

УДК 532.465

# ЧИСЛЕННАЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. В. КАНАРСКАЯ, В. С. МАДЕРИЧ

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 17.03.2002

Представлена численная негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью. В основе метода решения системы уравнений Навье-Стокса лежит расщепление полей скорости и давления на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Вычисления проводятся в три этапа с использованием  $\sigma$ -системы координат и расщепления на внутреннюю и внешнюю моды. На первом этапе для определения уровня свободной поверхности с использованием явной схемы решаются проинтегрированные по глубине уравнения движения и уравнение неразрывности. На втором этапе определяется промежуточное трехмерное гидростатическое поле скоростей и давления с использованием полунявной схемы. На третьем этапе определяются негидростатические поля скоростей и давления с помощью метода сопряженных градиентов. Расчеты сопоставлены с аналитическим решением задачи о стоячих колебаниях тяжелой жидкости в глубоком прямоугольном бассейне, лабораторными экспериментами по трансформации длинных волн над подводными барами и отражению уединенных волн от вертикальной стенки. На примере задачи о водообмене жидкости различной плотности в шлюзе показана эффективность разработанного метода.

Представлена чисельна негідростатична модель стратифікованих течій з вільною поверхнею. В основу методу розв'язання системи рівнянь Нав'є-Стокса покладено розщеплення полів швидкості і тиску на гідростатичну та негідростатичну складові. Розрахунки проводяться в три етапи з використанням  $\sigma$ -системи координат і розщеплення на внутрішню та зовнішню моди. На першому етапі для визначення рівня вільної поверхні з використанням явної схеми розв'язуються проінтегровані за глибиною рівняння руху та рівняння нерозривності. На другому етапі визначається проміжне тривимірне гідростатичне поле швидкості і тиску з використанням напівнявної схеми. На третьому етапі одержуються негідростатичні поля швидкості та тиску з використанням методу спряжених градієнтів. Розрахунки співставлено з аналітичним розв'язком задачі про стоячі коливання важкої рідини в глибокому прямокутному басейні, лабораторними експериментами з трансформації довгих хвиль над підводними барами та відбиття уособлених хвиль від вертикальної стінки. На прикладі задачі про водообмін рідини різної густини в шлюзі показана ефективність розробленого методу.

A three-dimensional nonhydrostatic numerical model for simulation of free-surface flows is presented. Decomposition of pressure and velocity fields on hydrostatic and nonhydrostatic components is the base of the model. Computation was carried out using three-stage procedure with vertical  $\sigma$ -coordinate and internal-external mode splitting technique. At the first stage 2D depth-integrated momentum and continuity equations were integrated explicitly for surface elevation obtaining. At the second stage the intermediate 3D hydrostatic structure of velocity and pressure was calculated using semiimplicit scheme. At the third stage nonhydrostatic components of velocity and pressure were calculated using preconditioned conjugate gradient method. The model is tested against analytical solutions on the free oscillations in deep rectangular basin and laboratory experiments on steep wave transformation over the longshore bar, on solitary wave reflection with the vertical wall. The efficiency of a developed method is shown with example of "lock-exchange" flow.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для моделирования гидротермодинамики водоемов различного масштаба (озер, морей и океанов) в основном используются модели, в которых уравнения для вертикальной составляющей скорости заменяются гидростатическим приближением. В случае постоянной плотности соответствующая система уравнений называется "уравнениями мелкой воды" [1]. Основанием для упрощения задачи служит малость отношения характерных вертикального  $H_*$  и горизонтального  $L_*$  масштабов ( $\delta = H_*/L_*$ ).

В то же время существует ряд задач, в которых негидростатические эффекты важны и при  $\delta \ll 1$ . Это задачи гидродинамики прибреж-

ных областей, такие как трансформация длинных волн конечной амплитуды над неоднородностями дна [2], внутренняя гидравлика стратифицированных потоков в проливах и эстуариях [3]. В открытом океане полная негидростатическая система уравнений необходима для описания глубокой конвекции [4]. Кроме того, в отличие от гидростатического приближения, краевая задача для негидростатической модели является корректной и для областей с жидкими границами [5].

Использование известных методов для решения системы уравнений Навье-Стокса в задачах со свободной поверхностью (MAC метод [6] и его обобщение в [7]) с точки зрения вычислений неэкономично при  $\delta \ll 1$ . В последние годы был разработан ряд численных моделей [8–11] для решения задач геофизической гидродинамики, основ-

ной особенностью которых является выделение и последовательный расчет гидростатических и негидростатических составляющих скорости и давления, что позволило значительно ускорить расчеты.

В настоящей работе представлена численная негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью. В отличие от работ [8–11] решение задачи расщеплено на три этапа: (1) расчет уровня и проинтегрированных по глубине полей скорости; (2) расчет гидростатической составляющей скорости, давления и полей температуры и солености; (3) расчет негидростатических составляющих скорости и давления. Это существенно упрощает задачу, поскольку позволяет на первом этапе рассчитывать двумерные поля течений и уровня (внешнюю моду решения) с использованием явных схем, а на втором этапе для расчета трехмерных полей (внутренней моды) использовать экономичные полунявные схемы. В модели применяется  $\sigma$ -система координат, позволяющая аккуратно описывать неоднородности рельефа дна. Перечисленные особенности делают модель совместимой с известной моделью POM (Princeton Ocean Model) [12] и дают возможность рассматривать ее как негидростатическое расширение POM.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходные уравнения задачи, полученные из уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска с учетом осреднения по Рейнольдсу, в декартовой системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + A_M \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial U}{\partial z} \right) + fV, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + A_M \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial V}{\partial z} \right) - fU, \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial UW}{\partial x} + \frac{\partial VW}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} (\rho - \rho_0) + A_M \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial W}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где  $U(x, y, z, t)$ ,  $V(x, y, z, t)$ ,  $W(x, y, z, t)$  – составляющие скорости в горизонтальном  $x, y$  и вертикальном  $z$  – направлениях;  $P(x, y, z, t)$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\rho_0$  – плотность невозмущенной среды;  $A_M$  и  $K_M$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости соответственно;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $f$  – параметр Кориолиса. В данной постановке задачи учитывается только вертикальная составляющая ускорения Кориолиса ("традиционное приближение").

