

Г. Ю. Мартыненко

Общий подход к моделированию нелинейной динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Тарелиным)*

Предлагается способ построения математической модели динамики ротора в магнитных подшипниках различных типов. Моделирование производится на основе дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода и уравнений Максвелла. Показано, как полученные нелинейные аналитические модели могут использоваться для исследования механизмов возбуждения пространственных колебаний вращающегося жесткого ротора, выяснения условий существования различных резонансных режимов, супер-, субгармонических и комбинационных колебаний, а также применяться для апробации алгоритмов управления и выбора оптимальных параметров подвеса.

Магнитные подшипники (МП) являются вариантом упруго-демпферных опор роторных машин различного назначения [1]. Их особенностью является использование магнитного поля для реализации устойчивой левитации роторов. С помощью этих полей создаются силовые реакции опор на смещения ротора, что обеспечивает автоматическое центрирование опорных участков ротора в статорных элементах МП и необходимый уровень жесткости опирания. По принципу действия наиболее применяемые МП делятся на активные магнитные подшипники (АМП) [1, 2] и магнитные подшипники на постоянных магнитах [3]. Некоторые конструктивные варианты МП представлены на рис. 1. Здесь показаны радиальные и осевые АМП (рис. 1, а, б) и МП на постоянных магнитах (рис. 1, в, г) и введены следующие обозначения: 1 — ротор; 2 — статоры; 3 — обмотки; 4 — датчики положения; 5 — сравнивающее устройство системы управления АМП; 6 — устройство управления; 7 — усилители, подающие управляющие напряжения на обмотки АМП, сформированные согласно принятому алгоритму управления; 8 и 9 — подвижный и неподвижный кольцевые постоянные магниты.

Вне зависимости от типа МП их отличительной чертой является нелинейная зависимость силовых характеристик от смещения и тока. Но в работах [1, 2] динамическое поведение роторов в МП описывается с помощью линеаризованных математических моделей, что не позволяет моделировать нелинейные явления [4]. Кроме того, применение линейных моделей не дает адекватного описания процессов при нахождении систем “ротор в АМП” в предельных режимах (например, нулевой ток или зазор). Поэтому предлагаемый способ описания динамики роторов в МП различных типов призван восполнить указанные пробелы и обобщить подход к формированию математических моделей, учитывающих нелинейную взаимосвязанность электрических, магнитных и механических процессов в системе.

Рассматривается жесткий ротор, так как именно колебания, вызванные динамической неуравновешенностью, при которых возникают движения типа цилиндрической и конической прецессии, являются наиболее распространенными на практике и отличаются повышенными амплитудами, что делает их особенно опасными [5].

