ISSN 1561-9087 Прикладна гiдромеханiка. 2002. Том 4 (76), N 3. С. 59 – 70

УДК 537.84

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ИНВАРИАНТЫ РИМАНА И ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В АНАЛОГЕ МЕТОДА ГОДОГРАФА ЧАПЛЫГИНА–СЕДОВА В МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Н. В. САЛТАНОВ,

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.01.2002

В случае, когда уравнения состояния и интегралы симметрии включают зависимость не только от удельного объема, но и от функций тока, в аналоге метода годографа Чаплыгина–Седова в магнитной газовой динамике введены обобщенные потенциалы, удовлетворяющие линейным уравнениям, через которые в конечном виде выражены координаты x_1 и x_2 и функция тока ψ. В случае гиперболичности основного линейного уравнения теории получены инварианты Римана и уравнения для них. В случае, когда векторы скорости и магнитного поля коллинеарны, получены решения типа простых волн, в которых скорость, напряженность магнитного поля и давление являются функциями только удельного объема. На основе способа, аналогичного способу Л. И. Седова получения класса точных решений с однородными относительными деформациями уравнений однопараметрической нестационарной газовой динамики, рассмотрен весьма общий случай интегрируемости в квадратурах уравнения для переменной "П" в плоскости годографа, аналогичной давлению в классической газовой динамике. Отдельно рассмотрен случай, когда вектор напряженности магнитного поля параллелен выделенной оси.

У випадку, коли рiвняння стану та iнтеграли симетрiї мiстять залежнiсть не тiльки вiд питомого об'єму, але й вiд функцiї току, в аналозi методу Чаплигiна–Сєдова, в магнiтнiй газовiй динамiцi введенi узагальненi потенцiали, що задовольняють лiнiйним рiвнянням, через якi в кiнцевому виглядi виражені координати x_1 i x_2 i функцiя току ψ. У випадку гiперболiчностi основного лiнiйного рiвняння теорiї одержано iнварiанти Рiмана i рiвняння для них. У випадку, коли вектори швидкостi та магнiтного поля колiнеарнi, одержано розв'язок типу простих хвиль, в яких швидкiсть, напруженiсть магнiтного поля та тиск є функцiями тiльки питомого об'єму. На основi способа, який аналогiчний способу Л. I. Сєдова одержання класа точних розв'язкiв з однорiдними вiдносними деформацiями рiвнянь однопараметричної нестацiонарної газової динамiки, розглянутий досить загальний випадок iнтегрованостi в квадратурах рiвняння для змiнної "П" в площинi годографа, аналогiчної тиску в класичнiй газовiй динамiцi. Окремо розглянуто випадок, коли вектор напруженостi магнiтного поля є паралельним вiсi, що видiлена.

In case when the equations of state and the integrals of symmetry involve not only specific volume dependence, but a stream function dependence, too, generalized potentials, that fulfill the linear equations, in which the coordinates x_1 and x_2 and a stream function ψ are expressed, are introduced to analog of Chaplygin–Sedov method of hodograph in magnetic gas dynamics. In case when basic linear equation of theory is hyperbolic the Riman invariants and equations for them are obtained. In case, when vectors of the magnetic field and velocity are collinear, the solutions of simple waves type, where velocity, magnetic field intensity and pressure are the functions of only specific volume, are obtained. On basis of the method, that is analogous to L. I. Sedov method of obtaining of the class of exact solutions with homogeneous relative deformations of single–parametric nonstationary gas dynamics, the very general occasion of integrability in quadratures of the equation for the variable "П" in hodograph plane, that is analogous to pressure in classical gas dynamics, is consideredi. The case is considered, when the magnetic field vector is parallel to the particular axis.

ВВЕДЕНИЕ

При теоретическом изучении стационарных плоских задач газодинамики широко используются преобразования в плоскости годографа [3, 4, 8, 11–16, 20, 22, 24, 25, 33, 35, 40–46, 48, 50]. Впервые их рассматривал П. Моленброк [48] при изучении струйных потенциальных течений. С. А. Чаплыгин [44] существенно развил и усовершенствовал этот метод и использовал для систематического исследования струйных задач газодинамики. Л. И. Седовым [33] получены основные уравнения плоских вихревых движений газа в переменных (p, ψ, Θ), где p – давление, ψ – функция тока, Θ – угол между вектором скорости и осью x. Ю. В. Руднев [20] преобразовал полученные Л. И. Седовым уравнения к более удобному виду и нашел класс вихревых движений, описываемый линейным уравнением и соответствующий потенциальному движению. Квазилинейное в частных производных второго порядка уравнение Л. И. Седова является исходным при анализе вихревых задач. В связи с этим С. В. Валландер [1] рассмотрел квазилинейное уравнение в частных производных второго порядка и получил условия, при которых оно сводится к линейному. Л. В. Овсянников [16] дал инвариантное решение такой задачи. Ю. С. Завьяловым [4] найден класс состояний, допускающих линеаризацию уравнения Л. И. Седова в форме Ю. В. Руднева. Н. В. Салтановым [22, 24, 25] получены основные соотношения метода годографа в газодинамике при наличии источников массы, импульса и энергии. В частности, дано обобщение метода годографа Чаплыгина–Седова. Доказана теорема соответствия, устанавливающая связь между решениями плоских стационарных задач газодинамики при наличии источников и традиционной газодинамики. Приведены весьма общие классы состояний, для которых основное уравнение метода годографа становится линейным. Введены обобщенные, также удовлетворяющие линейным уравнениям, потенциалы, через которые в конечном виде выражены координаты и функция тока. Показано, что условие сводимости основного уравнения метода годографа к линейному является также условием существования волн Римана, в которых вид инвариантов Римана не зависит от решения. В случае простых волн Римана уравнения проинтегрированы в конечном виде.

Изучение одномерных нестационарных течений газа приводит к преобразованию спидографа [11–14, 18, 19, 21–24, 28–32, 35–39, 46, 47], впервые открытого Б. Риманом [18]. Анализ уравнений газодинамики в плоскости спидографа при помощи теории групп Ли и внешних форм Картана выполнен К. П. Суровихиным [39]. К. П. Станюкович [36] нашел весьма общий класс неизэнтропических состояний, для которых выполнимо преобразование в плоскости спидографа. Наиболее общие результаты по преобразованию в плоскости спидографа для неизэнтропических течений получены Г. С. С. Ладфордом [47] с помощью промежуточных интегралов уравнения Монжа–Ампера. Независимо с помощью более простого метода аналогичные результаты получили Н. В. Салтанов и В. С. Ткалич [28]. В работах Н. В. Салтанова [21, 22, 24] получено обобщение метода спидографа в одномерной нестационарной задаче газодинамики при наличии источников. Приведены классы состояний, включающие зависимость как от лагранжевой переменной, так и от времени, для которых основное уравнение метода спидографа становится линейным. Введены обобщенные потенциалы, через которые в конечном виде выражены координата, время и лагранжева переменная. Показано, что условие сводимости основного уравнения метода спидографа к линейному является также условием существования волн Римана, в которых вид инвариантов Римана не зависит от решения. В случае простых волн Римана уравнения проинтегрированы в конечном виде. Указанные результаты обобщают соответствующие результаты К.П. Станюковича [36], Ю. С. Завьялова [4] и Г. С. С. Ладфорда [47]. Отметим, что обобщение метода спидографа и аппарата теории волн Римана на случай, когда давление явным образом зависит как от функции частицы, так и от времени, получено также в более поздней по сравнению с работой Н. В. Салтанова [21] работе К. П. Станюковича [38]. При этом выражение (70) работы [38] для давления может быть получено из более общего выражения (5) работы [21], если в последнем положить $Q = \mathrm{const}W^{-K}$ и ввести затем соответствующие переобозначения.

