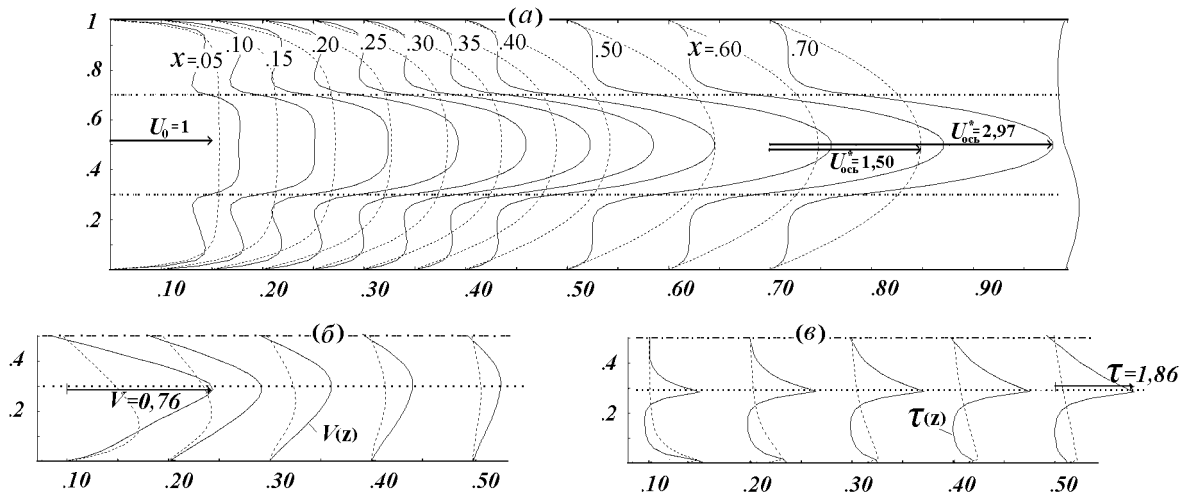


Рис. 3. Распределения вдоль входного участка канала характеристик вязкого потока при $Re = 10$: продольной (а) и поперечной (б) скоростей, трения (в). Сплошные линии – случай присутствия у стенок ЛПШ плотности $A = 100$ и высотой $h = 0.3$ (границы раздела ЛПШ и потока отмечены пунктиром); штриховые линии – ЛПШ у стенок отсутствует; штрихпунктир – ось канала.

плотностью $A = 100$ и высотой $h = 0.3$, а штриховые – к случаю отсутствия ЛПШ ($A = 0$ либо $h = 0$). Развитие потока в последнем случае (штриховые линии) сопровождается торможением потока у стенок, расширением нижнего и верхнего пристенных пограничных слоев вдоль канала, оттеснением жидкости от стенок к центру канала. Вследствие этого, в центре канала жидкость ускоряется. Максимум скорости имеет место на оси, и это значение возрастает вдоль канала при любых числах Re до некоторой предельной величины, строго равной $U_{осб}^* = 1.5$ (на масштаб величин указывают стрелки и цифры при них). Характерные "полочки" на профилях скорости относятся к ускоряющемуся ядру потока, существующему до смыкания пограничных слоев, т. е. – на начальном участке. Затем профили скорости принимают строго параболический вид, далее не меняющийся. Длина начального участка L_x в данном случае ($Re = 10$) оказывается равной 0.4 , что совпадает с формулой Шлихтинга. Этот случай входа жидкости в канал описан как в классических [2–4], так и в последующих численных работах [5, 7, 10].

Наличие ЛПШ приводит к иным закономерностям развития пограничных слоев у стенок канала. ЛПШ создает интенсивное торможение течения в занятых ею областях. При этом из-за "прилипания" жидкости к стенкам сила торможения (1) вблизи них оказывается меньшей, чем у границы ЛПШ, в результате чего на участке канала $0 < x < 0.35$ профили продольной скорости приобретают немонотонный вид с характерным

максимумом. Эту область течения можно, по-видимому, рассматривать как своеобразный пограничный слой (первый внутренний погранслои), развивающийся под действием как стенки, так и торможения со стороны препятствий (1). Величина локального максимума скорости с ростом x убывает.

