

А. В. Мазнев

Один случай прецессии общего вида в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

Рассматривается прецессия общего вида в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Получены новые решения уравнений движения гиростата, которые характеризуются постоянством произведения скоростей прецессии и собственного вращения.

Прецессионные движения гиростата находят широкое применение в приложениях [1], так как они имеют наглядный механический смысл. Для этих движений постоянен угол между двумя осями l_1, l_2 с общим началом в неподвижной точке O и фиксированными, соответственно, в гиростате и в неподвижном пространстве [2, 3]. Обзор результатов, полученных в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом, изложен в [4].

Задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом рассматривалась в работах Ж. Лиувилля [5], В. Вольтерра [6], Н. Е. Жуковского [7], П. В. Харламова [8] и др.

Равномерные движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом рассмотрены в [9–11]. Исследованию простейших классов прецессионных движений посвящены работы [12, 13]. В статье [14] предложен общий метод изучения прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил.

Обобщение прецессии [15] в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае постоянного гиростатического момента дано в [4]. В данной работе рассмотрены условия существования прецессии класса А. И. Докшевича в случае переменного гиростатического момента для этой задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [8, 16]

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda\alpha) \times \omega - L\alpha + \omega \times B\nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega, \dot{\lambda} = L, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела-носителя; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — постоянный единичный вектор, характеризующий направление вектора гиростатического момента $\lambda\alpha$; L — проекция момента сил на ось вращения носимого тела; $s = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ — тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ — постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными ν, ω, λ обозначает относительную производную по времени t .

Уравнения (1) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (2)$$

где k — произвольная постоянная.

Отметим, что при заданной функции $L = L(t)$ уравнения (1) в скалярном виде представляют собой систему семи обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе поставим задачу об изучении прецессионных движений гиростата, описываемых уравнениями (1) в предположении $L(t) \neq 0$. Следуя [14], прецессионные движения опишем инвариантными соотношениями

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\mathbf{a} + \dot{\psi}(t)\boldsymbol{\nu}. \quad (3)$$

Здесь $a_0 = \cos \theta_0$ (θ_0 — угол между единичными векторами \mathbf{a} и $\boldsymbol{\nu}$); $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ — скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Уравнение Пуассона из (1) после подстановки в него второго соотношения из (3) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}). \quad (4)$$

Согласно методу из [3], кинематическому соотношению $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ из системы (2), условию $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0$ и уравнению (4) удовлетворим, положив

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad (5)$$

где $a'_0 = \sin \theta_0$.

Внесем $\boldsymbol{\omega}$ из системы (3) и $L = \dot{\lambda}$ из системы (1) в динамическое уравнение системы (1)

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} - \lambda[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] + \ddot{\varphi}A\mathbf{a} + \ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\dot{\psi}[\text{Sp}(A)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})] - \\ - \dot{\varphi}^2(A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) - \dot{\varphi}(\mathbf{a} \times B\boldsymbol{\nu}) - \dot{\psi}(\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu}) - \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\text{Sp}(A)$ — след матрицы A .

Отметим, что при получении формул (5) подвижная система координат введена так, что третья ось этой системы направлена по вектору $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$.

Прецессия [15] характеризуется соотношением

$$\dot{\psi} = \frac{\sigma_0}{\dot{\varphi}}, \quad (7)$$

где σ_0 — постоянный параметр, $\dot{\varphi} \neq 0$.

Поставим задачу об исследовании уравнения (6) в предположениях: $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$; ν_i выражаются соотношениями (5); скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ связаны условием (7).

Следуя методу [14], найдем проекции левой части уравнения (6) на независимые векторы \mathbf{a} , $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\nu}$. Тогда имеем три уравнения (без ограничения общности считаем $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$)