Плоские задачи магнитной газодинамики во многих аспектах оказываются аналогичными плоским задачам обычной газодинамики. В частности, в них эффективным оказывается применение метода годографа. И. И. Ночевкина [15] использовала метод годографа для исследования вихревых течений в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. И. М. Юрьев [46] исследовал на основе метода годографа вихревые течения в параллельном магнитном поле. Г. И. Назаров [14] систематически исследовал уравнения магнитной газодинамики в двухпараметрическом стационарном случае на основе метода С. Бергмана и решил ряд прикладных задач. В работах В. С. Ткалича [40, 41, 43] выполнено преобразование в плоскости годографа для вихревых течений весьма общей геометрии и исследована структура полей. Найдены случаи линеаризации уравнения вихревых потоков, которые возможны в классе подстановок Валландера–Овсянникова, построены соответствующие линейные уравнения и изучены основные физические свойства таких потоков. Использована аппроксимация [42], позволяющая строить эффективные решения класса задач эллиптического обтекания профилей и получено обобщение формул Чаплыгина и Прандля–Глауэрта.

Преобразование в плоскости спидографа в магнитной газодинамике впервые выполнено С. А. Капланом и К. П. Станюковичем [6]. Н. В. Салтановым и В. С. Ткаличем [28] получено преобразование спидографа в магнитной газодинамике при весьма произвольном характере зависимости давления от функции частицы. Общие решения уравнений магнитной газодинамики для одномерных нестационарных и плоских стационарных течений в плоскости спидографа и годографа, соответственно, для некоторых классов состояний получены в работе Г. С. Голицына, Т. Джузумкулова и К. П. Станюковича [3]. В работах Н. В. Салтанова и В. С. Ткалича [29–32] изучена нестационарная релятивистская задача газодинамики и магнитной газодинамики при наличии двух циклических координат x_2 и x_3. Найден полный набор интегралов симметрии и с их помощью исходные уравнения преобразованы к системе двух скалярных уравнений для определения первой компоненты скорости U_1 и полного давления P (суммы газодинамического и магнитного). Совершен переход к независимым переменным (P, Θ), где $\Theta = \operatorname{arth}[U_1(1+\vec{U}^2)^{-1/2}]$, $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$ – отнесенный к скорости света вектор скорости в лабораторной системе отсчета. В результате для функции частицы ψ получено квазилинейное уравнение в частных производных второго порядка, с точностью до обозначений совпадающее с уравнением Л. И. Седова в форме Ю. В. Руднева для функции тока ψ плоских стационарных течений обычного газа [20, 33]. Записаны уравнения состояния, при которых задача сводится к решению линейного однородного уравнения в частных производных второго порядка. Получены соотношения для инвариантов Римана и скоростей распространения возмущений. Введены обобщенные потенциалы, также удовлетворяющие линейным однородным уравнениям в частных производных второго порядка, через которые физические величины выражаются в конечном виде. Получены и проанализированы соотношения для особых решений (простых волн). Проведен переход к нерелятивистскому случаю.

Целью данной работы является:

– введение в аналоге метода годографа двухпараметрической стационарной задачи магнитной газодиамики обобщенных потенциалов, через которые физические величины выражаются в явном виде;

– получение выражений для инвариантов Римана в случае гиперболичности основного уравнения теории;

– получение решений типа простых волн;

– отыскание в квадратурах решения уравнения для независимой переменной в плоскости годографа на основе способа, аналогичного способу Л. И. Седова [34] получения класса точных решений с однородными относительными деформациями уравнений однопараметрической нестационарной задачи газовой динамики.

1. ИНТЕГРАЛЫ СИММЕТРИИ

Обратимся к системе уравнений магнитной газодинамики в стационарном случае [10]:

$$\nabla\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{\bar{V}}{\rho_0}\nabla p = \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v} - $$
$$-V_{0\pi}\bar{V}\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H},$$
$$\operatorname{div}\frac{\vec{v}}{\bar{V}} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0,$$
$$\operatorname{div}\frac{s\vec{v}}{\bar{V}} = 0, \qquad c\nabla\Phi = \vec{v}\times\vec{H},$$
$$\bar{V}\equiv\frac{\rho_0}{\rho}, \qquad V_{0\pi}\equiv\frac{1}{4\pi\rho_0}. \tag{1}$$

Здесь $\vec{v}$ – скорость, $\vec{H}$ – магнитное поле, ρ – плотность, ρ_0 – ее характерное значение, $\bar{V}$ – безразмерный удельный объем, p – давление, s – энтропия единицы массы газа, Φ – потенциал электрического поля, c – скорость света. При этом в адиабатическом и изотермическом случаях соответственно

$$p = \frac{p_*(s)}{\bar{V}^\gamma}; \qquad p = \frac{p_0}{\bar{V}}, \qquad p_0 = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Здесь $p_*(s)$ – некоторая заданная функция своего аргумента, γ – показатель адиабаты.

Рассмотрение будем проводить в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3). Пусть физические величины не зависят от координаты $x_3 (\partial/\partial x_3 = 0)$. Тогда решения уравнений неразрывности и соленоидальности магнитного поля (1) представим в виде

$$\vec{v} = \bar{V}\nabla\psi\times\vec{e}_3 + v_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{H} = \nabla A\times\vec{e}_3 + H_3\vec{e}_3. \tag{3}$$

Здесь ψ – функция тока, A – ее магнитный аналог, v_3 и H_3 – три компоненты скорости и магнитного поля, $\vec{e}_3$ – единичный вектор в направлении оси x_3. Подставляя соотношения (3) в условие сохранения энтропии, в уравнение электрической индукции и в третью компоненту уравнения движения (1), получаем [43, 49]:

$$\frac{\partial(\psi, s)}{\partial(x_1, x_2)} = 0, \quad \frac{\partial(\psi, A)}{\partial(x_1, x_2)} = 0,$$
$$\frac{\partial(\psi, v_3)}{\partial(x_1, x_2)} - V_{0\pi}\frac{\partial(A, H_3)}{\partial(x_1, x_2)} = 0,$$
$$c\nabla\Phi = v_3\nabla A - \bar{V}H_3\nabla\psi. \tag{4}$$

Общее решение уравнений (4) имеет следующий вид:

$$v_3 = \frac{1}{D}(\bar{V}w_3 - cV_{0\pi}\Phi' A'),$$
$$H_3 = \frac{1}{D}(A' w_3 - c\Phi'),$$
$$s = s(\psi), \qquad A = A(\psi), \qquad \Phi = \Phi(\psi),$$
$$w_3 = w_3(\psi), \qquad D = \bar{V} - V_{0\pi}(A')^2 \neq 0. \tag{5}$$

Здесь величины s, A, Φ и w_3 являются произвольными функциями своего аргумента. Штрих всюду означает дифференцирование величин по своему аргументу. Соотношения (5) представляют собой интегралы симметрии для рассматриваемой задачи [43, 49]. Отметим, что набор интегралов симметрии (5) аналогичен набору интегралов симметрии в нестационарной однопараметрической задаче релятивистской магнитной газодинамики [30–32].