Далее $x \approx 0.35$ профили продольной скорости становятся монотонными. Ввиду значительно более сильного, чем в случае отсутствия ЛПШ, торможения потока в областях у стенок, оттеснение жидкости от стенок усиливается, отчего значение предельной скорости на оси достигает значения $U_{осб}^* \approx 2.97$. Эта величина становится теперь функцией числа Рейнольдса, высоты и плотности ЛПШ $U_{осб}^* = f(Re, A, h)$. Для стабилизации профилей $\partial U / \partial x \approx 0$ требуется для данного расчетного случая примерно вдвое большая длина L_x . Ее можно оценить как $L_x \approx 0.80$. Предельный профиль совпадает с профилем (12). Отметим также существенное различие профилей скорости внутри $z \in [0, h] \cup [H - h, H]$ и вне ЛПШ $z \in [h, H - h]$.

Рис. 3,б представляет распределения поперечной скорости $V(x, z)$ в нижней половине канала. Сравнение сплошных линий (ЛПШ с $A = 100$ и $h = 0.3$ присутствует) со штриховыми (ЛПШ отсутствует) иллюстрирует сказанное об оттоке текущей жидкости от стенок к центральной части канала. С удалением от входа в канал профили приближаются к нулевым $V(z) \equiv 0$.

Из рис. 3,в, на котором показано трение поперек течения $\tau(z)$, видно, что ЛПШ существенно

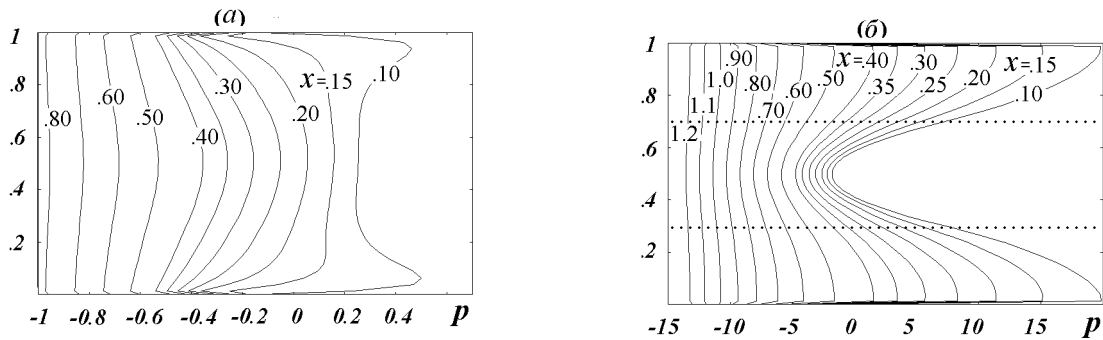


Рис. 4. Распределение давления в потоке с $Re = 10$ в различных поперечных сечениях канала при отсутствии (а) и наличии ЛПШ $A = 100$, $h = 0.3$ (б) (уровни ЛПШ отмечены пунктиром).

изменяет распределение трения. Его предельная форма включает прямолинейный участок в центре канала, свободный от ЛПШ, а внутри ЛПШ совпадает с распределением (14). Имеет место резкий максимум на границе раздела свободного и заторможенного течений $z = h$.