Плотность  $\rho$  определяется из уравнения состояния  $\rho = \rho(T, S, P)$  в форме [13]. Здесь  $T$  и  $S$  – температура и соленость соответственно. Уравнение переноса для некоторой скалярной функции  $C_i$  ( $C_1 = T$ ,  $C_2 = S$ ) имеет вид

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial UC_i}{\partial x} + \frac{\partial VC_i}{\partial y} + \frac{\partial WC_i}{\partial z} = A_H \left( \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_H \frac{\partial C_i}{\partial z} \right), \quad (5)$$

где  $A_H$  и  $K_H$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно. Для простоты последующего изложения коэффициенты горизонтального перемешивания  $A_H$  и  $A_M$  полагаются постоянными. Для определения коэффициентов вертикального перемешивания  $K_H$  и  $K_M$  применяется  $k-l$  модель турбулентности [14]

Полное давление  $P$  является суммой гидростатической  $P_h$  и динамической  $Q$  составляющих:  $P = P_h + Q$ . Гидростатическая составляющая давления находится интегрированием по вертикали уравнения движения (3), в котором опущены конвективные и вязкие слагаемые:

$$P_h(x, y, z, t) = g\rho_0 \eta(x, y, t) + g \int_z^\eta \rho'(x, y, \xi, t) d\xi, \quad (6)$$

где  $\eta(x, y, t)$  – отклонение свободной поверхности от положения покоя;  $\rho' = \rho - \rho_0$ .

Известные трудности решения задачи заключаются в определении уровня свободной поверхности и аккуратном описании рельефа дна  $H(x, y)$ . Использование  $\sigma$ -системы координат [8, 12] позволяет преобразовывать рельеф дна и конфигурацию свободной поверхности в каждый момент времени в координатные плоскости. Переход от декартовых переменных  $(x^*, y^*, z, t^*)$  к новым переменным  $(x, y, \sigma, t)$  задается следующими соотношениями:

$$x = x^*, \quad y = y^*, \quad \sigma = \frac{z - \eta}{D}, \quad t = t^*, \quad (7)$$

где  $D = H + \eta$  – полная глубина слоя воды. В  $\sigma$ -системе уравнения движения (1) – (3) с учетом (7) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial UD}{\partial t} + Adv(UD) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ -B^{(x)}(\rho', D) + \frac{\partial QD}{\partial x} - \frac{\partial QA}{\partial \sigma} + \\ + A_M \nabla_h^2(UD) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_M}{D} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right) + fVD, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial VD}{\partial t} + Adv(VD) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial y} - \\ -B^{(y)}(\rho', D) + \frac{\partial QD}{\partial y} - \frac{\partial QB}{\partial \sigma} + \\ + A_M \nabla_h^2(VD) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_M}{D} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) - fUD, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial WD}{\partial t} + Adv(WD) = -\frac{\partial Q}{\partial \sigma} + A_M \nabla_h^2(WD) + \\ + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_M}{D} \frac{\partial W}{\partial \sigma} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} Adv(FD) = \frac{\partial FUD}{\partial x} + \frac{\partial FVD}{\partial y} + \frac{\partial F\omega}{\partial \sigma}, \\ \nabla_h^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$B^{(x_i)} = -\frac{gD^2}{\rho_o} \int_{\sigma}^0 \left[ \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} - \frac{\sigma'}{D} \frac{\partial D}{\partial x_i} \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'} \right] d\sigma',$$

где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ . Преобразованная вертикальная скорость

$$\omega = W - UA - VB - C. \quad (11)$$

Здесь

$$A = \sigma \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad B = \sigma \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad C = \sigma \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Уравнение неразрывности (4) в  $\sigma$ -системе координат будет иметь вид

$$\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

или в более удобной форме записи:

$$\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W_q}{\partial \sigma} = 0, \quad (13)$$

где

$$W_q = W - UA - VB. \quad (14)$$

Использование уравнения неразрывности в форме (13) позволяет провести переход к уравнению Пуассона для давления в  $\sigma$ -системе, таким же образом как и в декартовой системе координат [6].

Уравнения (5) для скалярной функции  $C_i(x, y, t, \sigma)$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_i D}{\partial t} + Adv(C_i) = \\ = A_H \nabla_h^2(C_i D) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_H}{D} \frac{\partial C_i}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что в диффузионных слагаемых уравнений (9)-(10) не учитываются громоздкие члены, возникающие при переходе к  $\sigma$ -системе. В работе [15] было показано, что эти слагаемые не являются существенными.