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДЕЛЬНОГО ОБЪЕМА И ФУНКЦИИ ТОКА

С учетом соотношений (3) и (5) первую и вторую компоненты уравнения движения (1) запишем в следующем виде:

$$\nabla\left[\frac{(\bar V\nabla\psi)^2}{2}\right]+\frac{\bar V}{\rho_0}\nabla P=$$

$$=\bar V(\bar V\Delta\psi-V_{0\pi}A^{'}\Delta A+$$

$$+\nabla\psi\cdot\nabla\bar V)\nabla\psi,\qquad P=p+\frac{H_3^2}{8\pi}. \tag{6}$$

Введем следующую функцию E:

$$E(\bar V,\psi)=E_0(\psi)+E_p(\bar V,\psi)-$$

$$-V_{0\pi}\frac{(aw_3-cb)^2}{\bar V-V_{0\pi}a^2}-\frac{V_{0\pi}^2a^2}{2}\frac{(aw_3-cb)^2}{(\bar V-V_{0\pi}a^2)^2},$$

$$E_p(\bar V,\psi)\equiv-\frac{1}{\rho_0}\int\bar V\frac{\partial p(\bar V,\psi)}{\partial\bar V}d\bar V,$$

$$a\equiv A^{'},\quad b\equiv\Phi^{'}. \tag{7}$$

Здесь $E_0(\psi)$ – произвольная функция своего аргумента. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться в том, что функция E удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial E(\bar V,\psi)}{\partial\bar V}=-\frac{1}{\rho_0}\bar V\frac{\partial P(\bar V,\psi)}{\partial\bar V},$$

$$P(\bar V,\psi)=p(\bar V,\psi)+\frac{1}{8\pi}\frac{(aw_3-cb)^2}{(\bar V-V_{0\pi}a^2)^2}. \tag{8}$$

С учетом соотношения (8) из уравнения (6) следует

$$\frac{1}{2}(\bar V\nabla\psi)^2=E(\bar V,\psi), \tag{9}$$

$$\bar V\Bigg[\bar V\Delta\psi-V_{0\pi}a\Delta A+\nabla\psi\cdot\nabla\bar V-$$

$$-\frac{\partial P(\bar V,\psi)}{\rho_0\partial\psi}\Bigg]=\frac{\partial E(\bar V,\psi)}{\partial\psi}. \tag{10}$$

Соотношение (9) есть аналог интеграла Бернулли, причем величина E имеет физический смысл кинетической энергии единицы массы газа в поперечном к оси x_3 движении. Соотношение (10) является обобщением уравнения для вихрей.

Таким образом, двухпараметрическая стационарная задача идеальной магнитной газодинамики с учетом интегралов симметрии (5) преобразована к системе нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (9) и нелинейного уравнения в частных производных второго порядка (10), служащей для определения удельного объема $\bar V$ и функции тока ψ. Отметим, что это преобразование в определенной мере аналогично соответствующему преобразованию на основе интегралов симметрии уравнений нестационарной однопараметрической задачи релятивистской магнитной газодинамики [30–32].

3. АНАЛОГ МЕТОДА ГОДОГРАФА ЧАПЛЫГИНА–СЕДОВА

Систему (9) и (10) представим в виде

$$\mathrm{div}(D\nabla\psi)+\gamma=0,$$

$$D=\bar V-V_{0\pi}a^2,$$

$$\gamma=\left(\frac{2V_{0\pi}aa^{'}}{\bar V^2}-\frac{\partial}{\bar V\partial\psi}\right)E-\frac{\partial P}{\rho_0\partial\psi}; \tag{11}$$

$$(\nabla\psi)^2=(2E/\bar V^2). \tag{12}$$

Здесь дифференцирование по ψ проводится при постоянном "$\bar V$". Величина "a" определяется согласно сотношению (7). В случае плоских движений в обычной газодинамике ($w_3=0,a=0,b=0$) величина D есть безразмерный удельный объем ($D=\bar V$), γ – третья компонента вихря скорости $\Big(\gamma=-\left[(\partial E/\bar V\partial\psi)+(\partial p/\rho_0\partial\psi)\right]\Big)$.

Введем вспомогательную переменную Π, удовлетворяющую условию $[\partial(\Pi,\psi)/\partial(x_1,x_2)]\neq0$. Рассматривая величину D как функцию переменных Π и ψ, с учетом соотношения (12) уравнение (11) запишем в виде

$$D\Delta\psi+\frac{\partial D}{\partial\Pi}\nabla\psi\cdot\nabla\Pi+$$

$$+2\frac{\partial D}{\partial\psi}\frac{E}{\bar V^2}+\gamma=0. \tag{13}$$

Далее введем новые независимые переменные (Π,ψ):

$$J\equiv\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\Pi,\psi)};\quad J\neq0,\quad J\neq\propto. \tag{14}$$

В этих переменных уравнения (12) и (13) преобразуем к следующему виду:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \Pi}\right)^2 = \frac{2J^2E}{\bar{V}^2}, \qquad (15)$$

$$-\frac{1}{J}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{J}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \Pi}+$$

$$+D\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{E}{\bar{V}^2}+2\frac{\partial D}{\partial \psi}\frac{E}{\bar{V}^2}+\gamma=0. \qquad (16)$$

Пусть сумма трех последних слагаемых в уравнении (16) равна нулю,

$$D\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{E}{\bar{V}^2}+2\frac{\partial D}{\partial \psi}\frac{E}{\bar{V}^2}+\gamma=0. \qquad (17)$$

Тогда из уравнения (16) следует

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{J}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \Pi}=0. \qquad (18)$$

Уравнение (17) запишем более компактно:

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{D^2E}{\bar{V}^2}+D\gamma=0. \qquad (19)$$

Напомним, что в соотношениях (13)–(19) дифференцирование по Π и ψ проводится при постоянных ψ и Π соответственно.

Учитывая в уравнении (19) выражение (11) для величины γ и переходя в получившемся соотношении к независимым переменным $(\bar{V},\psi)$, для определения функции $\Pi(\bar{V},\psi)$ получаем следующее линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\bar{V}^2}{\rho_0}P+V_{0\pi}a^2E\right)\right]\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{V}}+$$

$$+\left[\left(\frac{2V_{0\pi}a^2}{\bar{V}}+D\frac{\partial}{\partial \bar{V}}\right)E\right]\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}=0. \qquad (20)$$

Характеристическое уравнение [5, 9], соответствующее уравнению (20), имеет вид

$$\frac{d\bar{V}}{d\psi}=\frac{\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\bar{V}^2}{\rho_0}P+V_{0\pi}a^2E\right)}{\left(\frac{2V_{0\pi}a^2}{\bar{V}}+D\frac{\partial}{\partial \bar{V}}\right)E}. \qquad (21)$$

Пусть

$$I(\bar{V},\psi)=C, \qquad (22)$$

где C – постоянная, есть интеграл этого характеристического уравнения. Тогда общее решение уравнения (20) таково [5, 9]:

$$\Pi=\Pi[I(\bar{V},\psi)]. \qquad (23)$$

Решая соотношение (23) относительно удельного объема, находим

$$\bar{V}=\bar{V}(\Pi,\psi). \qquad (24)$$

Подставляя зависимость (24) в выражения (7) и (11) для величин E, D и γ, будем иметь

$$E=E(\Pi,\psi), \quad D=D(\Pi,\psi), \quad \gamma=\gamma(\Pi,\psi). \qquad (25)$$

Решение уравнения (15) представим в виде

$$\frac{\partial z}{\partial \Pi}=\frac{Jq}{D}e^{i\Theta}, \quad \frac{q}{D}=\frac{\sqrt{2E}}{\bar{V}}, \quad z=x_1+ix_2, \qquad (26)$$

где i – мнимая единица, Θ – угловая переменная. Используя связь (26) в соотношениях (14) и (18), соответственно получаем

$$-\sin\Theta\frac{\partial x_1}{\partial \psi}+\cos\Theta\frac{\partial x_2}{\partial \psi}=\frac{D}{q},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Pi}q\cos\Theta\right)\frac{\partial x_1}{\partial \psi}+\left(\frac{\partial}{\partial \Pi}q\sin\Theta\right)\frac{\partial x_2}{\partial \psi}=0. \qquad (27)$$