Анализ рис. 3 позволяет высказать предположение, что над и под границей взаимодействия свободного и заторможенного течений $z = h$ развиваются взаимосвязанные пограничные слои (то же относительно границы раздела $z = 1 - h$). Верхний погранслои развивается под действием трения потока о вершину ЛПШ $\tau_h(x) = \frac{1}{Re} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=h}$; с ростом x трение $\tau_h(x)$ стремится к постоянному значению τ_h , вычисляемому по выражению (13). На нижний (второй внутренний) погранслои влияет (дополнительно к $\tau_h(x)$) сила сопротивления (1). Входной участок канала заканчивается (и начинается участок стабилизированного течения), когда первый и второй внутренние погранслои смыкаются, а свободный погранслои от $z = h$ достигает оси канала $z = 0.5$.

Распределение давления в различных поперечных сечениях начального участка канала представлено на рис. 4, а, б ($A = 0$ и $A = 100$ соответственно). Сравнивая эти рисунки, можно заметить, что наличие ЛПШ заметно перераспределяет давление как по характеру, так и по порядку величин: значительный градиент давления направлен от областей торможения жидкости в сторону быстрого течения в центре канала; с удалением от входа давление постепенно приближается к равномерно распределенному и далее, на участке стабилизации, убывает вдоль канала линейно с постоянным градиентом β .

Практическую значимость имеет вопрос о поведении решения при увеличении плотности ЛПШ. Из физических соображений следует, и численное

исследование это подтверждает, что с ростом A течение в слоях ЛПШ становится все более замедленным, и при больших A у стенок возникают слои неподвижной жидкости. Аналитическая оценка глубины ЛПШ, до которой еще проникает кинетическая энергия от быстрого центрального потока, была предложена в [1]. С увеличением A ширина застойных областей возрастает и постепенно охватывает всю толщину ЛПШ $0 \leq z \leq h$ и $H - h \leq z \leq H$, так что движение жидкости целиком сосредотачивается в центральной области канала $h \leq z \leq H - h$. Чем больше число Рейнольдса, тем быстрее наступает "застой".

Другой интересный случай, имеющий практическое значение для фильтрационной очистки жидкости в трубопроводах — когда ЛПШ заполняет все сечение канала как некоторая пористая вставка, $h = 0.5$. Постепенная трансформация распределений продольной скорости в таком течении показана на рис. 5. Характерно, что в таком канале силы внутреннего трения в жидкости играют меньшую роль, чем силы сопротивления препятствий, вследствие чего предельные профили продольной скорости включают участок равномерности тем больший, чем больше Re .

Практическое значение имеет знание длины входного участка канала, на которой происходит стабилизация течения L_x . Эта длина рассчитывалась в ходе численного решения. Результаты представлены на рис. 6 и представляют собой обобщенные зависимости Шлихтинга (8). В данной задаче длина входного участка канала L_x зависит не только от числа Рейнольдса, но и от плотности и высоты ЛПШ A и h . На том же рисунке показано изменение предельной скорости течения на оси канала $U_{ось}^*$ с увеличением плотности ЛПШ для трех чисел Рейнольдса и $h = 0.3$. Эта скорость может

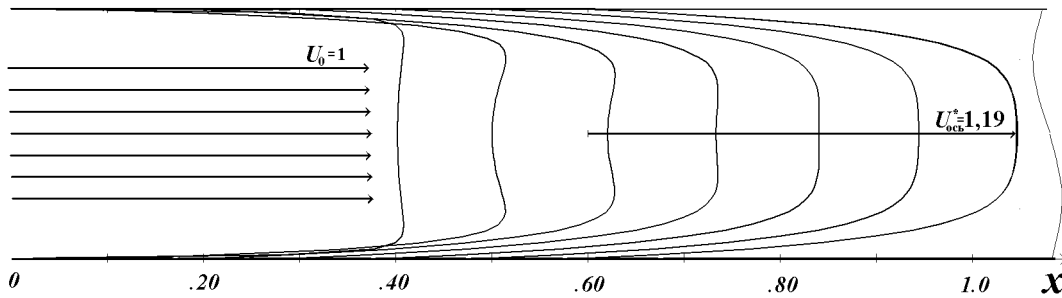


Рис. 5. Трансформация распределений продольной скорости на входе вязкой жидкости $Re = 10$ в плоский канал, полностью заполненный пористой средой плотности $A = 15$ (предельный случай ЛППШ высотой $h = 0.5$)

