

УДК 532.59

СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА ЖИДКИХ СРЕД

О. В. АВРАМЕНКО*, И. Т. СЕЛЕЗОВ**

* Кировоградский государственный педагогический университет, Кировоград

** Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 22.08.2002

Исследуются амплитуды высших гармоник в нелинейных волновых пакетах на поверхности контакта жидких сред с учетом поверхностного натяжения. На основе решения, полученного методом многомасштабных разложений, рассмотрена структура пакетов в симметричной системе "полупространство - полупространство" и в несимметричной системе "слой - полупространство". Установлено, что во второй системе, в отличие от первой, каждое последующее приближение определяет амплитуду соответствующей высшей гармоники лишь приближенно, при этом оно вносит поправки в амплитуду каждой предыдущей гармоники. Решение в третьем приближении обнаруживает существование экстремального значения амплитуд высших гармоник при некоторых значениях длины первой гармоники и толщины слоя. Определена зависимость формы волнового пакета от поверхностного натяжения и соотношения между высотой и длиной первой гармоники.

Досліджуються амплітуди вищих гармонік у нелінійних хвильових пакетах на поверхні контакту рідких середовищ з урахуванням поверхневого натягу. На основі розв'язку, отриманого методом багатомасштабних розвинень, розглянута структура пакетів у симетричній системі "півпростір - півпростір" та у несиметричній системі "шар - півпростір". Встановлено, що у другій системі, на відміну від першої, кожне наступне наближення визначає амплітуду відповідної вищої гармоніки лише наближено, при цьому воно дає поправки до амплітуди кожної попередньої гармоніки. Розв'язок у третьому наближенні виявив існування екстремального значення амплітуд вищих гармонік для деяких значень довжини першої гармоніки та товщини шару. Визначено залежність форми хвильового пакету від поверхневого натягу та співвідношення між висотою та довжиною першої гармоніки.

The amplitudes of higher harmonics in nonlinear wave packages at the interface of two fluids are investigated with accounting of surface tension. The structure of the packages in symmetric system "half-space - half-space" and nonsymmetric system "layer - half-space" is considered on the basis of the solution obtained using the method of multiple scale expansions. It was noted that in the nonsymmetric system all of the next approximation defines amplitude of the corresponding harmonics only approximately, at that it gives corrections to the amplitudes of previous harmonics. The solution in the third approximation revealed existence of the extreme value of higher harmonics amplitude for some length of the first harmonic and the layer thickness. Dependence of the wave packages form on the surface tension and the ratio between height and on length of the first harmonic is determined.

ВВЕДЕНИЕ

Результаты исследований внутренних волн в системах, состоящих из жидкостей с разными плотностями, имеют глобальное значение во многих разделах нелинейной механики и физики, где изучаются волновые процессы в контактирующих средах. Существенное усложнение анализа таких процессов приводит к необходимости исследования влияния высших гармоник.

Общие положения и подходы к физико-математическому моделированию и решению нелинейных волновых задач изложены в [1]. В статьях [2, 3] представлен достаточно полный обзор литературы по проблеме решения методом многомасштабных разложений задач, учитывающих поверхностное натяжение, которое существенно влияет на капиллярно-гравитационные волны, где важен вклад высших гармоник в волновой процесс в целом. Здесь укажем лишь некоторые актуальные работы по изучению внутренних нелинейных волн [4 – 14].

Известно, что уединенные волны на глубокой воде неустойчивы, что впервые было показано в [15], и неустойчивость проявляется как на свободной поверхности, так и на поверхности контакта жидких сред. Внутренние волны могут иметь очень большие амплитуды и, как результат их неустойчивости, они трансформируются в опрокидывающиеся. Это явление в значительной мере влияет на перемешивание верхнего слоя океана, а также на климат Земли в целом.

Последние исследования показали, что неустойчивость волновых пакетов, среди других причин, может объясняться также малыми возмущениями, которые генерируют капиллярно-гравитационные волны, обусловленные поверхностным натяжением. Не случайно все больше публикаций посвящается распространению волновых пакетов в жидких средах с учетом поверхностного натяжения, например [16 – 18].

В то же время понятно, что имеется существенное различие между четко выраженной свободной поверхностью и термоклинном, представляю-

щим собой тонкий слой, в котором поверхностное натяжение может проявляться не так явно. Однако в некоторых лабораторных экспериментах, а также промышленных разработках поверхность контакта может быть достаточно четко определена.

Заметим, что устойчивость двухкомпонентной гидродинамической системы существенно зависит от отношения плотностей $\rho = \rho_2/\rho_1$ (ρ_2 соответствует верхней жидкости, ρ_1 – нижней). Случай, когда отношение плотностей равно нулю $\rho = 0$, соответствует волнам на свободной поверхности, если же $\rho \neq 0$, то рассматриваются внутренние волны на поверхности контакта двух жидкостей. Очевидно, что можно получить уравнение Дыша в случае $\rho \rightarrow 0$ [19] и уравнение Хогана [20] при $\rho \neq 0$. При рассмотрении больших волн в океане в некоторых случаях поверхностным натяжением можно пренебречь, однако для широкого класса экспериментальных исследований двухкомпонентных гидродинамических систем в лабораторных условиях фактор поверхностного натяжения играет значительную роль.

Статья Найфэ [21] содержит обстоятельный анализ волновых движений на поверхности контакта двух полубесконечных жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Аналогичная задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта жидкого полупространства и жидкого слоя над ним изучалась в [22], где обсуждалась проблема устойчивости волновых пакетов в системе "слой - полупространство" методом многомасштабных разложений до третьего порядка, а также в [23] для случая малых частот. Области резонанса второй гармоники в системе "слой - полупространство" описаны в статье [24].

В статьях, опубликованных в последнее время, рассмотрены различные аспекты четвертого приближения проблемы эволюции нелинейных волновых пакетов, такие как эволюционное уравнение при околосубкритических волновых числах [25, 26], эволюционное уравнение при волновых числах, далеких от критического [3, 27, 28], исследование устойчивости решений указанных уравнений [2, 29]. Эти статьи носят теоретический характер, однако полученные в них первые три гармоники, входящие в волновой пакет, дают возможность провести детальный анализ физических явлений, происходящих на поверхности контакта двух гидродинамических сред с различными свойствами. Таким образом, настоящая статья является дальнейшим развитием указанных работ. Ее целью является изучение структуры волнового пакета в условиях, близких к натурным.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Приведем некоторые сведения о физической природе образования и гашения волн на свободной поверхности и на поверхности контакта различных жидких сред с учетом сил поверхностного натяжения.