Полагая определитель системы (27) отличным от нуля $\Big((\partial q/\partial \Pi)\neq 0\Big)$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial \psi}=\frac{iD}{q\partial q/\partial \Pi}\frac{\partial}{\partial \Pi}\left(qe^{i\Theta}\right). \qquad (28)$$

Из соотношения (26) следует связь

$$\sin\Theta\frac{\partial x_1}{\partial \Pi}-\cos\Theta\frac{\partial x_2}{\partial \Pi}=0. \qquad (29)$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения (29) по ψ, при $(\partial\Theta/\partial\psi)\neq 0$ с помощью соотношения (28) находим

$$\cos\Theta\frac{\partial x_1}{\partial \Pi}+\sin\Theta\frac{\partial x_2}{\partial \Pi}=$$

$$=\frac{1}{\partial\Theta/\partial\psi}\left[\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{q}-\frac{D}{\partial q/\partial \Pi}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Pi}\right)^2\right]. \qquad (30)$$

Решая систему уравнений (29) и (30) относительно производных по Π от координат x_1 и x_2, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \Pi}=\frac{e^{i\Theta}}{\partial\Theta/\partial\psi}\left[\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{q}-\frac{D}{\partial q/\partial \Pi}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Pi}\right)^2\right]. \qquad (31)$$

Преобразуя систему уравнений (28) и (31), запишем

$$\frac{\partial z}{\partial \Pi}=e^{i\Theta}\left[\frac{iD}{q}\frac{\partial \psi}{\partial \Pi}+\left(\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{q}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right], \qquad (32)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Theta} = e^{i\Theta}\left[\frac{iD}{q}\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + \frac{D}{\partial q/\partial \Pi}\frac{\partial \psi}{\partial \Pi}\right]. \qquad (33)$$

Здесь дифференцирование функции тока ψ по переменным Π и Θ проводится при постоянных Θ и Π соответственно. Дифференцирование величин D и q по переменной Π проводится при постоянной функции тока ψ. Условие разрешимости системы уравнений (32) и (33) таково:

$$\frac{D}{\partial q/\partial \Pi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Pi^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{\partial q/\partial \Pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{q}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \Pi} + \left(\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{D}{\partial q/\partial \Pi}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \Pi}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{D}{q}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \Pi}\frac{D}{q}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}\right)^2. \qquad (34)$$

Здесь, как и в системе уравнений (32) и (33), дифференцирование функции тока ψ по переменным Π и Θ проводится при постоянных Θ и Π соответственно. Дифференцирование величин D и q по переменным Π и ψ проводится при постоянных ψ и Π соответственно. Соотношение (34) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, служащее для определения функции тока $\psi(\Pi, \Theta)$. Оно является обобщением уравнения Л. И. Седова в форме Ю. В. Руднева обычной газовой динамики [20, 33, 43].

4. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Исследованию основных уравнений плоских стационарных задач газодинамики и магнитной газодинамики в плоскости годографа посвящены работы Л. И. Седова, Ю. В. Руднева, Л. В. Овсянникова, Ю. С. Завьялова, И. И. Ночевкиной, И. М. Юрьева, В. С. Ткалича, Г. С. Голицына, Т. Джузумкулова, С. А. Каплана, Г. И. Назарова, К. П. Станюковича и ряда других авторов. Используя класс подстановок Валландера–Овсянникова [1, 16, 43], можно получить, что уравнение (34) сводится к линейному при следующей специализации величин q и D:

$$q = \kappa\frac{\partial m\varepsilon}{\partial \psi}, \qquad D = -\frac{\kappa n}{2}\frac{\partial}{\partial \Pi}\left(\frac{\partial m\varepsilon}{\partial \psi}\right)^2, \qquad (35)$$

$$\varepsilon = \alpha(\psi) + \beta(\psi)\int\frac{d\Pi}{m^2 n}. \qquad (36)$$

Здесь величины $m(\Pi)$, $n(\Pi)$, $\kappa(\psi)$, $\alpha(\psi)$ и $\beta(\psi)$ произвольным образом зависят от своих аргументов. Дифференцирование по ψ и Π проводится при постоянных Π и ψ соответственно. Подставляя выражения (35) и (36) в соотношения (32) и (33), имеем

$$\frac{\partial Z}{\partial \Pi} = -e^{i\Theta}\left(im'n\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Pi} + \frac{dm'n}{d\Pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Theta}\right), \qquad (37)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \Theta} = -e^{i\Theta}\left(im'n\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Theta} + mn\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Pi}\right), \qquad (38)$$

$$Z = z + \frac{i\beta}{m}e^{i\Theta}. \qquad (39)$$

Здесь дифференцирование по Π и Θ проводится при постоянных Θ и Π соответственно. Требование разрешимости системы уравнений (37) и (38) относительно Z приводит к следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Pi}m^2 n\frac{\partial}{\partial \Pi} - m\frac{dm'n}{d\Pi}\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}\right)\varepsilon = 0. \qquad (40)$$

Соотношение (40) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных второго порядка, служащее для определения функции ε.

Преобразуя уравнение (37), запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \Pi}\left(Ze^{-i\Theta} + i\nu\varepsilon e^{-i\Theta}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\nu'\varepsilon e^{-i\Theta}\right) = 0, \qquad \nu = m'n. \qquad (41)$$

Решая уравнение (41), вводим обобщенный потенциал S:

$$Z = -\nu e^{i\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial \Theta} + i\frac{\nu}{\nu'}\frac{\partial}{\partial \Pi}\right)S,$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\nu}{\nu'}\frac{\partial}{\partial \Pi}\right)S. \qquad (42)$$

Подставляя затем выражения (42) в уравнение (38), получаем уравнение для определения обобщенного потенциала S:

$$\left[\frac{m}{m'}\frac{\partial}{\partial \Pi}\frac{\nu}{\nu'}\frac{\partial}{\partial \Pi} + \left(\frac{m}{m'} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\nu}{\nu'}\right)\frac{\partial}{\partial \Pi} - \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}\right]S = 0. \qquad (43)$$

Если функция $S(\Pi, \Theta)$ найдена, то с помощью выражений (36), (39) и (42) можно определить величины ψ и z в функциях аргументов Π и Θ. Полагая в соотношениях (42) и (43) $n = 1$, имеем

$$Z = -e^{i\Theta}\left[m'\frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{i(m')^2}{m''}\frac{\partial}{\partial \Pi}\right]S,$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{m'}{m''}\frac{\partial}{\partial\Pi}\right)S,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\Pi}\frac{m(m')^2}{m''}\frac{\partial}{\partial\Pi} - (m')^2\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right]S = 0. \qquad (44)$$

Соотношения (44) аналогичны соотношениям (14.99) и (14.100) монографии автора [24], описывающим в переменных годографа плоские стационарные течения газа при наличии источников массы, импульса и энергии.