быть определена по формуле

$$U_{ось}^* = U_h + \frac{1}{2}\beta \cdot Re \cdot \left\{ \frac{1}{4} - h(1-h) \right\}, \quad (17)$$

получающейся из выражения (13) подстановкой $z = 0.5$. Как видим, аналитические и численные результаты хорошо согласуются. Хотя эти три кривые и могут показаться совершенно различными зависимостями от Re и h , предельное рассмотрение при $A \rightarrow \infty$ показывает, что они приходят к единой асимптоте

$$\lim_{A \rightarrow \infty} U_{ось}^*(Re; A, h) = \frac{1,5}{1-2h}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для расчета входа жидкости в напорный канал с ЛППШ в граничном условии у стенок следует учитывать зависимость градиента давления от параметров задачи в виде (15), вытекающую из решения одномерной задачи.

В таком течении сложные эпюры продольной скорости складываются в результате "игры" сил вязкого трения и локального сопротивления элементов ЛППШ.

Получено обобщение зависимости Шлихтинга для длины входного участка канала в зависимости от параметров задачи Re , A и h , графически представленное на рис. 6.

Рассмотренная задача представляет практический интерес для очистки жидкости фильтрами в трубах. Предложенная модель позволяет численно оценивать область значений Re , A и h , при которых допустимо применение приближения пограничного слоя при решении практических задач с ЛППШ [1, 8].

1. Гаев Е.А. Модели легкопроницаемой шероховатости для задач гидромеханики и теплофизики. Дисс.

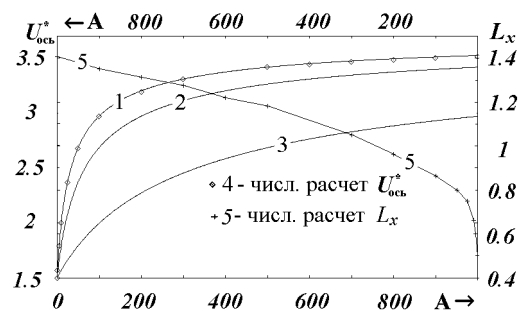


Рис. 6. Максимально достижимая скорость течения на оси канала $U_{ось}^*$ в зависимости от безразмерной плотности ЛППШ A согласно формуле (17) для $h = 0.3$ и чисел Рейнольдса $Re = 10$ (кривая 1), 5 (2), 1 (3) и по численным расчетам ($Re = 10$ и $h = 0.3$; значки 4), а также длина начального участка канала L_x по численным расчетам при $Re = 10$ и $h = 0.3$ (кривая со значками 5)

докт. техн. наук. К.: ИГМ НАН Украины, 2001. – 341 с.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1973.– 847 с.
3. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах.– М.-Л.: Обьед. научн.-техн. изд-во, 1936.– 230 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1969.– 742 с.
5. Тэйлор Т.Д., Ндефо Э. Расчет течений вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления.– Численные методы в механике жидкостей.– М.: Мир.– 1973. с. 218 - 229.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2-х т.– М.: Мир.–1991.
8. Finnigan J. Turbulence in Plant Canopies // Ann. Review Fluid Mech.– 2000.– v. 32.– P. 519 - 571.
9. Сабетта Ф., Пива Э., Джачинто М.Д. Течения Навье-Стокса со взвешенными частицами: математическое моделирование и численные расчеты. – Теор. и прикладн. механика: Труды XIV междунар. конгресса IUTAM.– М.: Мир, 1979. – С. 656 - 683.
10. Shikhaliev S.Z. On one generalization of method of Markets and Cells. // Engineering Simulation.– 1998.– 15.– P. 395 - 406.