Граничные условия формулируются в предположении о приповерхностном и придонном пограничных турбулентных слоях. На поверхности  $\sigma = 0$  граничные условия имеют вид

$$W = U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\frac{K_M}{D} \left( \frac{\partial U}{\partial \sigma}, \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) = (\tau_{0x}, \tau_{0y}), \quad (17)$$

$$\frac{K_H}{D} \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma}, \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right) = (H_T, H_S), \quad (18)$$

где  $(\tau_{0x}, \tau_{0y})$  – касательные напряжения ветра,  $H_T, H_S$  – потоки тепла и пресной воды соответственно. Для скорости на дне принимаются условия прилипания. При наличии турбулентного слоя постоянных напряжений эти условия трансформируются в асимптотические условия при  $\sigma \rightarrow -1$ :

$$W = -U \frac{\partial H}{\partial x} - V \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (19)$$

$$\frac{K_M}{D} \left( \frac{\partial U}{\partial \sigma}, \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) = (\tau_{bx}, \tau_{by}), \quad (20)$$

где

$$\tau_{bx} = C_D |U|U, \quad \tau_{by} = C_D |V|V,$$

$$C_D = \max \left( 0.0025; \frac{\kappa}{\ln(D(\sigma + 1)/z_0)} \right).$$

Здесь  $z_0$  – масштаб шероховатости;  $\kappa$  – постоянная Кармана. На дне отсутствуют потоки тепла и соли.

Интегрируя уравнение неразрывности (12) и уравнения движения (9)-(10) по вертикали от

$\sigma = 0$  до  $\sigma = -1$  с учетом граничных условий (16)-(20), а также соотношения (14), получаем систему двумерных уравнений для внешней моды движений:

$$\frac{\partial \bar{U}D}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}D}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{U}D}{\partial t} + \overline{Adv}(\bar{U}D) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \overline{B^{(x)}(\rho', D)} + A_M \nabla_h^2(\bar{U}D) + \tau_{bx} - \tau_{0x} + f\bar{V}D, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{V}D}{\partial t} + \overline{Adv}(\bar{V}D) = -gD \frac{\partial \eta}{\partial y} + \overline{B^{(y)}(\rho', D)} + A_M \nabla_h^2(\bar{V}D) + \tau_{by} - \tau_{0y} - f\bar{U}D, \quad (23)$$

где

$$\overline{Adv}(FD) = \frac{\partial F\bar{U}D}{\partial x} + \frac{\partial F\bar{V}D}{\partial y},$$

$$\overline{B^{(x_i)}} = \int_{-1}^0 B^{(x_i)} d\sigma, \quad x_1 = x, x_2 = y,$$

$$(\bar{U}, \bar{V}) = \int_{-1}^0 (U, V) d\sigma.$$

В качестве граничных условий на боковых границах используются условия прилипания для скорости на твердых границах и отсутствия потоков тепла и солей. На жидких границах используются условия излучения [16, 17].

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Система уравнений с соответствующими граничными условиями решается методом конечных разностей. Используются центральные разности по времени и пространственным координатам, а также разнесенная “С”-сетка Аракавы для пространственных переменных. Адвективные члены в уравнениях для скаляров аппроксимируются схемой высокого порядка [18].

Так же, как в работах [8–11], в основе численной реализации данной модели лежит последовательный расчет гидростатических и негидростатических составляющих скорости и давления. Скорость длинных поверхностных волн много больше скорости внутренних волн. Поэтому, чтобы увеличить шаг интегрирования, в работе [8] уравнения внешней моды интегрировались неявным методом, а трехмерные уравнения для гидростатической составляющей интегрировались по явной

схеме. В работе [10] система уравнений гидростатического приближения интегрировалась совместно с уравнением для уровня неявным методом и задача определения уровня сводилась к решению системы линейных уравнений с пятидиагональной матрицей. На этапе отыскания негидростатических составляющих давления задача сводилась к решению системы линейных уравнений с семидиагональной матрицей.

В отличие от этих работ в нашем подходе решение задачи разделено на три этапа: (1) расчет уровня и проинтегрированных по глубине полей скорости; (2) расчет гидростатической составляющей скорости, давления и полей температуры и солености; (3) расчет негидростатических составляющих скорости и давления. Это существенно упрощает задачу, поскольку позволяет на первом этапе рассчитывать двумерные поля течений и уровня (внешнюю моду решения) с использованием явных схем, а на втором этапе для расчета трехмерной задачи использовать экономичные полунявные схемы. Опишем более детально поэтапное решение задачи. Рассмотрим реализацию вычислительного алгоритма на временном промежутке  $[n-1, n+1]$  с шагами по времени для внешней и внутренней моды  $\Delta t_E$  и  $\Delta t_I$  соответственно.

### 1 этап. Расчет уровня

На первом этапе по явной схеме решаются уравнения внешней моды (21)-(23) на интервале  $[n, n+1]$  с временным шагом  $\Delta t_E$ :

$$\frac{\eta^{m+1} - \eta^{m-1}}{2\Delta t_E} + \frac{\partial(\bar{U}D)^m}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}D)^m}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{(\bar{U}D)^{m+1} - (\bar{U}D)^{m-1}}{2\Delta t_E} + \overline{Adv}(\bar{U}^m) = -gD^m \frac{\partial \eta^m}{\partial x} - \overline{B^{(x)}(\rho^n, D^n)} + f(\bar{V}D)^m + A_M \nabla_h(\bar{U}D)^{m-1} - \tau_{0x}^n + \tau_{bx}^n, \quad (25)$$

$$\frac{(\bar{V}D)^{m+1} - (\bar{V}D)^{m-1}}{2\Delta t_E} + \overline{Adv}(\bar{V}^m) = -gD^m \frac{\partial \eta^m}{\partial y} - \overline{B^{(y)}(\rho^n, D^n)} - f(\bar{U}D)^m + A_M \nabla_h(\bar{V}D)^{m-1} - \tau_{0y}^n + \tau_{by}^n, \quad (26)$$

где индекс  $m$  соответствует номеру временного шага внешней моды. При этом в момент времени  $n$  скорость внешней моды рассчитывается с использованием значения полной скорости, вычисленной на  $n$  шаге:  $(\bar{U}^n, \bar{V}^n) = \int_{-1}^0 (U^n, V^n) d\sigma$ . Полученные в результате решения двумерной задачи  $\Delta t_I/\Delta t_E$  полей уровня осредняются на интервале

времени  $(n, n + 1)$ . Осредненное значение уровня  $\tilde{\eta}$  используется при расчете трехмерного поля на следующем этапе. Таким образом осуществляется связь между вычислениями во внешнем и внутреннем цикле для внутренней и для внешней моды соответственно.