Преобразовав уравнение (38), придадим ему следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial\Pi}\left(m\varepsilon e^{i\Theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{Z}{n} + im'\varepsilon e^{i\Theta}\right) = 0. \qquad (45)$$

Решая уравнение (45), вводим обобщенный потенциал T:

$$Z = ne^{i\Theta}\left[\left(i - \frac{\partial}{\partial\Theta}\right)\frac{\partial}{\partial\Pi} - \frac{im'}{m}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)\right]mT, \quad (46)$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)T. \qquad (47)$$

Подставляя затем выражения (46) и (47) в уравнение (37), получаем уравнение для определения обобщенного потенциала T:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Pi}m^2n\frac{\partial}{\partial\Pi} - m\frac{dm'n}{d\Pi}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)T = 0. \qquad (48)$$

Сравнивая уравнения (40) и (48), можно видеть, что их дифференциальные операторы тождественны. Если функция $T(\Pi, \Theta)$ найдена, то с помощью выражений (36), (39), (46) и (47) можно определить величины ψ и z в функции аргументов Π и Θ. Полагая в соотношениях (46) и (48) $n = 1$, будем иметь

$$Z = e^{i\Theta}\left[\left(i - \frac{\partial}{\partial\Theta}\right)\frac{\partial}{\partial\Pi} - \frac{im'}{m}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)\right]mT,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Pi}m^2\frac{\partial}{\partial\Pi} - mm''\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)T = 0. \qquad (49)$$

Выражение (47) при этом не меняет своего вида. Соотношения (47) и (49) аналогичны соотношениям (14.102) и (14.103) монографии автора [24], описывающим как и соотношения (14.99) и (14.100) в переменных годографа плоские стационарные течения газа при наличии источников массы, импульса и энергии.

Отметим, что в последнее время концепция обобщенных потенциалов в различных математических моделях рассматривалась и использовалась в работах [2, 7, 17, 26, 27] и ряде других.

5. ИНВАРИАНТЫ РИМАНА

Обратимся к уравнению (48) для обобщенного потенциала T. Решая его, вводим вспомогательный обобщенный потенциал Ω:

$$m^2n\frac{\partial T}{\partial\Pi} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Theta},$$

$$m\nu'\frac{\partial T}{\partial\Theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}. \qquad (50)$$

Здесь величина ν определяется согласно соотношения (41). Пусть

$$J_1 = \frac{\partial(\Pi, \Theta)}{\partial(T, \Omega)}, \qquad 0 < J_1 < \infty. \qquad (51)$$

Переходя тогда в системе уравнений (50) к новым независимым переменным (T, Ω), запишем

$$m^2n\frac{\partial\Theta}{\partial\Omega} = \frac{\partial\Pi}{\partial T},$$

$$m\nu'\frac{\partial\Pi}{\partial\Omega} = \frac{\partial\Theta}{\partial T}. \qquad (52)$$

Пусть система уравнений (52) является гиперболической, $\mathrm{sign}(mn\nu') = 1$. Умножим тогда второе из уравнений этой системы на $(m^3n\nu')^{-1/2}$ и прибавим (или вычтем) полученное уравнение к первому из уравнений (52). В результате получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial\Omega} \mp (m^3n\nu')^{-1/2}\frac{\partial}{\partial T}\right]I_\pm = 0,$$

$$I_\pm = \Theta \pm \mathrm{sign}(m\nu')\int\sqrt{\frac{\nu'}{mn}}d\Pi. \qquad (53)$$

Величины $I_\pm$ и являются искомыми инвариантами Римана. Пусть $n = 1$. Тогда соотношения (53) упрощаются и принимают вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial\Omega} \mp \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{m}{m''}}\frac{\partial}{\partial T}\right]I_\pm = 0,$$

$$I_\pm = \Theta \pm \int\sqrt{\frac{m''}{m}}d\Pi. \qquad (54)$$

Отметим, что инварианты Римана (54) аналогичны инвариантам Римана (14.77) монографии автора [24], описывающим плоские стационарные течения газа при наличии источников массы, импульса и энергии.

6. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

Пусть выполнены условия

$$A'(\psi) \equiv a(\psi) = a_0 = \text{const} \neq 0,$$

$$\Phi' \equiv b(\psi) = 0, \qquad w_3(\psi) = w_{30} = \text{const}. \qquad (55)$$

Тогда из условий (55) и выражений (3) следует, что векторы скорости и магнитного поля коллинеарны:

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \frac{w_{30}\bar{V}}{D_0}\vec{e}_3, \qquad \vec{H} = \frac{a_0}{\bar{V}}\vec{v},$$

$$D_0 \equiv \bar{V} - \bar{V}_m, \qquad \bar{V}_m \equiv V_{0\pi}a_0^2. \qquad (56)$$

Здесь $\vec{v}_\perp$ – составляющая вектора скорости, параллельная плоскости (x_1, x_2). Подставляя выражения (56) в условия соленоидальности векторов $(\vec{v}/\bar{V})$ и $\vec{H}$ (1), будем иметь

$$\text{div}\frac{\vec{v}_\perp}{\bar{V}} = 0. \qquad (57)$$

Пусть также выполнены условия

$$s = s_0 = \text{const} \to p = p(\bar{V}). \qquad (58)$$

С учетом условия (58) уравнение сохранения энтропии (1) выполняется в силу уравнения (57). Пусть, далее, величина $\vec{v}_\perp$ является функцией удельного объема $\bar{V}$,

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}_\perp(\bar{V}). \qquad (59)$$

Подставляя выражение (59) в уравнение (57), приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{d}{d\bar{V}}\frac{\vec{v}_\perp}{\bar{V}}\right)\cdot\nabla\bar{V} = 0. \qquad (60)$$

Подставим выражения (56), (58) и (59) в уравнение движения (1). В результате получим

$$\left(\frac{\bar{V}_m}{\bar{V}}\frac{d}{d\bar{V}}\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{\bar{V}}{\rho_0}\frac{dp}{d\bar{V}} - \frac{\bar{V}_m}{\bar{V}^2}\vec{v}^2\right)\nabla\bar{V} +$$

$$+\left(\frac{\bar{V}_m}{\bar{V}^2}\vec{v}_\perp + \frac{\bar{V}-\bar{V}_m}{\bar{V}}\frac{d\vec{v}_\perp}{d\bar{V}}\right)\left(\vec{v}_\perp\cdot\nabla\bar{V}\right) = 0. \qquad (61)$$

Пусть $(\vec{v}_\perp \cdot \nabla\bar{V}) \neq 0$. Умножая тогда скалярно соотношение (61) на $\vec{v}_\perp$, сокращая результат на $(\vec{v}_\perp \cdot \nabla\bar{V})$ и интегрируя получившееся уравнение, находим

$$\frac{v_\perp^2}{2} + \frac{1}{\rho_0}\int_1^{\bar{V}} \bar{V}\frac{dP}{d\bar{V}}d\bar{V} = B_0. \qquad (62)$$

Здесь $v_\perp$ – модуль вектора $\vec{v}_\perp$, B_0 – постоянная интегрирования. Соотношение (62) является аналогом интеграла Бернулли. Оно переходит в классический интеграл Бернулли при $a_0 = 0$, $P \to p$.