$$\begin{aligned} \alpha_3 \dot{\varphi}^2 \dot{\lambda} - a'_0 \alpha_1 \sigma_0 \dot{\varphi} \lambda \cos \varphi + A_{33} \dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi} - \sigma_0 \ddot{\varphi} (\beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi + \beta_0) + \\ + \dot{\varphi} h_2(\varphi) + \dot{\varphi}^2 g_2(\varphi) + f_2(\varphi) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\varphi}\lambda(a'_0\alpha_1 \sin \varphi + a_0\alpha_3) + \dot{\varphi}^2(\beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi + \beta_0) - \dot{\varphi}H_2(\varphi) + G_2(\varphi) = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & a'_0\alpha_1\dot{\varphi}^2\dot{\lambda} \cos \varphi + a'_0\dot{\varphi}\lambda[\sigma_0(a'_0\alpha_3 - a_0\alpha_1 \sin \varphi) - \alpha_1\dot{\varphi}^2 \sin \varphi] + \\ & + \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}(\beta'_1 \cos \varphi - \beta_1 \sin \varphi) - \ddot{\varphi}F_2(\varphi) - \dot{\varphi}^2K_2(\varphi) - \\ & - \dot{\varphi}^4(\beta_1 \cos \varphi + \beta'_1 \sin \varphi) + \dot{\varphi}[\dot{\varphi}^2L_2(\varphi) + N_2(\varphi)] + \dot{\varphi}^2M_2(\varphi) - Q_2(\varphi) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} h_2(\varphi) &= \sigma_0(B'_2 \cos 2\varphi - B_2 \sin 2\varphi + a_0\gamma'_1 \cos \varphi - a_0\gamma_1 \sin \varphi), \\ g_2(\varphi) &= C'_2 \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi + \kappa'_0 \cos \varphi - \kappa_0 \sin \varphi, \\ f_2(\varphi) &= \sigma_0^2(A_2 \sin 2\varphi - A'_2 \cos 2\varphi + a_0\beta_1 \sin \varphi - a_0\beta'_1 \cos \varphi), \\ H_2(\varphi) &= \frac{1}{2}[B_2 \cos 2\varphi + B'_2 \sin 2\varphi + 2a_0\gamma_1 \cos \varphi + 2a_0\gamma'_1 \sin \varphi + (B_0 + 2k)], \\ G_2(\varphi) &= \sigma_0(A_2 \cos 2\varphi + A'_2 \sin 2\varphi + 2a_0\beta_1 \cos \varphi + 2a_0\beta'_1 \sin \varphi + A_0), \\ F_2(\varphi) &= \sigma_0(A'_2 \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi + a_0\beta'_1 \cos \varphi - a_0\beta_1 \sin \varphi), \\ K_2(\varphi) &= \sigma_0(2A_2 \cos 2\varphi + 2A'_2 \sin 2\varphi + 2a_0\beta_1 \cos \varphi + 2a_0\beta'_1 \sin \varphi - a_0^2 A_{33}), \\ L_2(\varphi) &= B_2 \cos 2\varphi + B'_2 \sin 2\varphi + a_0\gamma_1 \cos \varphi + a_0\gamma'_1 \sin \varphi + \frac{1}{2}a_0^2(B_{11} + B_{22}), \\ N_2(\varphi) &= \sigma_0 \left[a_0B_2 \cos 2\varphi + a_0B'_2 \sin 2\varphi + (2a_0^2 - 1)\gamma_1 \cos \varphi + (2a_0^2 - 1)\gamma'_1 \sin \varphi + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_0a_0^2}{2}(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}) \right], \\ M_2(\varphi) &= a_0C_2 \cos 2\varphi + a_0C'_2 \sin 2\varphi + [(2a_0^2 - 1)\varepsilon_1 - a_0a_0^2s_2] \cos \varphi + \\ & \quad + [(2a_0^2 - 1)\varepsilon'_1 - a_0a_0^2s_1] \sin \varphi + \frac{a_0^2}{2}[a_0(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) + 2s_3], \\ Q_2(\varphi) &= \sigma_0^2[a_0A_2 \cos 2\varphi + a_0A'_2 \sin 2\varphi + (2a_0^2 - 1)\beta_1 \cos \varphi + (2a_0^2 - 1)\beta'_1 \sin \varphi + \\ & \quad + \frac{a_0a_0^2}{2}(A_{11} + A_{22} - 2A_{33})]. \end{aligned} \quad (11)$$

В функциях (11) введены обозначения

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{a_0^2}{2}(A_{22} - A_{11}), & A'_2 &= a_0^2 A_{12}, & A_0 &= \frac{1}{2}[a_0^2(A_{22} + A_{11}) + 2a_0^2 A_{33}], \\ B_2 &= \frac{a_0^2}{2}(B_{22} - B_{11}), & B'_2 &= a_0^2 B_{12}, & B_0 &= \frac{1}{2}[a_0^2(B_{22} + B_{11}) + 2a_0^2 B_{33}], \\ C_2 &= \frac{a_0^2}{2}(C_{22} - C_{11}), & C'_2 &= a_0^2 C_{12}, & C_0 &= \frac{1}{2}[a_0^2(C_{22} + C_{11}) + 2a_0^2 C_{33}], \\ \beta_1 &= a'_0 A_{23}, & \beta'_1 &= a'_0 A_{13}, & \beta_0 &= a_0 A_{33}, & \gamma_1 &= a'_0 B_{23}, & \gamma'_1 &= a'_0 B_{13}, \\ \varepsilon_1 &= a'_0 C_{23}, & \varepsilon'_1 &= a'_0 C_{13}, & \kappa_0 &= a_0 \varepsilon_1 - a'_0 s_2, & \kappa'_0 &= a_0 \varepsilon'_1 - a'_0 s_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Основная задача состоит в определении условий существования решений $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ системы (8)–(10) с учетом свойства ограниченности функции $\lambda = \lambda(t)$. Решение этой системы будем искать в классе функций

$$\dot{\varphi} = \sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}, \quad \lambda = p_0 + p_1 \sin \varphi + \varepsilon_0 \sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}. \quad (13)$$