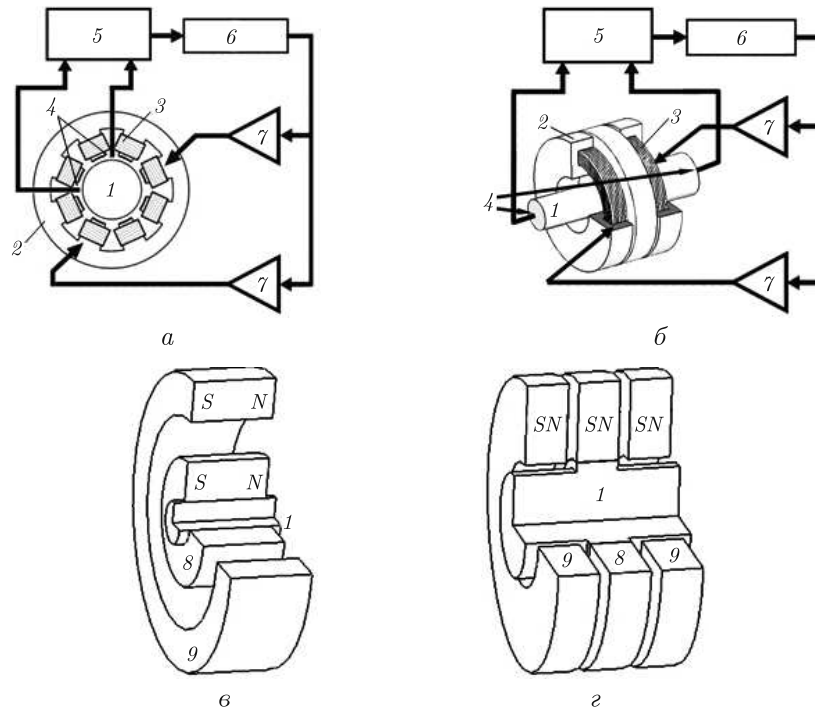


Рис. 1

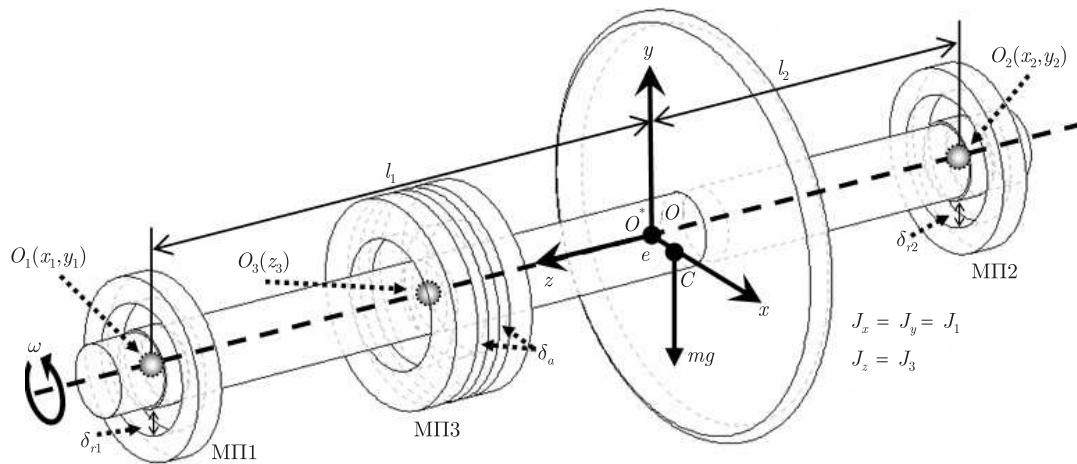


Рис. 2

Расчетная схема ротора в двух радиальных и одном осевом МП представлена на рис. 2. Здесь введена пространственная неподвижная правая прямоугольная система координат O^*xyz , ось O^*z которой проходит через центры радиальных МП. Точка C — центр масс, m — масса ротора, J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции, а $e_x = e_1, e_y = e_2$ ($e^2 = e_1^2 + e_2^2$) — линейные и $\gamma_x = \gamma_1, \gamma_y = \gamma_2$ — угловые параметры неуравновешенности. Точки O, O_1, O_2, O_3 лежат на оси жесткости ротора, причем O в одной плоскости с C перпендикулярной оси, O_1, O_2 являются центрами опорных участков в радиальном направлении (причем $l_1 + l_2 = l$), а O_3 — в осевом. Зазоры в МП1, МП2 и МП3 равны $\delta_{r1}, \delta_{r2}, \delta_a$ соответственно. Ротор совершает вращение с постоянной угловой скоростью ω .

мени, в частности, вызванные неуровновешенностью; Π — потенциальная энергия; $W = W(x_1, \dots, z_3, \Psi_1, \dots, \Psi_N)$ — магнитная энергия в АМП; $r_{c1, \dots, N}$ — активные сопротивления в цепях обмоток; $u_{c1, \dots, N}$ — управляющие напряжения, подаваемые на обмотки АМП, величина которых формируется согласно принятому закону управления в зависимости от текущего положения ротора; m_{ks}, j — инерционные и гироскопические коэффициенты, которые имеют следующие значения:

$$m_{11} = \frac{ml_2^2 + J_1}{l^2}; \quad m_{12} = \frac{ml_1l_2 - J_1}{l^2}; \quad m_{22} = \frac{ml_1^2 + J_1}{l^2}; \quad j = \frac{\omega J_3}{l^2}. \quad (3)$$

Члены $-\partial\Pi/\partial q_r$ представляют собой потенциальные силы, зависящие только от обобщенных координат (сила тяжести, магнитные силы в МП на постоянных магнитах). Зависимости магнитных сил вычисляются по тензору натяжений Максвелла на основе решения серии задач магнитостатики в конечноэлементной постановке для фиксированного числа положений роторного магнита, соответствующих некоторым дискретным значениям его смещения [7]. Члены $-\partial W/\partial q_r$ — это пондеромоторные силы, т. е. электромагнитные реакции АМП. Их зависимости от обобщенных координат и токов в обмотках могут быть получены аналитически на основе рассмотрения магнитных цепей с использованием схем замещения и применением метода контурных потоков [8].