С учетом аналога интеграла Бернулли (62) уравнению (61) удовлетворяет следующее выражение для $\nabla\bar{V}$:

$$\nabla\bar{V} = \lambda\vec{\Omega}, \quad \vec{\Omega} \equiv \frac{\bar{V}_m}{\bar{V}^2}\vec{v}_\perp + \frac{\bar{V}-\bar{V}_m}{\bar{V}}\frac{d\vec{v}_\perp}{d\bar{V}}. \qquad (63)$$

Здесь $\lambda \neq 0$ – произвольная функция координат x_1 и x_2. Подставив выражение (63) в уравнение (57), запишем

$$\left(\frac{d}{d\bar{V}}\frac{\vec{v}_\perp}{\bar{V}}\right)\cdot\vec{\Omega} = 0. \qquad (64)$$

Пусть Θ есть угол между осью x_1 и вектором $\vec{v}_\perp$,

$$\vec{v}_\perp = v_\perp\vec{t}, \qquad \vec{t} = \cos\Theta\vec{e}_1 + \sin\Theta\vec{e}_2. \qquad (65)$$

Здесь $\vec{t}$ – единичный вектор касательной к вектору $\vec{v}_\perp$. Подставляя выражение (65) в уравнение (64) и решая получившееся уравнение относительно Θ, получаем

$$\Theta = \Theta_0 \pm \int_1^{\bar{V}} \sqrt{-(M_1/M_2)}d\bar{V},$$

$$M_1 = \left(\frac{d}{d\bar{V}}\frac{v_\perp}{\bar{V}}\right)\left(\frac{\bar{V}_m}{\bar{V}^2}v_\perp + \frac{\bar{V}-\bar{V}_m}{\bar{V}}\frac{dv_\perp}{d\bar{V}}\right),$$

$$M_2 = \left[(\bar{V}-\bar{V}_m)v_\perp^2\right]/\bar{V}^2. \qquad (66)$$

Здесь Θ_0 – постоянная интегрирования. Предполагается, что $\text{sign}(M_1 \cdot M_2) = -1$. Комбинируя компоненты уравнения (63), приходим к уравнению

$$\Omega_2(\bar{V})\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_1} - \Omega_1(\bar{V})\frac{\partial\bar{V}}{\partial x_2} = 0. \qquad (67)$$

Общее решение уравнения (67) таково [5, 9]:

$$\bar{V} = f(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2). \qquad (68)$$

Здесь величина f является произвольной функцией своего аргумента. Соотношение (68) выражает неявно удельный объем $\bar{V}$ в функции координат x_1 и x_2.

Подставляя выражение (56) для $\vec{H}$ в формулу для плотности тока $\vec{J} = (c/4\pi)\text{rot}\vec{H}$, с учетом выражения (59) будем иметь:

$$\vec{J} = \frac{ca_0}{4\pi}\left[\frac{w_{30}}{D_0^2}\vec{e}_3 - \frac{d}{d\bar{V}}\left(\frac{\vec{v}_\perp}{\bar{V}}\right)\right] \times \nabla\bar{V}. \qquad (69)$$

Как следует из соотношения (69), аналогично векторам $\vec{v}$ и $\vec{H}$ вектор плотности тока $\vec{J}$ в рассматриваемом случае имеет составляющие по всем осям координат x_1, x_2 и x_3.

Таким образом получаем, что при выполнении условий (55) и (58) соотношения (56), (62), (65), (66), (68) и (69) описывают в конечном виде простые магнитогазодинамические волны в рассматриваемой задаче. Для инвариантов Римана здесь справедливы выражения

$$I_{\pm} = \Theta \pm \int_1^{\bar V} \sqrt{-(M_1/M_2)} d\bar V. \qquad (70)$$

Как известно и как, в частности, видно из выражений (66), в простой волне один из инвариантов Римана постоянен.

7. СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В КВАДРАТУРАХ УРАВНЕНИЯ (20) ДЛЯ ПЕРЕМЕННОЙ "П" В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА, АНАЛОГИЧНОЙ ДАВЛЕНИЮ В КЛАССИЧЕСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Пусть выполнено первое из условий (55). Тогда уравнение (20) для величины П несколько упрощается и принимает вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\bar V^2}{\rho_0}P + \bar V_m E\right)\right]\frac{\partial\Pi}{\partial\bar V} +$$
$$+\left\{\left[\frac{2\bar V_m}{\bar V} + (\bar V - \bar V_m)\frac{\partial}{\partial\bar V}\right]E\right\}\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = 0. \qquad (71)$$

Характеристическое уравнение (21) также несколько упрощается:

$$\frac{d\bar V}{d\psi} = \frac{\frac{\partial}{\partial\psi}(\frac{\bar V^2}{\rho_0}P + \bar V_m E)}{\left[\frac{2\bar V_m}{\bar V} + (\bar V - \bar V_m)\frac{\partial}{\partial\bar V}\right]E}. \qquad (72)$$

Обратимся далее к выражениям (7) для величины E и (8) для величины P в случае адиабатических течений:

$$E_p = -\frac{\gamma p_*}{(\gamma-1)\rho_0}\frac{1}{\bar V^{\gamma-1}},$$
$$p = \frac{p_*}{\bar V^\gamma}, \quad p_* = p_*(\psi). \qquad (73)$$

Здесь γ –показатель адиабаты, $p_*(\psi)$ – произвольная функция своего аргумента. Пусть выполнены условия

$$\frac{\gamma p_*}{(\gamma-1)\rho_0 E_0} = \bar p_*, \qquad \frac{(a_0 w_3 - cb)^2}{4\pi\rho_0 E_0} = \bar p_m, \qquad (74)$$

где $\bar p_*$ и $\bar p_m$ – безразмерные постоянные. Тогда выражения для величин E и P запишем в виде:

$$E = E_0 W_e(\bar V), \qquad E_0 = E_0(\psi),$$

$$\bar W_e = 1 - \frac{\bar p_*}{\bar V^{\gamma-1}} - \frac{\bar p_m(2\bar V - \bar V_m)}{2(\bar V - \bar V_m)^2},$$
$$P = E_0\left[\frac{(\gamma-1)\rho_0\bar p_*}{\gamma\bar V^\gamma} + \frac{\rho_0\bar p_m}{2(\bar V - \bar V_m)^2}\right]. \qquad (75)$$

Напомним, что величина $E_0(\psi)$ – произвольная функция своего аргумента. Подставляя выражения (75) в характеристическое уравнение (72), получаем

$$\frac{dE_0}{E_0} = \frac{d\bar V}{W},$$
$$W(\bar V) = \left[V_m W_e + \frac{(\gamma-1)\bar p_*}{\gamma}\bar V^{2-\gamma} + \frac{\bar p_m \bar V^2}{2(\bar V - \bar V_m)^2}\right] :$$
$$: \left\{\left[\frac{2\bar V_m}{\bar V} + (\bar V - \bar V_m)\frac{d}{d\bar V}\right]W_e\right\}. \qquad (76)$$

Интегрируя уравнение (76), находим

$$E_0 \exp\int_{\bar V}^1 \frac{d\xi}{W\xi} = C, \qquad W(\xi) = W(\bar V)/_{\bar V=\xi}. \quad (77)$$

В соотношении (77) величина C – постоянная интегрирования. Таким образом, общий интеграл уравнения (71) при выполнении условий (74) выражается в квадратурах:

$$\Pi = \Pi\left(E_0\exp\int_{\bar V}^1 \frac{d\xi}{W(\xi)}\right). \qquad (78)$$

Здесь П – произвольная функция своего аргумента. В частности,

$$\Pi = E_0\exp\int_{\bar V}^1 \frac{d\xi}{W(\xi)}. \qquad (79)$$

Отметим, что способ получения общего интеграла уравнения (71) в виде (78) аналогичен способу Л. И. Седова [34] получения класса точных решений с однородными относительными деформациями уравнений однопараметрической нестационарной газовой динамики.

8. СЛУЧАЙ ПРОДОЛЬНОГО ВЫДЕЛЕННОЙ ОСИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси x_3,

$$A' = a = 0. \qquad (80)$$

Учитывая условие (80) и первое из соотношений (8) в уравнении (20) и решая получившееся уравнение, будем иметь

$$\Pi = \Pi(P). \qquad (81)$$

В соотношении (81) $\Pi(P)$ – произвольная функция своего аргумента. В частности [29–32, 43],

$$\Pi = P. \qquad (82)$$

Отметим, что в классической газодинамике [33] и газодинамике при наличии источников массы, импульса и энергии [22, 24] $\Pi = p$, где p – обычное давление.