Физическая граница раздела фаз представляет собой не геометрическую поверхность нулевой толщины, а переходной слой, толщина которого конечна. Внутри этой зоны тензор давления, определенный в гидростатическом смысле, может изменяться, обращаясь в изотропное и постоянное давление внутри каждой фазы. Реальную гидродинамическую систему с плоской границей между фазами можно рассматривать так, как если бы она состояла из двух однородных фаз, разделенных плоской мембраной нулевой толщины, несущей некоторое натяжение, называемое поверхностным. Таким образом вводится механическое определение поверхностного натяжения [30, 31].

Известно также, что величина поверхностного натяжения на поверхности контакта между двумя различными жидкостями определяется средней энергией перевода молекул из "объемного" состояния в "поверхностное", при этом совершается работа против молекулярных сил сцепления [32]. Поверхностное натяжение на границе двух жидкостей понижается с возрастанием взаимной растворимости, таким образом, при повышении температуры наблюдается понижение поверхностного натяжения. Так, на свободной поверхности воды при повышении температуры с 0 до 60°C коэффициент поверхностного натяжения уменьшается с $75.64 \cdot 10^{-3}$ до $66.18 \cdot 10^{-3}$ Н/м, что составляет 12%. Аналогичный результат наблюдается и для других жидкостей.

Отметим, что на поверхностное натяжение весьма сильно влияет электризация тела. При повышении заряда жидкости ее поверхностное натяжение уменьшается, так как электрические заряды вследствие взаимного отталкивания стремятся увеличить поверхность заряженного тела.

Такие факторы, как температура и электризация, меняют поверхностное натяжение на свободной поверхности или поверхности контакта чистых жидкостей. Существенным фактором является наличие в жидкости поверхностно-активных веществ. Например, небольшое содержание поверхностно-активных продуктов окисления углеводов, особенно карбоновых кислот, понижает поверхностное натяжение на поверхно-

сти контакта гидродинамической системы "вода - октан" с $50.8 \cdot 10^{-3}$ до $30 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Происхождение поверхностно-активных пленок в натуральных условиях океана может быть самым разнообразным. Так, в нефтеносных районах моря поверхностно-активные пленки могут возникать благодаря выступлению капель нефти на дне и подъему их вверх. Такие же явления могут возникать позади судов, загрязняющих поверхность моря, а также позади рыбных косяков. В некоторые сезоны источником поверхностно-активных веществ является животный и растительный планктон.

В результате экспериментов [33], проведенных Р.Н.Ивановым и В.В.Шулейкиным, было установлено, что количество энергии волн, которое поглощается пленками, обратно пропорционально квадрату периода волн. Опытным путем подтверждена гипотеза о том, что поглощение энергии обусловлено внутренним трением в самом веществе активной пленки, при этом большое или малое поверхностное натяжение не может влиять на необратимый процесс поглощения энергии волн. Таким образом, в настоящей статье анализируется влияние поверхностного натяжения на структуру волнового пакета на поверхности контакта двух жидких сред, не содержащих примесей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

2.1. Система "полупространство - полупространство"

Распространение волновых пакетов вдоль поверхности контакта двух жидких полупространств с учетом сил поверхностного натяжения описывается слабонелинейной физико-математической моделью, которая в декартовой системе координат x, y, z имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в } \Omega_j, \quad (1)$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{,x} \quad \text{на } z = \eta(x, t), \quad (2)$$

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T (1 + \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx} = 0 \quad \text{на } z = \eta(x, t), \quad (3)$$

$$|\nabla \varphi_1| \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

$$|\nabla \varphi_2| \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

где φ_j ($j = 1, 2$) – потенциалы скоростей в жидких средах; $\eta(x, t)$ – отклонение поверхности контакта от невозмущенного состояния $z = 0$.

В постановку задачи входит также предположение о том, что вдоль поверхности раздела распространяются бегущие волны (приведены в п.

3.1), группирующиеся в волновые пакеты, которые характеризуются своей огибающей и своей скоростью распространения. При распространении волновые пакеты могут быть устойчивыми и неустойчивыми и сильно изменять свою форму вплоть до разрушения.

Гидродинамическая система состоит из нижней полуограниченной жидкости с плотностью ρ_1 – область $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z < 0\}$ и верхней полуограниченной жидкости с плотностью ρ_2 – область $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z > 0\}$, которые разделены поверхностью контакта $z = \eta(x, t)$ переменной формы; $\rho = \rho_1 / \rho_2$ – отношение плотностей нижней и верхней жидкостей. Поверхностное натяжение учтено в виде слагаемого $-T (1 + \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx}$ в динамическом граничном условии (3). Такое выражение следует из известной формулы Лапласа [34], которое определяет давление искривленной поверхности жидкости на внутрилежащую жидкость, обусловленное поверхностным натяжением, как произведение коэффициента поверхностного натяжения T на кривизну поверхности $K = (1 + \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx}$.

Безразмерные величины введены на основе характерной длины L_0 , плотности нижней жидкости ρ_1 , характерного времени $(L_0/g)^{1/2}$, где g – ускорение свободного падения. Безразмерный коэффициент поверхностного натяжения в этом случае определяется соотношением $T^* = T / (L_0^2 \rho_1 g)$ (далее звездочки опущены).

2.2. Система "слой - полупространство"

Распространение волновых пакетов вдоль поверхности контакта жидкого полупространства и слоя в приближении твердой крышки на верхней поверхности описывается аналогично системе "полупространство – полупространство". Остаются неизменными уравнения движения (1) и условия на поверхности контакта (2) и (3), а также условие на бесконечности (4). Условие на твердой крышке, расположенной над жидким слоем $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z < h\}$, имеет вид

$$|\nabla \varphi_{2,z}| = 0 \quad \text{при } z = h. \quad (6)$$

Все введенные в пункте 2.1 для системы "полупространство – полупространство" обозначения и безразмерные переменные сохраняются применительно к системе "слой – полупространство".

2.3. Метод многомасштабных разложений

Для построения приближенных решений задач (1)-(5) применяется метод многомасштабных раз-

ложений [35] по формальному малому безразмерному параметру ϵ , определяющему различные масштабы $x_n = \epsilon^n x$, $t_n = \epsilon^n t$:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^4 \epsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\epsilon^5) \quad (7)$$

$$\phi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^4 \epsilon^n \phi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\epsilon^5). \quad (8)$$

Быстрый масштаб t_0 и короткий масштаб x_0 характеризуют частоту и длину волны соответственно. Медленные масштабы t_1, t_2 и длинные масштабы x_1, x_2 характеризуют временные и пространственные изменения фазы и амплитуды волны.

3. ОТКЛОНЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕТЬЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ

3.1. Система "полупространство – полупространство"

Нелинейная задача (1)-(5) после подстановки в нее выражений (7) и (8) была сведена к четырем линейным задачам относительно η_n и ϕ_{jn} ($n = 1, 2, 3; j = 1, 2$) – неизвестных функций масштабных переменных. Последовательно решая линейные задачи, получены решения в третьем приближении. Так, отклонение свободной поверхности получено в виде суммы

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^3 \eta_3, \quad (9)$$

где

$$\eta_1 = A \exp i\theta + \bar{A} \exp (-i\theta),$$

$$\eta_2 = \Lambda_{22} A^2 \exp 2i\theta + \Lambda_{22} \bar{A}^2 \exp (-2i\theta),$$

$$\eta_3 = \Lambda_{32} \frac{i}{\epsilon} A \frac{\partial A}{\partial x} \exp 2i\theta + \Lambda_{32} \frac{i}{\epsilon} \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \exp (-2i\theta) + \Lambda_{33} A^3 \exp 3i\theta + \Lambda_{33} \bar{A}^3 \exp (-3i\theta),$$

$\theta = kx_0 - \omega t_0; k, \omega$ – волновое число и несущая частота центра волнового пакета; $A(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ и $\bar{A}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3)$ – комплексная огибающая волнового пакета и ее комплексно сопряженная величина. Коэффициенты Λ_{ij} имеют вид

$$\Lambda_{22} = \frac{k(k^2 T + 1 - \rho)(1 - \rho)}{(1 + \rho)(1 - \rho - 2k^2 T)},$$

$$\Lambda_{32} = \frac{[k^4(8T - 10T^2) + k^2(1 - \rho)(8 - 3T) + (1 - \rho)^2](1 - \rho)}{(1 + \rho)(1 - \rho - 2k^2 T)(1 - \rho + 2k^2 T - 4k^2)},$$

$$\Lambda_{33} = \frac{k^2 [C_2 k^4 T^2 + C_1 k^2 T + C_0]}{(1 + \rho)^2 (1 - \rho - 2k^2 T)(1 - \rho - 3k^2 T)},$$

где

$$C_2 = 6 - 20\rho + 6\rho^2,$$

$$C_1 = 21 - 43\rho + 43\rho^2 - 21\rho^3,$$

$$C_0 = 6 - 32\rho + 52\rho^2 - 32\rho^3 + 6\rho^4.$$

Формулу (9) можно записать в виде суммы по степеням ϵ

$$\eta = \epsilon [A \exp i\theta + \bar{A} \exp (-i\theta)] + \epsilon^3 [\Lambda_{33} A^3 \exp 3i\theta + \Lambda_{33} \bar{A}^3 \exp (-3i\theta)] + \epsilon^2 \left[\left(\Lambda_{22} A^2 + \Lambda_{32} i A \frac{\partial A}{\partial x} \right) \exp 2i\theta + \left(\Lambda_{22} \bar{A}^2 - \Lambda_{32} i \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) \exp (-2i\theta) \right]. \quad (10)$$

Известно [3], что эволюционное уравнение огибающей волнового пакета на поверхности контакта двух полубесконечных гидродинамических сред является обобщенным нелинейным уравнением Шредингера

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - \frac{i\omega''}{2!} \cdot A_{,xx} - \frac{\omega'''}{3!} \cdot A_{,xxx} = \frac{-\epsilon^2}{1 + \rho} \times \left\{ i \frac{k}{\omega} A \bar{A} [I A + I' A_{,x}] + \left(\frac{k}{\omega} \right)' I (A^2 \bar{A})_{,x} \right\}, \quad (11)$$

где

$$I = \frac{k^2}{2(1 + \rho)^2 (1 - \rho - 2Tk^2)} \times [(1 - 6\rho + \rho^2) k^4 T^2 + 0.5(1 - 31\rho + 31\rho^2 - \rho^3) k^2 T + 4(1 - 2\rho + 2\rho^2 - 2\rho^3 + \rho^4)].$$

Одним из решений эволюционного уравнения (11) есть функция следующего вида:

$$A(x, \epsilon^2 x, \epsilon^3 x, \epsilon t, \epsilon^2 t, \epsilon^3 t) = a \exp \left(i \epsilon^2 a^2 \frac{k}{\omega} \cdot \frac{I t}{1 + \rho} \right). \quad (12)$$

Подставим выражение (12) в формулу для отклонения свободной поверхности (10) и после преобразований получим сумму трех гармоник с соответствующими амплитудами (здесь все величины безразмерные, звездочки опущены):

$$\eta = 2\epsilon a \cos(kx - \bar{\omega}t) + 2\epsilon^2 a^2 \Lambda_{22} \cos 2(kx - \bar{\omega}t) + 2\epsilon^3 a^3 \Lambda_{33} \cos 3(kx - \bar{\omega}t) + O(\epsilon^4), \quad (13)$$

где частота $\bar{\omega} = \omega - \epsilon^2 a^2 \frac{k}{\omega} \cdot \frac{-1}{(1 + \rho)} I$. Переход к от безразмерных (со звездочками) к размерным (без звездочек) величинам приводит к следующим

выражениям для амплитуд:

$$\text{первой гармоникки } A_1 \equiv 2\varepsilon a^* L = 2\varepsilon a, \quad (14)$$

второй гармоникки

$$A_2 \equiv 2\varepsilon^2 a^{*2} L \Lambda_{22}^* = 2\varepsilon^2 a^2 \frac{k(k^2 T/g + \rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2 - 2k^2 T/g)}, \quad (15)$$

третьей гармоникки

$$A_3 \equiv 2\varepsilon^3 a^{*3} L \Lambda_{33}^* = 2\varepsilon^3 a^3 k^2 [C_2^* k^4 T^2/g^2 + C_1^* k^2 T/g + C_0^*] / [(\rho_1 + \rho_2)^2 (\rho_1 - \rho_2 - 2k^2 T/g) (\rho_1 - \rho_2 - 3k^2 T/g)], \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} C_2^* &= 6\rho_1^2 - 20\rho_1\rho_2 + 6\rho_2^2, \\ C_1^* &= 21\rho_1^3 - 43\rho_1^2\rho_2 + 43\rho_1\rho_2^2 - 21\rho_2^3, \\ C_0^* &= 6\rho_1^4 - 32\rho_1^3\rho_2 + 52\rho_1^2\rho_2^2 - 32\rho_1\rho_2^3 + 6\rho_2^4. \end{aligned}$$

Предположим, что размерная амплитуда первой гармоникки A_1 в n раз меньше ее длины L , тогда $2\varepsilon a = L/n$. Таким образом, малый параметр задается в виде отношения длины первой гармоникки к амплитуде комплексной огибающей a , увеличенной в $2n$ раз, т.е. в виде $\varepsilon = L/(2na)$.