Выражения введенных в (2) обозначений внешних возмущающих сил, вызванных неуровновешенностью, а также инерционных и гироскопических коэффициентов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} H_{x1}(t) &= M_{11}E_x + J\Gamma_x; & H_{x2}(t) &= M_{22}E_x - J\Gamma_x; \\ H_{y1}(t) &= M_{11}E_y - J\Gamma_y; & H_{y2}(t) &= M_{22}E_y + J\Gamma_y; \\ E_x &= e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t); & E_y &= e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t); \\ \Gamma_x &= \gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t); & \Gamma_y &= \gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t); \\ M_{11} &= \frac{ml_2\omega^2}{l}; & M_{22} &= \frac{ml_1\omega^2}{l}; & J &= \frac{\omega^2(J_1 - J_3)}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Запишем члены второго порядка, которые находятся в левых частях уравнений движения в (2) для учета нелинейных особенностей рассматриваемой электромеханической системы:

$$\left. \begin{aligned} f''_{x1} &= -\frac{m\ddot{z}_3 E_x}{l}; & f''_{x2} &= \frac{m\ddot{z}_3 E_x}{l}; & f''_{y1} &= -\frac{m\ddot{z}_3 E_y}{l}; & f''_{y2} &= \frac{m\ddot{z}_3 E_y}{l}; \\ f''_{z3} &= m[(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - \omega^2(x_2 - x_1) + 2\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)]E_x + \\ &+ [(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega^2(y_2 - y_1) - 2\omega(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)]E_y/l. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Нелинейные члены третьего порядка ввиду громоздкости записей здесь не приводятся, однако именно в них проявляется полная взаимосвязь между всеми обобщенными координатами посредством членов, не зависящих от параметров неуровновешенности.

Характеризуя систему (2), представляющую собой аналитическую модель, следует отметить, что наряду с дифференциальными уравнениями движения второго порядка относительно обобщенных координат в ней присутствуют и дифференциальные уравнения первого порядка относительно потокосцеплений. Однако последние N уравнений в (2) будут присутствовать в математической модели только в том случае, если в осуществлении магнитного подвешивания ротора участвуют АМП. Их количество будет равно количеству

обмоток всех АМП. Учет постоянной времени изменения токов в обмотках электромагнитов в этих уравнениях производится с помощью коэффициентов само- и взаимной индукции (самоиндуктивностью и взаимной индуктивностью контуров электромагнитов). Величины, обратные этим параметрам, есть коэффициенты при $\Psi_{ck}^2/2$ и $\Psi_{ck}\Psi_{cs}/2$ в выражении магнитной энергии W . Демпфирующие свойства АМП будут определяться величинами активных сопротивлений r_{ck} . В выражении магнитной энергии W будут присутствовать магнитные сопротивления участков цепи магнитопроводов АМП и сопротивления воздушных зазоров, в формулы которых войдут и константы, определяемые их геометрией, и величины самих зазоров, а значит, и обобщенные координаты. Причем зависимость от них будет нелинейной. Кроме того, магнитная энергия будет квадратично зависеть от всех потокосцеплений [8]. Такой вид выражения магнитной энергии связывает в единую систему уравнения движения и уравнения относительно потокосцеплений и определяет взаимосвязь электрических и магнитных динамических явлений с механическими.

Так для осевого АМП (см. рис. 1, б) выражение магнитной энергии имеет вид [8]:

$$W = \frac{1}{2} \left[(R_{mcs1} + R_{g1} + R_{g2}) \frac{\Psi_{c1}^2}{w_1^2} + (R_{mcs2} + R_{g3} + R_{g4}) \frac{\Psi_{c2}^2}{w_2^2} + R_{mcr} \left(\frac{\Psi_{c1}}{w_1} + \frac{\Psi_{c2}}{w_2} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где R_{mcs1} , R_{mcs2} и R_{mcr} — магнитные сопротивления стальных магнитопроводов первого и второго статоров и ротора; $R_{g1} = R_{g1}(q_r)$, $R_{g2} = R_{g2}(q_r)$ и $R_{g3} = R_{g3}(q_r)$, $R_{g4} = R_{g4}(q_r)$ — магнитные сопротивления воздушных зазоров между полюсами первого и второго статоров и ротором соответственно; w_1 и w_2 — количество витков в обмотках АМП.