### 2 этап. Расчет промежуточных скоростей по полю гидростатического давления

На этом этапе рассчитываются промежуточные значения скорости  $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$  при  $Q = 0$  и окончательное значение скаляра  $C_i^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{U}D)^{n+1} - (UD)^{n-1}}{2\Delta t_I} + Adv(UD)^n = \\ & = -gD \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} - B^{(x)}(\rho^n, D^n) + f(VD)^n + \\ & + A_M \nabla_h^2 (UD)^{n-1} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_M}{D} \frac{\partial \tilde{U}^{n+1}}{\partial \sigma} \right), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{V}D)^{n+1} - (VD)^{n-1}}{2\Delta t_I} + Adv(UD)^n = \\ & = -gD \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} - B^{(y)}(\rho^n, D^n) - f(UD)^n + \\ & + A_M \nabla_h^2 (VD)^{n-1} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_M}{D} \frac{\partial \tilde{V}^{n+1}}{\partial \sigma} \right), \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{W}D)^{n+1} - (WD)^{n-1}}{2\Delta t_I} + Adv(WD)^n = \\ & = A_M \nabla_h^2 (WD)^{n-1} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{K_M}{D} \frac{\partial \tilde{W}^{n+1}}{\partial \sigma} \right), \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(C_i D)^{n+1} - (C_i D)^{n-1}}{2\Delta t_I} + Adv(C_i^n) = \\ & = A_H \nabla_h^2 (C_i D)^{n-1} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( K_H \frac{\partial C_i^{n+1}}{\partial \sigma} \right). \quad (30) \end{aligned}$$

Так же, как в [10, 12], адвекция и сила Кориолиса определены на шаге  $n$ , слагаемые горизонтальной диффузии вычисляются на  $n - 1$  шаге. На этом этапе удовлетворяются все граничные условия. Получившаяся линейная трехдиагональная система уравнений эффективно решается методом прогонки по  $\sigma$ -координате. Затем, используя соотношение (14), вычисляется преобразованная вертикальная скорость:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_q^{n+1} = \tilde{W}^{n+1} - \tilde{U}^{n+1} \left( \sigma \frac{\partial D^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} \right) - \\ - \tilde{V}^{n+1} \left( \sigma \frac{\partial D^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial y} \right). \quad (31) \end{aligned}$$

### 3 этап. Расчет негидростатического давления и скоростей

На третьем этапе вычисляются негидростатические составляющие поля скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{(DU)^{n+1} - (D\tilde{U})^{n+1}}{2\Delta t_I} = \\ & = - \left( \frac{\partial(QD)^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial(QA)^{n+1}}{\partial \sigma} \right), \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(DV)^{n+1} - (D\tilde{V})^{n+1}}{2\Delta t_I} = \\ & = - \left( \frac{\partial(QD)^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial(QB)^{n+1}}{\partial \sigma} \right), \quad (33) \end{aligned}$$

$$\frac{(DW_q)^{n+1} - (D\tilde{W}_q)^{n+1}}{2\Delta t_I} = - \frac{\partial q^{n+1}}{\partial \sigma}. \quad (34)$$

Полное поле скорости должно удовлетворять уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial(UD)^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial(VD)^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial W_q^{n+1}}{\partial \sigma} = 0. \quad (35)$$

Дифференцируя соотношения (32)-(34) по  $x, y$ , и  $\sigma$  соответственно и подставляя в (35), получаем уравнение Пуассона для определения негидростатической компоненты давления  $Q$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(QD)^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(QD)^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{1}{D^{n+1}} \frac{\partial^2 Q^{n+1}}{\partial \sigma^2} - \\ & - \frac{\partial^2(QA)^{n+1}}{\partial x \partial \sigma} - \frac{\partial^2(QB)^{n+1}}{\partial y \partial \sigma} = \\ & = \frac{1}{2\Delta t_I} \left( \frac{\partial}{\partial x} (D\tilde{U})^{n+1} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (D\tilde{V})^{n+1} + \frac{\partial \tilde{W}_q^{n+1}}{\partial \sigma} \right). \quad (36) \end{aligned}$$

Уравнение (36), записанное в конечно-разностном виде с использованием центральных разностей по пространственным координатам представляет собой систему линейных уравнений. Данная система имеет 15-диагональную, несимметричную, положительно определенную матрицу. Для решения линейных систем большого порядка, матрица которых имеет разреженный вид, целесообразно использовать итерационные методы вариационного типа. В нашем случае система решалась с использованием модифицированного метода сопряженных градиентов [19, 20]. Граничные условия для скорости выполняются на втором этапе. Поэтому, как следует из (32)-(34),