Иследуем так называемые "резонансные области" полученного решения, при которых амплитуды высших гармоник неограниченно возрастают. Знаменатель амплитуды второй гармоникки обращается в нуль при $\rho_1 - \rho_2 - 2k^2 T/g = 0$, третьей при $\rho_1 - \rho_2 - 2k^2 T/g = 0$ и $\rho_1 - \rho_2 - 3k^2 T/g = 0$ и т. д. Очевидно, что все последующие гармоникки будут иметь резонансную область $\rho_1 - \rho_2 - 2k^2 T/g = 0$. Таким образом, в области, близкой к $\rho_1 - \rho_2 - 2k^2 T/g = 0$, для получения точного решения необходимо учитывать значительное количество высших гармоник, каждая из которых имеет большую амплитуду, но общая их сумма соизмерима с решениями в нерезонансных областях. Следовательно, решения в резонансных областях требуют принципиально другого подхода, что необходимо учитывать при исследовании физической структуры решения, полученного методом многомасштабных приближений.

3.2. Система "слой – полупространство"

В результате решения методом многомасштабных разложений задачи (1)–(4), (6) о распространении нелинейных волновых пакетов вдоль поверхности контакта полубесконечной гидродинамической среды и слоя получены решения в третьем приближении. В ходе решения, аналогичного приведенному выше в пункте 3.1, отклонение по-

верхности контакта получено также в виде суммы первых трех слагаемых

$$\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A \exp i\theta + \bar{A} \exp(-i\theta), \\ \eta_2 &= \Lambda_{20} A \bar{A} + \Lambda_{22} A^2 \exp 2i\theta + \Lambda_{22} \bar{A}^2 \exp(-2i\theta), \\ \eta_3 &= \frac{i}{\varepsilon} \left(\Lambda_{30}^{(x)} \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \Lambda_{30}^{(t)} \bar{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \\ &\quad - \frac{i}{\varepsilon} \left(\Lambda_{30}^{(x)} A \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \Lambda_{30}^{(t)} A \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) + \\ &\quad + \frac{i}{\varepsilon} \left(\Lambda_{32}^{(x)} A \frac{\partial A}{\partial x} + \Lambda_{32}^{(t)} A \frac{\partial A}{\partial t} \right) \exp 2i\theta - \\ &\quad - \frac{i}{\varepsilon} \left(\Lambda_{32}^{(x)} \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \Lambda_{32}^{(t)} \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) \exp(-2i\theta) + \\ &\quad + \Lambda_{33} A^3 \exp 3i\theta + \Lambda_{33} \bar{A}^3 \exp(-3i\theta). \end{aligned}$$

Коэффициенты Λ_{ij} были получены в пакете символьных вычислений. Они имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Перепишем формулу (17) в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon [A \exp i\theta + \bar{A} \exp(-i\theta)] + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \Lambda_{20} A \bar{A} + i \left(\Lambda_{30}^{(x)} \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \Lambda_{30}^{(t)} \bar{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \right. \\ &\quad \left. - i \left(\Lambda_{30}^{(x)} A \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \Lambda_{30}^{(t)} A \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\Lambda_{22} A^2 + i \left(\Lambda_{32}^{(x)} A \frac{\partial A}{\partial x} + \Lambda_{32}^{(t)} A \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right] \exp 2i\theta + \right. \\ &\quad \left. + \left[\Lambda_{22} \bar{A}^2 - i \left(\Lambda_{32}^{(x)} \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \Lambda_{32}^{(t)} \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) \right] \exp(-2i\theta) \right\} + \\ &+ \varepsilon^3 [\Lambda_{33} A^3 \exp 3i\theta + \Lambda_{33} \bar{A}^3 \exp(-3i\theta)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Эволюционное уравнение огибающей волнового пакета для системы "слой – полупространство" имеет вид

$$\begin{aligned} A_{,t} + \omega' A_{,x} - \frac{i\omega''}{2!} \cdot A_{,xx} - \frac{\omega'''}{3!} \cdot A_{,xxx} &= \frac{-\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \times \\ &\times \left\{ i \frac{k}{\omega} A \bar{A} [I A + I' A_{,x}] + \left(\frac{k}{\omega} \right)' I (A^2 \bar{A})_{,x} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$I = k^2 \frac{a_3 T^3 k^6 + a_2 T^2 k^4 + a_1 T k^2 + a_0}{b_1 T k^2 + b_0},$$

значения коэффициентов приведены ранее в статье [2].

Рассмотрим одно из решений эволюционного уравнения (19) вида

$$A(\varepsilon x, \varepsilon^2 x, \varepsilon^3 x, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t) = a \exp \left(i \varepsilon^2 a^2 \frac{k}{\omega} \cdot \frac{1}{1 + \rho \operatorname{cth} kh} I t \right). \quad (20)$$

Подставим решение (20) в соотношение (18) и после преобразований получим выражение для отклонения свободной поверхности в виде

$$\begin{aligned} \eta = & \varepsilon^2 a^2 \left[\left(\Lambda_{20} - 2\varepsilon^2 a^2 \frac{k}{\omega} \frac{I \Lambda_{30}^{(t)}}{(1 + \rho \operatorname{cth} kh)} \right) \right] + \\ & + 2\varepsilon a \cos(kx - \bar{\omega}t) + \\ & + 2\varepsilon^2 a^2 \left[\left(\Lambda_{22} - \varepsilon^2 a^2 \frac{k}{\omega} \frac{I \Lambda_{32}^{(t)}}{(1 + \rho \operatorname{cth} kh)} \right) \cos 2(kx - \bar{\omega}t) \right] + \\ & + 2\varepsilon^3 a^3 \Lambda_{33} \cos 3(kx - \bar{\omega}t) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что структура волнового пакета (21) на поверхности контакта полубесконечной среды и слоя конечной толщины существенно отличается от волнового пакета (13) на поверхности контакта двух полуограниченных сред. В симметричной системе "полупространство – полупространство" каждое последующее приближение определяет амплитуду соответствующей высшей гармоники. В более сложной несимметричной системе "слой – полупространство" каждое последующее приближение определяет амплитуду соответствующей высшей гармоники лишь в некотором приближении, при этом оно вносит поправки в амплитуду каждой предыдущей гармоники, кроме первой.

Таким образом, из выражения (21) видно, что наличие слоя конечной толщины во втором приближении обуславливает появление свободного члена (нулевой гармоники) вида $\varepsilon^2 a^2 \Lambda_{20}$ и второй гармоники с амплитудой $2\varepsilon^2 a^2 \Lambda_{22}$. Третье приближение вносит поправку в амплитуду нулевой гармоники $-2\varepsilon^4 a^4 k \omega^{-1} (1 + \rho \operatorname{cth} kh)^{-1} I \Lambda_{30}^{(t)}$, в амплитуду второй гармоники $-2\varepsilon^4 a^4 k \omega^{-1} (1 + \rho \operatorname{cth} kh)^{-1} I \Lambda_{32}^{(t)}$, а также обуславливает появление третьей гармоники с амплитудой $2\varepsilon^3 a^3 \Lambda_{33}$.