Далее приведен пример расчета вынужденных колебаний ротора, вызванных динамической неуравновешенностью. Исследования проводились для ротора массой 2,5 кг в полном магнитном подвесе, в котором в качестве МП1 и МП2 применены МППМ (см. рис. 1, в), а в качестве МП3 — АМП (см. рис. 1, б), для которой применен оригинальный способ и алгоритм управления (т.е. формирования u_{ck}) [9]. Некоторые параметры имеют такие значения: $l_1 = 0,106$ м, $l_2 = 0,176$ м, $J_1 = 0,0107$ кг · м², $J_3 = 0,0034$ кг · м², $\delta_r = 5,5 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_a = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $e = 6 \cdot 10^{-5}$ м, $\gamma = 0,003$ рад и $Q_{Rqr} = b_{qr} \cdot \partial q_r / \partial t$, где $b_{qr} = 2,325$ кг/с.

Решение системы уравнений (2) выполнялось численно методом Рунге–Кутты 4–5 порядка для дискретных значений угловой скорости. Результаты расчетных исследований вынужденных колебаний — это решения на стационарных участках для обобщенных координат x_1 , y_1 , x_2 , y_2 в диапазоне угловой скорости 0–100π рад/с. Они представлены на рис. 3 в виде зависимостей амплитуд гармоник A , полученных с помощью БПФ, от угловой частоты вынуждающей силы ω_0 , вызванной собственной неуравновешенностью ротора. Эта частота соотносится с угловой скоростью ротора как $\omega_0 = \omega$. На рис. 3 приняты обозначения: $A_{(1)}$ — амплитуды первых гармоник (см. рис. 3, а, б), $A_{(1/n)}$ — субгармоник (см. рис. 3, а), $A_{(n)}$ — супергармоник (см. рис. 3, б), где число в скобках — кратность частоты гармоники основной частоте ω_0 . Собственные частоты невращающегося ротора, рассчитанные с использованием линеаризованной системы уравнений без учета демпфирования [рад/с], следующие: $p_{1x} = 66,4$; $p_{1y} = 74,8$; $p_{2x} = 154,5$; $p_{2y} = 167,26$.

Анализ результатов позволил обнаружить наличие в системе “ротор в магнитных подшипниках” нелинейных явлений роторной динамики (рис. 3), таких как: супергармонические колебания в области первого резонансного режима (I); раздвоение первого резонанса вследствие анизотропии жесткости МП на постоянных магнитах в горизонтальном и вертикальном направлениях, причем при $\omega < \omega_{1x}$ и $\omega > \omega_{1y}$ ротор совершает движение типа

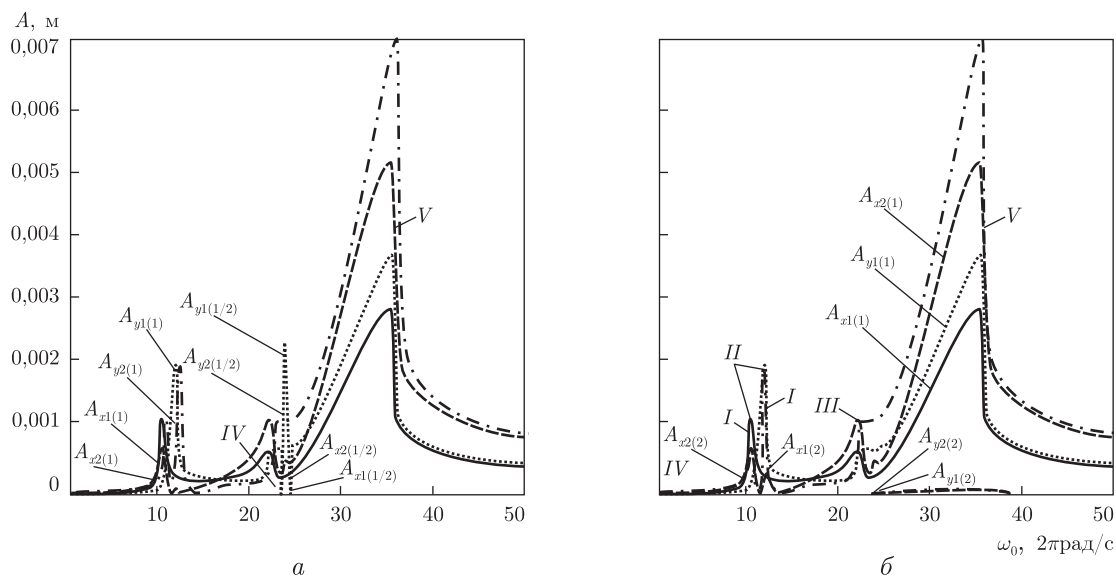


Рис. 3

прямой, а в диапазоне между этими критическими скоростями — типа обратной цилиндрической прецессии (*II*); раздвоение второго резонанса ω_{2x} и ω_{2y} (*III*); внутренний резонанс $p_{2x} \approx 2p_{1y}$ (*IV*); второй резонансный режим, при котором движение ротора соответствует конической прецессии, а вид резонансных кривых присущ системам с жесткими характеристиками восстанавливающей силы, что справедливо для МП на постоянных кольцевых магнитах (*V*).