Перепишем первое соотношение (8) в виде

$$\bar{V} = -\rho_0 \frac{\partial E(P,\psi)}{\partial P}. \qquad (83)$$

Из первого выражения (3), определения (5) для D, соотношения (12), определения (26) для q и условия (80) следует

$$q = v_\perp = \sqrt{2E}, \qquad D = \bar{V}. \qquad (84)$$

Здесь $v_\perp$ – модуль поперечной к оси x_3 составляющей скорости. Учитывая соотношения (80) и (82) – (84) в уравнении (34), получаем [29–32, 43]:

$$v_\perp \frac{\partial^2\psi}{\partial P^2} + 2\frac{\partial v_\perp}{\partial P}\frac{\partial \psi}{\partial P} + \frac{\partial v_\perp}{\partial \psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial P}\right)^2 -$$

$$-\frac{\partial^2 v_\perp}{\partial P^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\Theta^2} - \frac{\partial^3 v_\perp}{\partial\psi\partial P^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}\right)^2 = 0. \qquad (85)$$

Уравнение (85) аналогично уравнению Л. И. Седова в форме Ю. В. Руднева плоской стационарной задачи классической газодинамики (см. уравнение (5.7) Главы I работы Ю. В. Руднева [20]) и уравнению (14.63) монографии автора [24], описывающему плоские стационарные течения газа при наличии источников массы, импульса и энергии. А именно, если в уравнении (85) провести замены $P \to p, v_\perp \to V$, то получим уравнение (5.7) Главы I работы Ю. В. Руднева [20]. Если же в уравнении (85) провести замену $P \to p, v_\perp \to w$, то придем к уравнению (14.63) монографии автора [24]. Заметим, что в уравнении (5.7) Главы I работы Ю. В. Руднева [20] между третьим и четвертым слагаемыми пропущен знак "+".

Уравнение (85) становится линейным при следующей специализации величины $v_\perp$:

$$v_\perp = m\left[\alpha' + \beta' \int m^{-2} dP\right]. \qquad (86)$$

Здесь $m(P)$, $\alpha(\psi)$ $\beta(\psi)$ – произвольные функции своих аргументов. Соответствующее специализации (86) линейное уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial P} m^2 \frac{\partial}{\partial P} - mm'' \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)\varepsilon = 0,$$

$$\varepsilon = \alpha + \beta \int m^{-2} dP. \qquad (87)$$

Специализация (86) является также условием существования инвариантов Римана, вид которых не зависит от вида функции $\psi(P,\Theta)$ [24]. Пусть выполнено условие $m'' > 0$. Тогда по аналогии с работой [24] можно получить следующие выражения для инвариантов Римана и уравнения для них:

$$I_\pm = \Theta \pm \int \sqrt{m''/m} dP, \qquad (88)$$

$$\left[\left(\sqrt{v_\perp \frac{\partial^2 v_\perp}{\partial P^2}} \cos \pm \frac{\partial v_\perp}{\partial P} \sin\Theta\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{v_\perp \frac{\partial^2 v_\perp}{\partial P^2}} \sin\Theta \pm \frac{\partial v_\perp}{\partial P}\cos\Theta\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right] I_\pm = 0. \qquad (89)$$

Отметим, что выражения (88) для инвариантов Римана и уравнения (89) для них аналогичны выражениям (14.77) для инвариантов Римана и уравнениям (14.70) для них монографии [24] в случае плоской задачи газодинамики при наличии источников массы, импульса и энергии.

Простые волны характеризуются постоянством одного из инварианов Римана:

$$I_\mp = I_\mp^0 = \mathrm{const}. \qquad (90)$$

В результате получаем, что второй из инвариантов Римана является функцией только полного давления:

$$I_\pm = I_\mp \pm 2 \int \sqrt{m''/m} dP. \qquad (91)$$

Аналогично работе [24] для комплексной координаты $z = (x_1 + ix_2)$ в этом случае получаем следующее выражение:

$$z = z_0 - e^{i\Theta}\left[\frac{i\beta}{m} + \left(\alpha + \beta\int m^{-2}dP\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(im' \mp \sqrt{mm''}\right)\right] + x_1^0 + i\int \mathrm{tg}\Theta dx_1^0 \qquad (92)$$

Здесь z_0– произвольная комплексная постоянная, $x_1^0(P)$ – произвольная действительная функция своего аргумента. Верхние и нижние знаки в выражениях (88) – (92) соответствуют друг другу. Выражение (92) аналогично выражениям (14.90) и (14.92) монографии [24].

9. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Рассмотрен случай, когда в аналоге метода годографа Чаплыгина–Седова в магнитной газовой динамике основное уравнение в переменных

годографа (Π, Θ), где Π есть аналог давления в классической газодинамике, Θ – угол между проекцией вектора скорости на плоскость (x_1, x_2) и осью x_1, сводится к линейному. В этом случае введены обобщенные потенциалы, также удовлетворяющие линейным уравнениям, через которые в конечном виде выражены координаты x_1 и x_2 и функция тока ψ. Это обстоятельство может в значительной мере упростить анализ конкретных задач [9, 11, 13, 37].

2. В случае гиперболичности основного линейного уравнения теории получены выражения для инвариантов Римана и уравнения для них. При этом уравнения состояния и интегралы симметрии включают зависимость не только от удельного объема, но и от функции тока. Как известно [9, 11–13, 16, 18, 19, 24, 37, 46], аппарат инвариантов Римана существенно расширяет возможности эффективного анализа краевых задач.

3. В случае, когда векторы скорости и магнитного поля коллинеарны, рассмотрена задача о получении решений типа простых волн, в которых скорость, напряженность магнитного поля и давление являются функциями только удельного объема $\bar{V}$. Отмечено, что условием совместности нелинейных уравнений первого порядка для определения величины $\bar{V}$ является интеграл Бернулли. Он определяет функцию $v_\perp(\bar{V})$, где $v_\perp$ – модуль проекции вектора скорости $\vec{v}_\perp$ на плоскость (x_1, x_2). Выражение для угла $\Theta = \Theta(\bar{V})$, который вектор $\vec{v}_\perp$ составляет с осью x_1, получено в квадратурах. Зависимость $\bar{V} = \bar{V}(x_1, x_2)$ определена с помощью произвольной неявной функции. При выполнении условий, для которых получен рассматриваемый тип простых волн, записаны выражения для инвариантов Римана. (Как известно, в простой волне один из инвариантов Римана постоянен). Полученный класс решений типа простых волн имеет самостоятельное значение при анализе краевых задач. Кроме того, он может быть использован как тестовый при отработке численных методов.

4. Получен важный случай интегрируемости в квадратурах уравнения для переменной "Π" в плоскости годографа, аналогичной давлению в классической газовой динамике. Способ получения общего интеграла указанного уравнения аналогичен способу Л. И. Седова получения класса точных решений с однородными относительными деформациями уравнений однопараметрической нестационарной газовой динамики.

5. Рассмотрен случай параллельного выделенной оси магнитного поля. В этом случае аналогом давления p в классической газодинамике является полное давление P, равное сумме обычного и магнитного давлений. Записано уравнение для функции тока в переменных (P, Θ), аналогичное уравнению Л. И. Седова в форме Ю. В. Руднева плоской стационарной задачи классической газодинамики [20] и уравнению в переменных годографа монографии автора [24], описывающему плоские стационарные течения газа при наличии источников массы, импульса и энергии. Установленные аналогии позволяют, в частности, использовать известные решения в плоскости годографа классической газодинамики при анализе двухпараметрических стационарных задач магнитной газодинамики.

Автор посвящает данную статью памяти Л. И. Седова и С. А. Чаплыгина. В 2002 году исполняется 95 лет со дня рождения Л. И. Седова (14. XI. 1907) и 100 лет со времени опубликования С. А. Чаплыгиным мемуара "О газовых струях" [44].