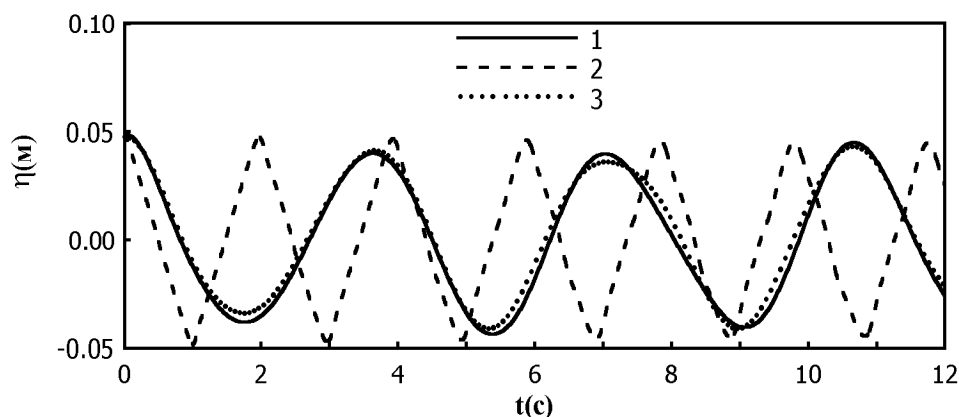


Рис. 1. Колебания свободной поверхности в точке (0.4 м, 5 м):  
1 - негидростатика, 2 - гидростатика, 3 - аналитическое решение (37)

на твердой стенке для  $Q$  ставятся однородные условия Неймана, а на свободной поверхности и жидких боковых границах  $Q = 0$ . После того, как негидростатическая составляющая давления определена, находится полное распределение скорости  $U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В настоящем разделе результаты расчетов сопоставлены с аналитическим решением задачи о стоячих колебаниях тяжелой жидкости в глубоком прямоугольном бассейне, с лабораторными экспериментами по трансформации длинных волн над подводными барями и по отражению уединенных волн от вертикальной стенки. На примере задачи о водообмене жидкости различной плотности в шлюзе показана эффективность разработанного метода.

#### 3.1. Стоячие колебания тяжелой жидкости в глубоком прямоугольном бассейне

Рассмотрим трехмерную задачу о стоячих колебаниях жидкости в прямоугольном бассейне конечной глубины при  $\delta = 1$ . В этом случае приближение мелкой воды не может правильно описывать распространение волн, так как оно является приближением длинных бездисперсионных волн. Движение жидкости вызвано начальным отклонением уровня свободной поверхности от положения равновесия. Рассмотрим колебания волн малой амплитуды в бассейне длиной  $L_x = 10$  м, шириной  $L_y = 10$  м и глубиной  $H = 10$  м. Линейная задача имеет простое аналитическое решение [21]:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \cos \sigma_{nm} t \cos \left( \frac{\pi x}{L_x} n \right) \cos \left( \frac{\pi y}{L_y} m \right), \quad (37)$$

где

$$\sigma_{nm} = \sqrt{g s_{nm} \operatorname{th}(H s_{nm})},$$

$$s_{nm}^2 = \left( \frac{\pi n}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{L_y} \right)^2.$$

Коэффициент  $b_{nm}$  вычисляется по начальному условию для отклонения свободной поверхности. В расчетах было принято, что  $\eta(x, y, 0) = 0.1 - 0.01x - 0.01y$ , м.

Вычисления проводились при постоянных коэффициентах вязкости и диффузии  $K_M = A_M = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с с параметрами дискретизации:  $\Delta x = \Delta y = 0.2$  м,  $\Delta \sigma = 0.02$ ,  $\Delta t = 0.01$  с.

На рис. 1 приведены результаты сравнения расчетов уровня в точке с координатами  $x = 0.4$  м,  $y = 5$  м с аналитическим решением (37) и расчетами в гидростатическом приближении. Очевидно хорошее совпадение негидростатических расчетов и аналитического решения, в отличие от гидростатической модели.

#### 3.2. Трансформация волн над препятствиями

Этот пример демонстрирует важность негидростатических эффектов при трансформации длинных волн над подводными препятствиями при  $\delta \ll 1$ . Подобные задачи до сих пор решались с помощью моделей типа Буссинеска [2]. В работе [22] приведены результаты лабораторного эксперимента в волновом лотке с трапециевидным

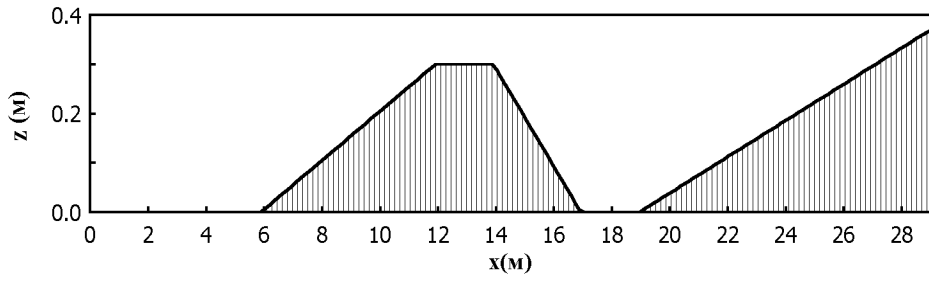


Рис. 2. Рельеф дна канала в лабораторном эксперименте [22]