Все эти явления подтверждаются результатами экспериментальных исследований на лабораторной установке с указанными выше параметрами [10].

Известно, что анализ на основании линеаризованных моделей позволяет судить только об устойчивости равновесных состояний при малых отклонениях. Пренебрежимо малые в этом случае нелинейные члены уравнений при исследовании движения с возрастающими отклонениями позволяют расширить информативность математической модели о нелинейных эффектах, происходящих в системе. Поэтому в работе предложены нелинейные аналитические модели и показано, как они могут использоваться для исследования механизмов возбуждения пространственных колебаний вращающихся жестких роторов в МП, выяснения условий существования различных резонансных режимов (в том числе супер-, суб-, внутренних резонансов), супер-, субгармонических и комбинационных колебаний, автоколебаний, а также апробации алгоритмов управления и выбора оптимальных параметров подвеса.

1. Schweitzer G., Maslen E. H. Magnetic bearings. Theory, design, and application to rotating machinery. — Berlin: Springer, 2009. — 535 p.
2. Журавлев Ю. Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. — Санкт-Петербург: Политехника, 2003. — 206 с.
3. Jansen R., DiRusso E. Passive magnetic bearing with ferrofluid stabilization. — NASA Technical Memorandum 107154, 1996. — 154 p.
4. Ehrlich F. Observations of nonlinear phenomena in rotordynamics // J. of System Design and Dynamics. — 2008. — 2, No 3. — P. 641–651.
5. Иноземцев А. А., Нихамкин М. А., Сандратский В. Л. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. — Москва: Машиностроение, 2008. — Т. 4. — 204 с.

6. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Под ред. И. И. Блехмана. – Москва: Машиностроение, 1979. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. – 351 с.*
7. *Мартыненко Г. Ю. Определение зависимостей радиальных и осевых сил от смещений роторного магнита в радиальном магнитном подшипнике на двух кольцевых постоянных магнитах // Пробл. машиностроения. – 2010. – 13, № 1. – С. 52–64.*
8. *Мартыненко Г. Ю. Способ аналитического определения магнитных сил в активных магнитных подшипниках роторных машин // Вост.-европ. журн. передовых технологий. – 2010. – № 3/3. – С. 67–73.*
9. *Ульянов Ю. М., Мартыненко Г. Ю., Смирнов М. М. Система управління осьовим рухом ротора на комбінованому магнітному підвісі з пасивними радіальними і активним осьовим підшипниками // Зб. наук. пр. УкрДАЗТ. – 2008. – Вип. 97. – С. 107–118.*
10. *Мартыненко Г. Идентифікація математичної моделі жорсткого ротора в пасивно-активному магнітному підвісі на підставі експериментальних даних // Машинознавство. – 2009. – № 11(149). – С. 9–14.*

НТУ “Харьковский политехнический институт”

Поступило в редакцию 31.05.2011

Г. Ю. Мартыненко

Загальний підхід до моделювання нелінійної динаміки жорстких роторів у магнітних підшипниках різних типів

Запропоновано спосіб побудови математичної моделі динаміки ротора в магнітних підшипниках різних типів. Моделювання здійснюється на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду і рівнянь Максвелла. Показано, як отримані нелінійні аналітичні моделі можуть використовуватися для дослідження механізмів збудження просторових коливань жорсткого обертового ротора, з'ясування умов існування різних резонансних режимів, супер-, субгармонійних і комбінаційних коливань, а також застосовуватися для апробації алгоритмів керування і вибору оптимальних параметрів підвісу.

G. Yu. Martynenko

The general approach to modeling the nonlinear dynamics of rigid rotors in magnetic bearings of various types

The model-building technique of the rotor dynamics in magnetic bearings of various types is proposed. Modeling is based on the Lagrange and Maxwell differential equations of the second order. It is shown how the obtained non-linear analytical models can be used in the investigation of the excitation mechanisms for spatial oscillations of a rotating rigid rotor, clearing-up the existence conditions of different resonance modes, super/subharmonic and combination vibrations, and how these models can be applied to test the control algorithms and to select optimal parameters of a suspension.