Замечания, сделанные в отношении резонансных областей в системе "полупространство – полупространство", справедливы и в системе "слой – полупространство". Отметим, что здесь вторая гармоника неограниченно возрастает при $\rho_1 - \rho_2 \operatorname{cth} kh - 2k^2 T/g = 0$, третья – при $\rho_1 - \rho_2 \operatorname{cth} kh - 2k^2 T/g = 0$ и $\rho_1 - \rho_2 \operatorname{cth} kh - 3k^2 T/g = 0$ и т. д.

4. КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

В ходе интенсивного исследования внутренних волн, начавшегося в 60-х годах с появлением необходимой измерительной техники, обнаружено, что форма внутренних волн может быть самой разнообразной. Длинные внутренние волны имеют почти синусоидальную форму. Иногда, преимущественно на мелководье, внутренние волны имеют форму уединенной волны. Короткие внутренние волны часто имеют форму, отличную от синусоидальной, и распространяются цугами или группами.

Полученное в настоящем исследовании выражение для отклонения свободной поверхности на поверхности контакта двух жидких сред позволяет провести количественный анализ структуры волнового пакета. Особый интерес представляют уточненное значение амплитуды второй гармоники и величина третьей гармоники, которые при некоторых условиях существенно влияют на форму волнового пакета.

Для количественного анализа структуры волнового пакета рассмотрим короткие внутренние волны для различных значений амплитуды первой гармоники при значениях отношений плотностей верхней и нижней жидких сред, близких к натурным встречающимся в океане в термоклине, $\rho = 0.8, 0.85, 0.9$. Как указано в разделе 1, поверхностное натяжение следует брать из интервала от 0.02 до 0.08 Н/м.

Пусть длина первой гармоники $L = 0.568$ м, а отношение длины первой гармоники L к ее амплитуде $A_1 \equiv 2\varepsilon a$ равно $n = 3, \dots, 15$. Тогда значения амплитуды первой гармоники A_1 изменяются в пределах 0.189, ..., 0.038. Малый параметр, введенный формально согласно методу многомасштабных разложений, определяется как $\varepsilon \equiv L/(2na)$. Заметим, что при таком выборе формального параметра ε амплитуды всех гармоник не зависят от значения амплитуды комплексной огибающей a , которую можно задать, например, равной длине первой гармоники $a = L$.

Для определения устойчивости волновых пакетов при различных размерных параметрах обратимся к диаграммам устойчивости, представленным в статье [2]. Зададим коэффициент поверхностного натяжения $T = 0.08$ Н/м и определим длину $L_0 = 0.09$ м, обезразмеривание по которой приводит к безразмерному коэффициенту поверхностного натяжения $T^* \equiv T/(gL_0^2) = 1$. Пусть нижняя жидкость имеет плотность $\rho_1 = 1$ кг/м³, а верхняя $\rho_2 = 0.9$ кг/м³. В этом случае, на-

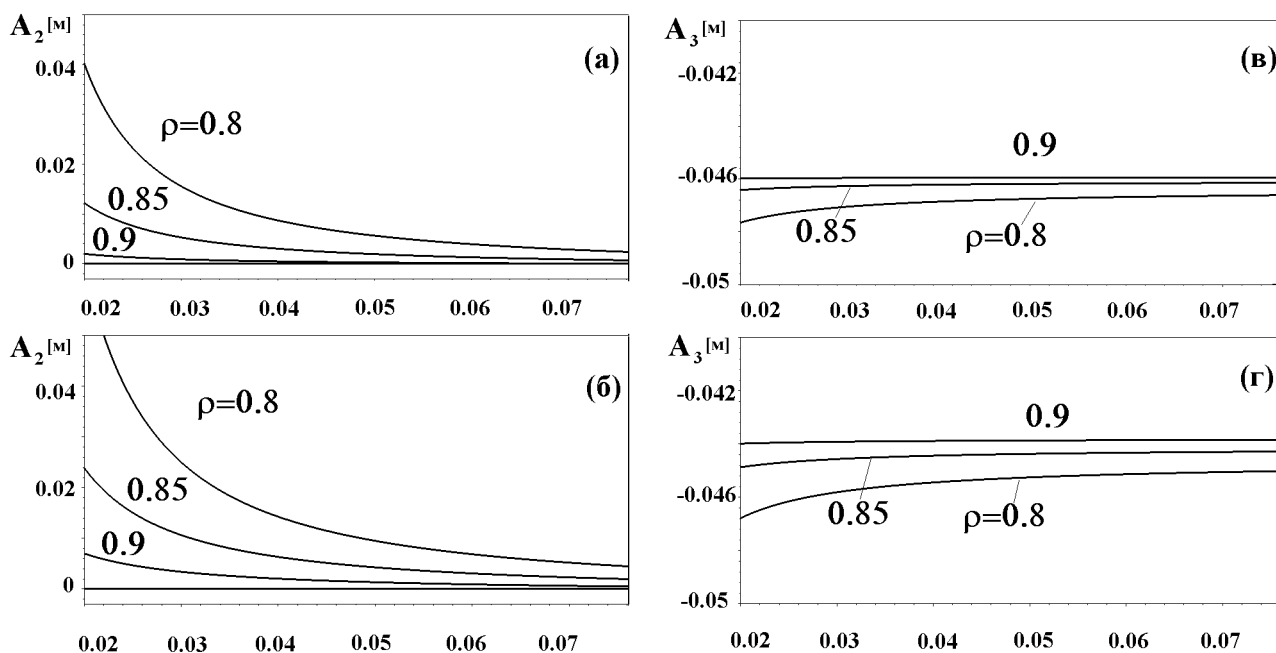


Рис. 1. Зависимость амплитуд второй A_2 и третьей A_3 гармоник от коэффициента поверхностного натяжения T для высоких волн: $L = 0.568$ м, $A_1 = 0.162$ м, $n = 3.5$. Толщина слоя $h = 0.2$ м (а, в); $h = 0.5$ м (б, г)