1. *Валландер С. В.* Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка, с двумя независимыми переменными сводящиеся к линейным // Вестник ЛГУ, сер. мат., физ. и хим.– 1954.– N 5.– С. 19–34.
2. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн.– М: Физматлит, 1998.– 448 с.
3. *Голицын Г. С., Джузумкулов Т., Станюкович К. П.* Общее решение уравнений магнитной гидродинамики для одномерных нестационарных и плоских стационарных движений // Магнит. гидродинамика.– N 1.– 1966.– С. 65–73.
4. *Завьялов Ю. С.* Об одном классе плоскопараллельных установившихся вихревых движений газа // ДАН СССР.– 1957.– 116, N 3.– С. 363–364.
5. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.– М: Наука, 1966.– 260 с.
6. *Каплан С. А. и Станюкович К.П.* Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного движения // ДАН СССР.– 1954.– 95, N 4.– С. 769–771.
7. *Корпусов М. О., Свешников А.Г.* Об одной начально–краевой задаче магнитной гидродинамики // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.– 2001.– 41, N 11.– С. 1734–1741.
8. *Кукушкин В. А.* О двумерном взаимодействии волн сжатия Римана // Прикл. мат. и мех.– 1999.– 63, вып. 3.– С. 431–443.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.– М: Мир, 1964.– 832 с.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.– М: Наука, 1982.– 532 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М: Наука, 1986.– 736 с.
12. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.– М: Наука, 1987.– 840 с.
13. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости.– М: ИЛ, 1961.– 588 с.

14. *Назаров Г. И.* К точным решениям некоторых задач магнитной гидродинамики // ПМТФ.– 1963.– N 2.– С. 63–72.
15. *Ночевкина И. И.* О приближенном методе исследования плоских вихревых течений в магнитной гидродинамике // Доклады АН СССР.– 1959.– 126, N 6.– С. 1220–1223.
16. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики.– М: Наука, 1981.– 368 с.
17. *Панченков А. Н.* Энтропия.– Нижний Новгород: Изд–во общества "Интелсервис", 1999.– 600 с.
18. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды// Сочинения.– М. Л.: Гостехтеориздат.– 1948.– С. 376–395.
19. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике.– М: Наука, 1978.– 688 с.
20. *Руднев Ю. В.* О некоторых плоских задачах газовой динамики // Ученые записки Всесоюзного заочного института инженеров железнодорожного транспорта.– Труды кафедр высшей математики и теоретической механики.– 1961. – N 7.– С. 167–240.
21. *Салтанов Н.В.* К одномерной задаче газодинамики и магнитной газодинамики // Труды I Респ.конф. по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену.– К.: Изд–во Киевск.ун–та.– 1969.– С. 164–166.
22. *Салтанов Н.В.* Аналитическая механика сплошной среды с источниками.– М: ВИНИТИ, 1982.– 354 с.
23. *Салтанов Н.В.* К основам аналитической механики континуальных систем с источниками массы, импульса и энергии // Прикладная механика.– 19, N 8.– 1983.– С. 64–70.
24. *Салтанов Н.В.* Аналитическая гидромеханика.– К.: Наук. думка, 1984.– 200 с.
25. *Салтанов Н.В.* Аналитическая и прикладная гидромеханика при наличии источников // Прикладная гидромеханика.– К.: Наук. думка.– 1989.– С. 145–168.
26. *Салтанов Н.В.* Обобщенные потенциалы в магнитной гидродинамике и динамике вращающейся жидкости // Прикладная гидромеханика.– 2000.– 2(74), N 4.– С. 82–98.
27. *Салтанов Н.В., Горбань В.А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения..– К.: Наукова думка, 1993.– 244 с.
28. *Салтанов Н.В., Ткалич В. С.* О волнах Римана // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.– 1961.– N 6.– С. 26–32.
29. *Салтанов Н.В., Ткалич В. С.* О нестационарной задаче магнитной газодинамики; аналог метода годографа Л. И. Седова; волны Римана.– Второй Всесоюзн. съезд по теор. и прикл. механике: Тез.докл: М.: Наука, 1964.– 190 с.
30. *Салтанов Н.В., Ткалич В. С.* О нестационарной магнитогазодинамической задаче. Аналог волны Римана // ДАН СССР.– 1964.– 156, N 3.– С. 529–532.
31. *Салтанов Н.В., Ткалич В. С.* Нестационарная одномерная задача магнитной газодинамики. Волны Римана // Магнитная гидродинамика.– 1965.– N 4.– С. 35–40.
32. *Салтанов Н.В., Ткалич В. С.* Нестаціонарна задача магнітної газодинаміки. Аналог методу Сєдова // Вісн.Київ. ун–ту. Сер.фіз. та хімії.– 1966.– N 6.– С. 75–77.
33. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.– М: Наука, 1966.– 448 с.
34. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике.– М: Наука, 1987.– 432 с.
35. *Сидоров А. Ф., Шапеев В.П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.– Новосибирск: Наука, Сиб.отд., 1984.– 272 с.
36. *Станюкович К. П.* Общие решения уравнений газовой динамики для одноразмерных движений для некоторого заданного уравнения состояния или процесса // ДАН СССР.– 1954.– 96, N 3.– С. 441–444.
37. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды.– М: Наука, 1971.– 856 с.
38. *Станюкович К. П.* Решения одномерных уравнений газовой динамики для неадиабатических процессов // Физика взрыва.– М.: Наука.– 1975.– С. 664–666.
39. *Суровихин К. П.* Внешние формы Картана и отыскание основной группы, допускаемой данной системой уравнений // Вестник МГУ, серия I, мат. мех.– 1965.– N 6.– С. 70-76.
40. *Ткалич В. С.* Двухпараметрическое движение в магнитной газодинамике (преобразования Громеки и Чаплыгина) // Прикладная математика и механика.– 1962.– 26, N 1.– С. 96–103.
41. *Ткалич В. С.* Стационарная задача магнитной газодинамики при наличии зависимости от двух координат; преобразование С. А. Чаплыгина // Инж. журнал.– 1962.– 2, вып. 3.– С. 43–53.
42. *Ткалич В. С.* О дозвуковом обтекании профилей в магнитной газодинамике // Магнитн. гидродинамика.– 1966.– N 2.– С. 12–16.
43. *Ткалич В. С.* Метод годографа Чаплыгина–Седова в магнитной газодинамике // Гидродинамика больших скоростей, вып. 2.– К.: Наук. думка.– 1966.– С. 140–148.
44. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях // Избранные труды по механике и математике.– М.: ГИТТЛ.– 1954.– С. 9–89.
45. *Черный Г.Г.* Газовая динамика.– М.: Наука, 1988.– 424 с.
46. *Юрьев И. М.* К решению уравнений магнитной газодинамики // Прикладная мат. и мех.– 1960.– 24, вып. 1.– С. 168–170.
47. *Ludford G. S. S.* Generalised Riemann invariants // Pacif. J. Math.– 1955.– 5, N 3.– P. 441–450.
48. *Molenbrock P.* Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials // Arch. d. Math. u. Phys.– 1890.– 9.– P. 157–195.
49. *Saltanov N. V. and Saltanov V. N.* To Magnetohydrodynamics of Rotating Nonhomogeneous Fluid in Stationary Gase // Jnt. J. of Fluid Mech. Res.– 2001.– 28, N 3.– С. 410–433.
50. *Stepanov G. Yu.* The Wing Theory in the Works of N. E. Zhukovsky and S. A. Chaplygin // Jnt. J. of Fluid Mech. Res..– 1999.– 26, N 4.– P. 450–464.