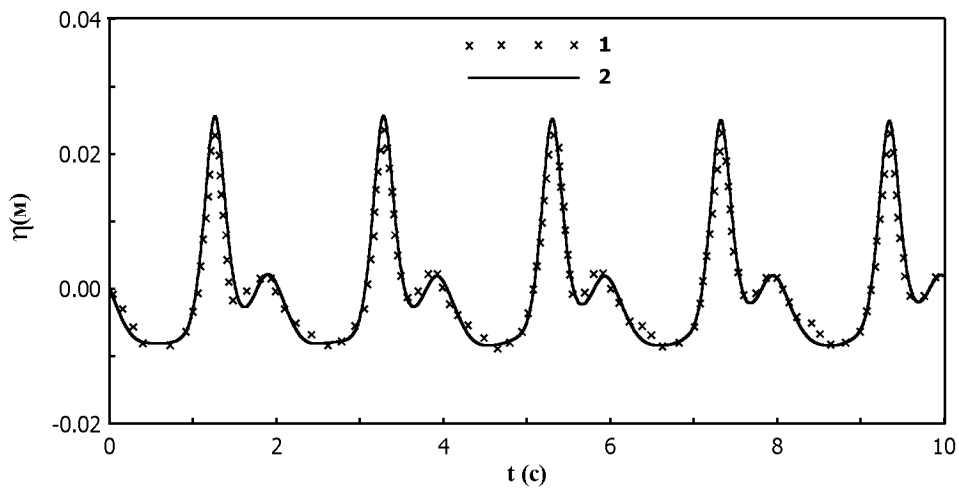


Рис. 3. Колебания свободной поверхности на расстоянии 13.8 м от волнопродуктора:  
1 - экспериментальные данные [22], 2 - расчетные данные

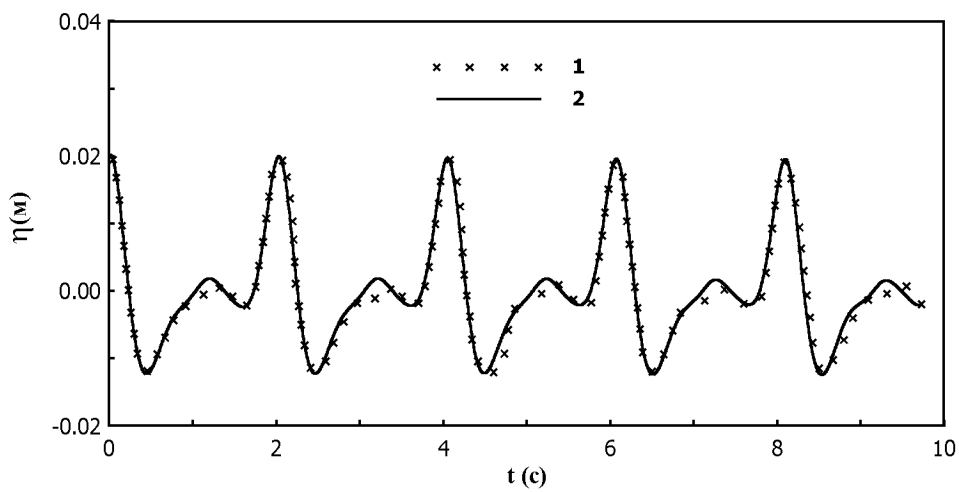


Рис. 4. Колебания свободной поверхности на расстоянии 17.6 м от волнопродуктора:  
1 - экспериментальные данные [22], 2 - расчетные данные

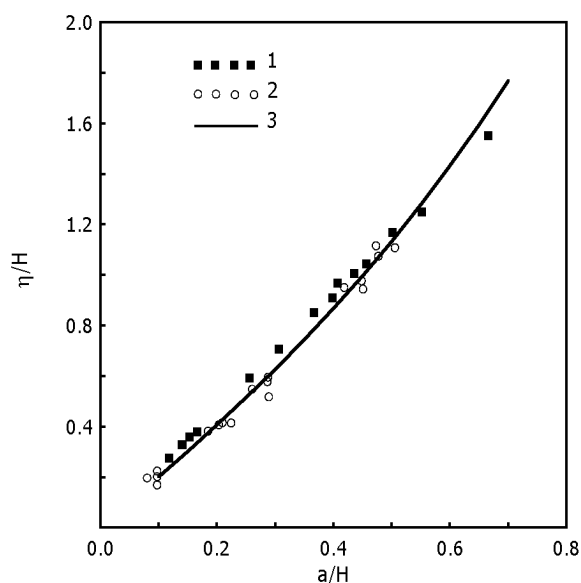


Рис. 5. Зависимость максимального относительного возвышения свободной поверхности у вертикальной стенки от относительной высоты солитона: 1, 2 – экспериментальные данные [23] и [24], 3 – расчетные данные

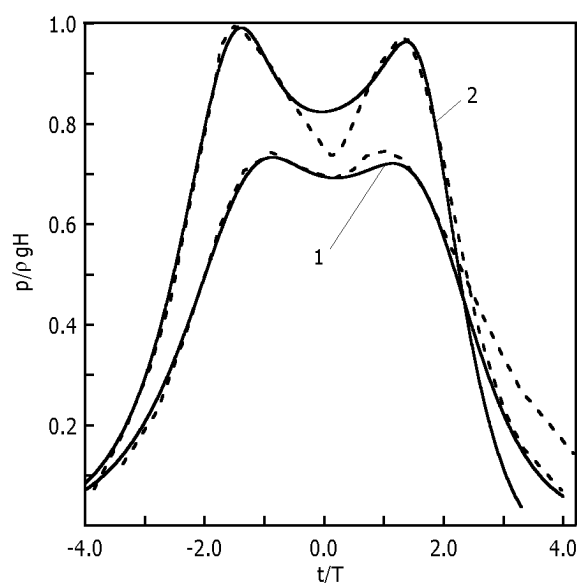


Рис. 6. Хронограмма относительного волнового давления на спокойном уровне при воздействии на стенку солитонов относительной высоты  $a/H = 0.5$  (1) и  $a/H = 0.7$  (2). Экспериментальным данным [24] соответствует штриховая линия, расчетным – сплошная линия.  $T = (H/g)^{1/2}$

препятствием. Вертикальное сечение лотка показано на рис. 2. Длина канала  $L_x = 30$  м, ширина  $L_y = 0.3$  м, высота  $H = 0.4$  м. На левой границе волнопродуктор генерирует синусоидальные возмущения высотой  $0.02$  м и частотой  $0.5$  Гц. Расчеты проводились с параметрами дискретизации  $\Delta x = 0.0375$  м,  $\Delta y = 0.0375$  м,  $\Delta \sigma = 0.025$ ,  $\Delta t = 0.005$  с и при постоянных коэффициентах вязкости  $K_M = A_M = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с.