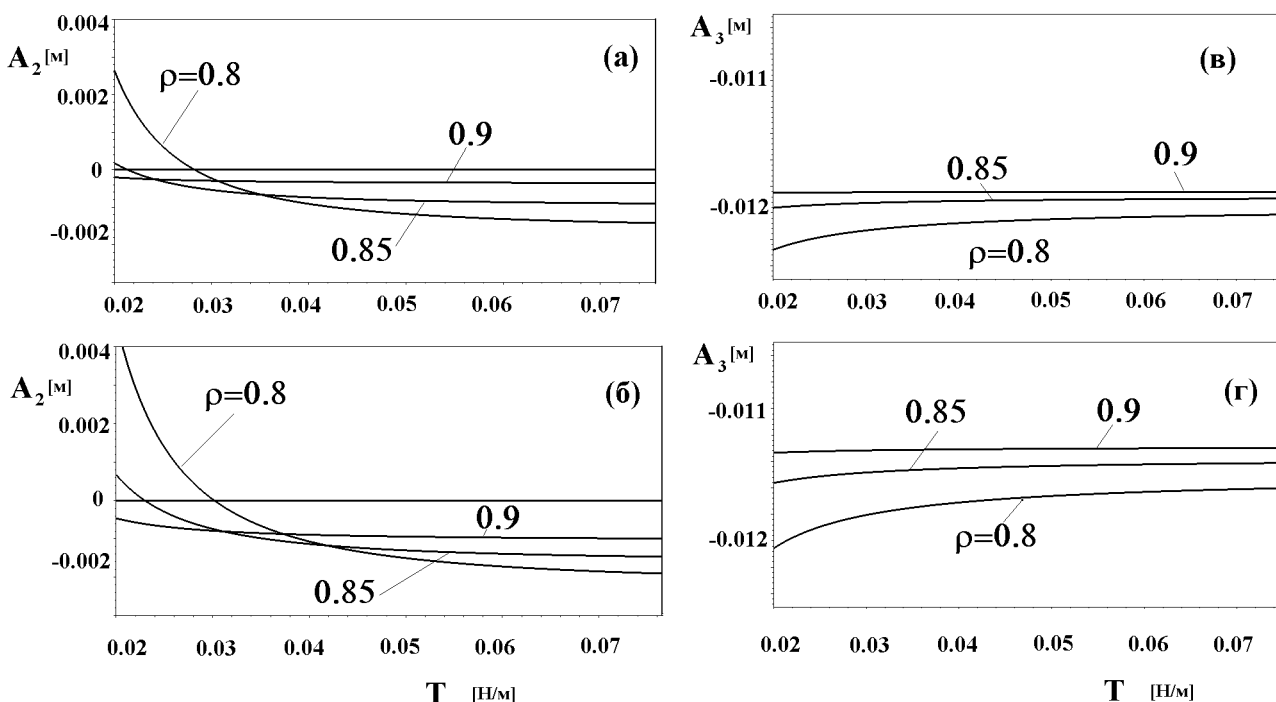


Рис. 2. Зависимость амплитуд второй A_2 и третьей A_3 гармоник от коэффициента поверхностного натяжения T для пологих волн: $L = 0.568$ м, $A_1 = 0.103$ м, $n = 5.5$. Толщина слоя $h = 0.2$ м (а, в); $h = 0.5$ м (б, г)

пример, для волн длиной $L = 0.568$ м точка на диаграмме устойчивости, представленной в статье [2], для безразмерной толщины слоя $h^* = 1$ (или размерной $h = 0.09$ м) имеет координаты

$\rho = 0.9$ и $k \equiv 2\pi L_0/L = 1$, и соответствует области нелинейной устойчивости капиллярно-гравитационных волн. Аналогично, при $T = 0.02$ Н/м величина $L_0 = 0.045$ м дает безраз-

мерную величину $T^* = 1$. Точка на другой диаграмме устойчивости для безразмерной толщины слоя $h^* = 2$ (или размерной $h = 0.09$ м) для волн длиной $L = 0.568$ м имеет координаты $\rho = 0.9$ и $k \equiv 2\pi L_0/L = 0.5$, и также соответствует области устойчивости. Таким образом, исследования структуры пакета, представленные ниже, отвечают устойчивым волновым движениям.

На рис. 1 представлены зависимости амплитуд второй A_2 и третьей A_3 гармоник для поверхностного натяжения T , изменяющегося в пределах от 0.02 до 0.08 Н/м при фиксированной длине волны $L = 0.568$ м и амплитуде первой гармоники $A_1 = L/3.5$, что соответствует крутым волнам. Толщина слоя $h = 0.2$ м (рис. 1, а, в) и $h = 0.5$ м (рис. 1, б, г). На рис. 2 представлены аналогичные зависимости второй и третьей гармоник от поверхностного натяжения для $A_1 = L/5.5$, что соответствует более пологим волнам. Толщина слоя $h = 0.2$ м (рис. 2, а, в) и $h = 0.5$ м (рис. 2, б, г).

Как видно, при малом поверхностном натяжении в случае более крутых волн (рис. 1) амплитуда второй гармоники положительна, а третьей отрицательна, и их абсолютные значения приближенно равны. Следовательно, при малых значениях поверхностного натяжения волновой пакет имеет гребень, несколько заостренный по сравнению с подошвой. При возрастании поверхностного натяжения волновая картина на поверхности контакта сглаживается, так как при этом амплитуда второй гармоники уменьшается, а амплитуда третьей гармоники возрастает незначительно.

Если же волны более пологие с амплитудой первой гармоники $L/5.5$ (рис. 2), то амплитуда второй гармоники отрицательна, однако ее абсолютное значение на два порядка меньше амплитуды первой гармоники. При этом амплитуда третьей гармоники остается отрицательной с меньшим абсолютным значением. Следовательно, пакет имеет незначительно затупленный гребень и чуть заостренную подошву. При возрастании поверхностного натяжения как вторая, так и третья амплитуды медленно стремятся к соответствующим предельным значениям и волновая картина практически не изменяется. Такое явление можно объяснить сильным влиянием поверхностного натяжения по сравнению с силой тяжести, выражающееся в стремлении жидкости сократить свою поверхность, как это происходит, например, в капле жидкости на несмачиваемой поверхности.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуды второй гармоники от толщины слоя в пределах от $h = 0.1$ до 0.5 м, отвечающие различным отношениям длины волны $L = 0.568$ м к амплитуде

первой гармоники, при различных отношениях плотностей $\rho = 0.8, 0.85, 0.9$.

На рис. 3, а-г коэффициент поверхностного натяжения $T = 0.02$ Н/м, а отношение высоты первой гармоники к ее длине $n = 4.5, 5.5, 6.5, 7.5$, соответственно. На рис. 3, д-з $T = 0.08$ Н/м, отношение $n = 3.5, 4, 4.5, 5$. Такой выбор значений отношения высоты первой гармоники к ее длине объясняется тем, что при таких отношениях наблюдаются положительные значения амплитуды второй гармоники при больших толщинах верхнего жидкого слоя и экстремальное значение для малых толщин. Как видно, при малом значении коэффициента поверхностного натяжения положительные амплитуды второй гармоники обнаружены для более пологих волн, чем при большом поверхностном натяжении. Для пологих волн $n > 10$ зависимость второй гармоники от толщины слоя схожа с рис. 3, з, однако значения амплитуды второй гармоники на несколько порядков ниже.