Негидростатическая модель достаточно точно описывает появление высших гармоник при уменьшении глубины над препятствием (рис. 3) и расщепление волн при переходе на глубокую воду за препятствием (рис. 4).

### 3.3. Воздействие длинных волн на вертикальную преграду

Рассматривается задача о воздействии уединенной волны на вертикальную преграду, которая исследовалась в экспериментах [23, 24] и численно [25] в рамках модели Буссинеска.

При решении задачи в качестве исходной принималась одиночная волна, которая задавалась в виде:

$$\eta(x, 0) = ach^{-2} \left[ \sqrt{\frac{3\alpha}{4(1+\alpha)} \frac{x-x_0}{H}} \right], \quad (38)$$

$$u(x, 0) = \frac{\eta}{H} \sqrt{gH(1+\alpha)}, \quad (39)$$

где  $\alpha = a/H$  – относительная высота волны;  $x_0$  – положение пика волны. Расчеты проводились для прямоугольного бассейна длиной  $L_x = 12.8$  м, шириной  $L_y = 0.77$  м и высотой  $H = 0.32$  м при постоянных коэффициентах вязкости и диффузии  $K_M = A_M = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с с параметрами дискретизации:  $\Delta x = \Delta y = 0.064$  м,  $\Delta \sigma = 0.033$ ,  $\Delta t = 0.01$  с. Начальное возмущение задавалось по формулам (38), (39) для различных  $\alpha$  при  $x_0 = 0.3L$ .

На рис. 5 сопоставлены расчетные и экспериментальные [23, 24] значения возвышений уровня на стенке. На рис. 6 показаны хронограммы давления одиночных волн на стенку. Модель хорошо предсказывает высоту заплеска. Кроме того, модель описывает наблюдаемый в эксперименте [24] характерный двухпиковый профиль давления с провалом вблизи момента максимума заплеска волны, обусловленным вертикальным ускорением жидкости у стенки.

### 3.4. Водообмен жидкости различной плотности в шлюзе

Решается задача о водообмене жидкости различной плотности в шлюзе. Рассматривается прямоугольный бассейн длиной  $L_x = 2$  м, шириной  $L_y = 0.6$  м и высотой  $H = 0.3$  м. В начальный момент вода различной солености  $S_1 = 50$  ppt (слева) и  $S_2 = 17$  ppt (справа) разделена вертикальной



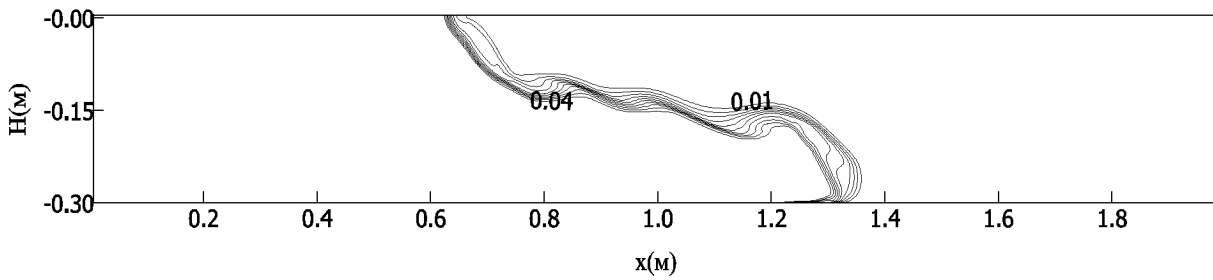


Рис. 7. Распределение плотности в негидростатическом случае при  $t = 3$  с

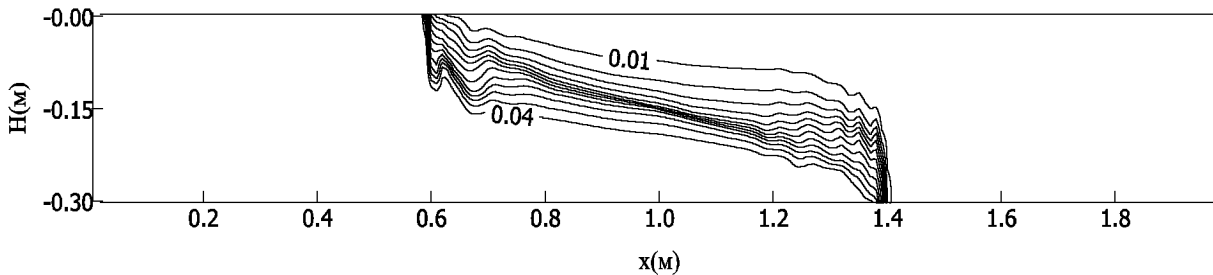


Рис. 8. Распределение плотности в гидростатическом случае при  $t = 3$  с

перегородкой. После того, как перегородку убирают, объемы воды разной плотности начинают двигаться в противоположных направлениях. Расчеты проводились при постоянных коэффициентах вязкости и диффузии  $K_M = A_M = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  с параметрами дискретизации:  $\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ м}$ ,  $\Delta \sigma = 0.01$ ,  $\Delta t_E = 0.01 \text{ с}$  при отношении  $\Delta t_E/\Delta t_I = 10$ .