Увеличение отношения плотностей $\rho = 0.8, 0.85, 0.9$, приближающихся к $\rho = 1$, приводит к уменьшению абсолютных значений амплитуд второй гармоники, что физически обусловлено, а также подтверждает достоверность результатов. Аналогично, увеличение отношения плотностей уменьшает также и третью гармонику.

Для малых толщин $h < L/2 = 0.28$ м отмечаются значительные изменения амплитуды второй гармоники, причем при $h \approx 0.15$ м наблюдается экстремум. Заметим, что такая зависимость получена за счет поправок в третьем приближении, в то время как второе приближение наличие экстремума не обнаруживало. Кроме того, третье приближение позволяет учитывать также третью гармонику, амплитуда которой для малых толщин слоя соизмерима с экстремальными значениями амплитуды второй гармоники.

Отметим, что обнаруженная аналитически нулевая гармоника (или свободный член) в системе "слой – полупространство" для толщин $h > L/2$ практически равна нулю. Причем поправка, полученная за счет третьего приближения, значительно уменьшает нулевую гармонику для еще меньших толщин слоя. Таким образом, можно предположить, что суммарный свободный член должен равняться нулю, что отвечает постоянству объема несжимаемой жидкости в верхнем слое.

Еще раз подчеркнем, что представленные здесь результаты соответствуют системе двух жидких сред без примесей, имеющих четко выраженную поверхность контакта. Модель учитывает силы гравитации и поверхностного натяжения, потому хорошо просматривается их влияние. Однако эта

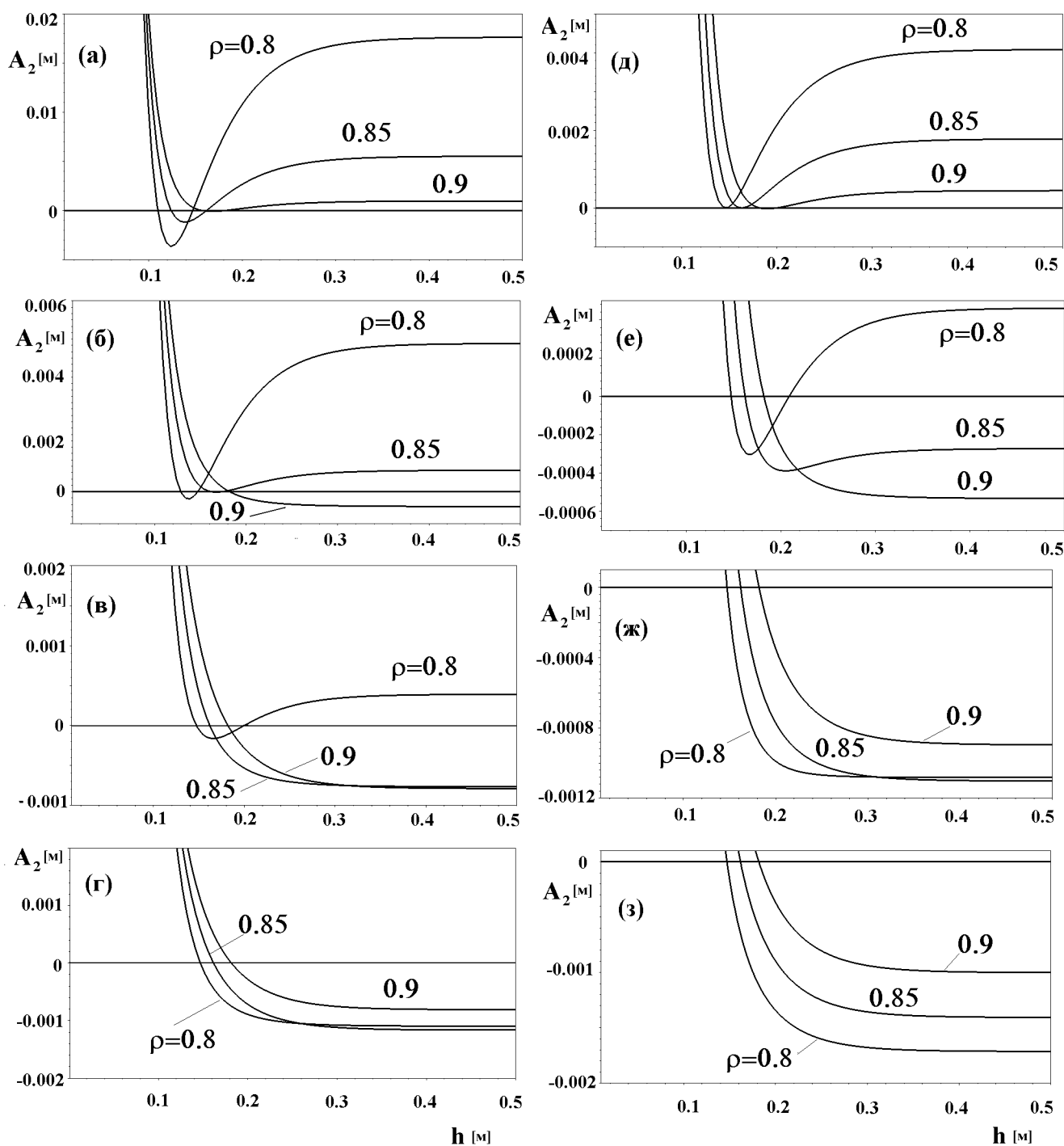


Рис. 3. Зависимость амплитуды второй гармоники волнового пакета от толщины слоя при коэффициенте поверхностного натяжения $T = 0.02$ Н/м (а-г) и $T = 0.08$ Н/м (д-з). Параметры первой гармоники: длина $L = 0.568$ м, амплитуда (а) A_1 : а - 0.126 м; б - 0.103 м; в - 0.087 м; г - 0.076 м; д - 0.162 м; е - 0.142 м; ж - 0.126 м; з - 0.113 м.