На рис. 7 и 8 показано распределение отклонения плотности  $\rho'$ , при  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , рассчитанное в гидростатическом и негидростатическом случаях. На рис. 7 видна некоторая асимметрия распределения, обусловленная свободной поверхностью. Как следует из сравнения рис. 8 и 7 распределение плотности при использовании гидростатической модели весьма далеко от наблюдаемого в экспериментах [26], в отличие от результатов расчетов с помощью негидростатической модели. При этом уравнение Пуассона для негидростатической компоненты давления сходится за 1-4 итерации. В то же время в гидростатическом случае для устойчивости счета необходимо было выбирать шаг по времени в 5 раз меньший, чем для негидростатических вычислений.

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе предложен новый численный трехэтапный конечно-разностный алгоритм решения задачи о течении стратифицированной жидко-

сти со свободной поверхностью. Основными особенностями модели является представление давления и скоростей в виде гидростатической и негидростатической составляющих, использование  $\sigma$ -системы координат и расщепление задачи на внутреннюю и внешнюю моды. Проведено сопоставление расчетов с аналитическим решением задачи о стоячих колебаниях тяжелой жидкости в глубоком прямоугольном бассейне, лабораторными экспериментами по трансформации длинных волн над подводными барами и отражении уединенных волн от вертикальной стенки. На примере задачи о водообмене жидкости различной плотности в шлюзе показана эффективность разработанного метода. Таким образом, применение данной модели позволяет значительно расширить круг решаемых численными методами задач о течениях стратифицированной жидкости со свободной поверхностью.

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. – М.: Мир, 1984. – 811 с.
2. Beji S., Battjes J. A. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar // Coastal Eng. – 1994. – 23. – P. 1–16.
3. Zhu D. Z., Lawrence G. A. Non-hydrostatic effects in layered shallow water flows // J. Fluid Mech. – 1998. – 355. – P. 1–16.
4. Marshall J., Schott F. Open-ocean convection: observations, theory and models // Rev. Geophys. – 1999. – 37. – P. 1–64.

5. Mahadevan A., Olinger J., Street R. A non-hydrostatic mesoscale ocean model. Part 1: Well-posedness and scaling // *J. Phys. Oceanogr.*– 1996.– **26**.– P. 1868–1880.
6. Harlow F. H., Welch J. E Numerical calculation of time dependent viscous, incompressible flow // *Physics of Fluids.*– 1965.– **8**.– P. 2182–2189.
7. Tome M. F., McKee S. GENSMAC // *J. Computational Physics* .– 1994.– **110**.– P. 171–186.
8. Mahadevan A., Olinger J., Street R. A non-hydrostatic mesoscale ocean model. Part 2: Numerical implementation // *J. Phys. Oceanogr.*– 1996.– **26**.– P. 1881–1900.
9. Marshall J., Adcroft A., Hill C., Perelman L., Heisey C. A finite-volume, incompressible Navier-Stokes model for studies of the ocean on parallel computers // *J. Geophys. Res.*– 1997.– **102**.– P. 5753–5766.
10. Casulli V., Stelling G. S. Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic, free-surface flows // *J. Hydr. Eng.*– 1998.– **124**, N 7, July.– P. 678–686.
11. Wu W., Rodi W., Wenka T. 3D Numerical Modeling of Flow and Sediment Transport in Open Channels // *J. Hydr. Eng.*– 2000.– **126**, N 1.– P. 4–15.
12. Blumberg A. F., Mellor G. L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model // *American Geophysical Union.*– 1987.– **4**.– P. 1–16.
13. Mellor G. L. An equation of state for numerical models of ocean and estuaries // *J. Atmos. Ocean. Tech.*– 1991.– **8**.– P. 609–611.
14. Mellor G. L., Yamada T. Development of turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Rev. Geophys. Space Phys.*– 1982.– **20**.– P. 851–875.
15. Mellor G. L., Blumberg A. F. Modelling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system // *Mon. Wea. Rev.* .– 1985.– **113**.– P. 1380–1383.
16. Palma E. D., Matano R. P. On the implementation of open boundary conditions to a general circulation model: The barotropic mode // *J. Geophys. Res.* – 1996.– **103**.– P. 1319–1341.
17. Orlandi V. P. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.*– 1976.– **21**.– P. 251–269.
18. Smolarkiewicz P.K. A Fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion // *J. Comp. Phys.*– 1984.– **54** .– P. 325–362.
19. Голуб Дж., Ван Лоан Ч. Матричные вычисления.– М.: Наука, 1980.– 200 с.
20. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.– М.: Наука, 1977.– 455 с.
21. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н В. Теоретическая гидромеханика. т. 1.– М.: ГИФМЛ, 1963.– 583 с.
22. Beji S., Battjes J. A. Experimental investigation of wave propagation over bar // *Coastal Eng.*– 1993.– **19** .– P. 151–162.
23. Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves // *J. Fluid. Mech.*– 1976.– **76**.– P. 177–185.
24. Загрядская Н. Н., Иванова С. В. Действие длинных волн на вертикальную преграду // *Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева.*– 1988.– **138** .– С. 94–101.
25. Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды // *Сб. научных трудов. Накат цунами на берег.*– Горький, 1985.– С. 122–139.
26. Barr D. I. H., Hassan A. M. M Densimetric exchange flow in rectangular channels. II.–Some observations of the structure of lock exchange flow // *La Houille Blanche.*– 1963.– N 7.– P. 739–756.