модель не может применяться для описания процессов, происходящих при наличии поверхностно-активных пленок, так как здесь не учитывается

поглощение энергии волн за счет внутреннего трения громоздких молекул жирных кислот, которые более чем в сотни раз превышают по своим раз-

мерам молекулы воды. Отметим, что издавна известное явление гашения вторичных волн маслянистыми веществами объясняется именно таким поглощением энергии и потому не описывается настоящей моделью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена нелинейная задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта в гидродинамической системе, состоящей из полуграниченной среды и слоя над ней. Для решения задачи применяется метод многомасштабных разложений до четвертого приближения. Исследуются амплитуды высших гармоник в нелинейных волновых пакетах на поверхности контакта жидких сред с учетом поверхностного натяжения. На основе полученных решений рассмотрена структура пакетов в двух гидродинамических системах. В симметричной системе “полупространство – полупространство” каждое последующее приближение определяет амплитуду соответствующей высшей гармоники. В несимметричной системе “слой – полупространство” каждое последующее приближение определяет амплитуду соответствующей высшей гармоники лишь в некотором приближении, при этом оно вносит поправки в амплитуду каждой предыдущей гармоники.

В случае крутых волн амплитуда второй гармоники положительна, а третьей – отрицательна, следовательно пакет имеет острый гребень и затупленную подошву. Возрастание поверхностного натяжения сглаживает волновую картину. Для пологих волн амплитуды второй и третьей гармоник отрицательны, при этом пакет имеет незначительно затупленный гребень и заостренную подошву, что объясняется сильным влиянием поверхностного натяжения по сравнению с силой тяжести, выражающимся в стремлении жидкости сократить свою поверхность. При возрастании поверхностного натяжения на поверхности контакта для пологих волн волновая картина изменяется незначительно.

Работа выполнена при поддержке INTAS (Грант N₀99-1637) и ГФФИ Украины (Грант N₀01.07/00079.5531).

1. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 200 с.
2. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладная гидромеханика. – 2001. – N4. – С. 38–46.
3. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов в гидродинамической системе “слой-полупространство” с учетом поверхностного натяжения // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, 2. – С. 113–122.
4. Baker G.R. Meiron D.I., Orszag S.A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J.Fluid Mech. – 1982. – 123. – P. 477–501.
5. Bourtos Y.Z., Abl-el-Malex M.B., Tewfick A.H. A format expansion procedure for the internal solitary wave problem in a two-fluid system of constant topography // Acta Mechanica. – 1991. – 88. – P. 172–197.
6. Chen Y., Liu P.L.-F. The unified Kadomtsev - Petviashvily equation for interfacial waves // J.Fluid Mech. – 1995. – 228. – P. 383–408.
7. Choi W., Camassa R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 1996. – 313. – P. 83–103.
8. Holyer J.Y. Large amplitude progressive interfacial waves // J. Fluid Mech. – 1979. – 118 (3). – P. 433–448.
9. Ioualalen M., Kharif C., Roberts A.J. Stability regimes of finite depth short-crested water waves // J. Phys. Okeanography. – 1999. – 29. – P. 2318–2331.
10. Kakutani T., Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid // J. Phis. Soc. Japan. – 1978. – 45, N2. – P. 674–679.
11. Selezov I.T., Huq P. Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with a source // The 2nd European Fluid Mech. Conf., Poland, Warsaw. – 1994
12. Selezov I.T. Some nonlinear wave evolution equations derived by asymptotic-heuristic approach // Int. Conference “Nonlinear Differential Equations”, Ukraine. – Kiev, 1995. – P. 151.
13. Stamp A.P., Jacka M. Deep-water internal solitary waves // J. Fluid Mech. – 1995. – 305. – P. 347–371.
14. Trulsen K. Wave kinematics computed with the nonlinear Schroedinger method for deep water // Trans. ASME. – 1999. – 121. – P. 126–130.
15. Zakcharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // Zh. Prikl. Mech. Tech. Fiz. – 1968. – 9. – P. 86–94. (Transl. in J. Appl. Mech. Techn. Phys. 9 190-194).
16. Bontozoglou V. Weakly nonlinear Kelvin-Helmholz waters between fluids of finite depth // Int. J. Multiphase Flow. – 1991. – 17, N4. – P. 509-518.
17. Dias F., Kharif Ch. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. Part 7. Importance of surface tension effects // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1999. – 31. – P. 301–346.
18. Duncan J.H. Spilling breakers // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2001. – 33. – P. 519-547.
19. Dysthe K.B. Note on a modification to the nonlinear Schroedinger equation for application to deep water waves // Proc. R. Soc. London, Ser. A.369. – London, 1979. – P. 105–114.
20. Hogan S.J. The fourth-order evolution equation for deep-water gravity-capillary waves // Proc. R. Soc. London, Ser. A.402. – London, 1985. – P. 359–372.
21. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1976. – Ser. E, 43, N4. – P. 584–588.
22. Avramenko O. V., Selezov I. T. Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доповіді НАНУ. – 1997. – N10. – P. 61–66.

23. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Нелинейное распространение волновых пакетов при малых частотах // Теорет. и прикл. механика.– 2000.– Вып.31.– С. 151–157.
24. Авраменко О.В. Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісник ХНУ, Сер. "Математика, прикл. математика і механіка".– 2001.– Вып.50.– С. 122–128.
25. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околорезонансных волновых числах // Динамические системы.– 2001.– Вып.17.– С. 58–67.
26. Selezov I., Avramenko O. Some features of nonlinear wave trains propagating in two-layer fluid // Geophysical Research Abstracts, The 26th General Assembly of the European Geophys. Soc., Nice, France, 25-30 March, 2001.– 2001.– 3.– P. 8102.
27. Selezov I., Avramenko O., Kharif C., Trulsen K. Higher asymptotic approximations for nonlinear internal waves in fluid // Int. Conf. "Nonlinear Partial differential equations" Book of abstracts, Kyiv. 22-28 Aug, 2001.– Donetsk, 2001.– P. 105–106.
28. Selezov I., Avramenko O., Mironchuk M., Morozova L. On application of the potential theory in the problems of surface gravity waves // Ukrainian Math. Congress. Abstracts. Int. Conf. on Complex Analysis and Potential Theory, Ukraine, Kyiv, 7-12 Aug. 2001.– Kyiv, 2001.– P. 50-51.
29. Selezov I., Avramenko O. Stability analysis of nonlinear wave trains propagating in two-fluid system // Abstracts, Int. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, 2001, May 22-25.– Kyiv, 2001.– P. 356.
30. Ono S., Kondo S. Molecular theory of tension in liquids.– Berlin-göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1960.– 212 p.
31. Rowlinson J.S., Widom B. Molecular theory of capillarity.– Oxford: Clarendon Press, 1982.– 230 p.
32. Физический энциклопедический словарь.– М.: Советская энциклопедия, 1983.– 298 с.
33. Шулейкин В.В. Очерки о физике моря.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.– 535 с.
34. Телеснин Р.В. Молекулярная физика.– М.: Высшая школа, 1973.– 360 с.
35. Найфэ А. Методы возмущений.– М.: Мир, 1976.– 242 с.