Выбор зависимости $\dot{\varphi}$ от переменной φ , которая определяется первой формулой из системы (13), обосновано результатом [17], полученным при анализе условий существования прецессий в решении [15]. Структура функции $\lambda(\varphi)$ из (13) получена на основе анализа уравнений (8)–(10).

Случай $p_0 = 0$, $p_1 = 0$. Из второй формулы системы (13) вытекает равенство $\lambda = \varepsilon_0 \dot{\varphi}$. Подставим эту функцию и первое выражение из (13) в уравнения (8)–(10) и потребуем, чтобы они становились тождествами по переменной φ . Тогда, в силу соотношений (11) и обозначений (12), условия существования решения (13) получим в виде системы алгебраических уравнений на параметры задачи, которая имеет, например, решение

$$A_{12} = A_{23} = 0, \quad B_{ij} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad k = 0, \quad (14)$$

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad s_2 = 0, \quad (15)$$

$$c_0 = \frac{4a_0\alpha_3s_1}{\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_{13}}, \quad c_1 = \frac{4a'_0\alpha_1s_1}{\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_{13}}, \quad (16)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - 2A_{13}^2] + \alpha_3A_{13}(A_{11} - A_{22})}{2\alpha_1[\alpha_1A_{13} + \alpha_3(A_{11} - A_{22})]}, \quad (17)$$

$$\sigma_0 = \frac{2\alpha_1s_1}{\alpha_3(A_{11} - A_{22}) - \alpha_1A_{13}},$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_0 = \frac{1}{A_{22}\alpha_1^2} [\alpha_3^2(A_{22} - A_{11}) + 2\alpha_1\alpha_3A_{13} - \alpha_1^2A_{33}], \quad (18)$$

$$\alpha_1^{(1,2)} = \frac{\alpha_3}{\delta_3} [-A_{13}(A_{33} + A_{11} - A_{22}) \pm \delta_1\delta_2], \quad (19)$$

$$s_3 = \frac{1}{a'_0c_0} \left[c_0a'_0a_0(C_{33} - C_{22}) - \frac{1}{2}\alpha_1\varepsilon_0c_0c_1 - a'_0\varepsilon_0c_0\alpha_3\sigma_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}c_0c_1A_{13} + \frac{1}{2}a_0\sigma_0c_1A_{13} + \sigma_0c_0b_1 + \sigma_0^2b_2 \right], \quad (20)$$

$$\delta_1 = \sqrt{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}, \quad \delta_2 = \sqrt{A_{13}^2 + (A_{22} - A_{11})(A_{33} - A_{22})}, \quad (21)$$

$$\delta_3 = A_{33}(A_{22} - A_{33}) - A_{13}^2, \quad b_1 = a'_0(A_{22} - A_{11} - A_{33}), \quad b_2 = a'_0a_0(A_{22} - A_{33}).$$

Из равенств (14), (15) вытекает, что матрица B в уравнениях (1) отсутствует, постоянная интеграла площадей из (2) равна нулю, центр масс гиростата принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции, а матрица C отлична от нулевой матрицы. Компоненты вектора λ определяются формулой (19) и равенством $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 1$. Пример разрешимости этих уравнений может характеризоваться следующими значениями моментов инерции: $A_{11} = \mu_0$, $A_{22} = 3\mu_0$, $A_{33} = 2,5\mu_0$, $A_{13} = 1,5\mu_0$ (μ_0 — параметр). Очевидно, что при этом правая часть выражения (18) положительна. Поскольку параметры ε_0 и σ_0 входят в соотношения (17)

линейно, то их действительность очевидна. В силу первой формулы из системы (13) и вида значений c_0, c_1 из (16) выбором параметра s_1 можно добиться действительности функции $\dot{\varphi} = \sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}$. Для простоты записи условий существования прецессий класса Докшевича в формулу (20) не подставлены значения величин (21).

На основании формул (3), (5), (7), (13) запишем полученное решение уравнений (1)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{\sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}}((c_0 + c_1 \sin \varphi)\mathbf{a} + \sigma_0 \boldsymbol{\nu}), \\ \boldsymbol{\nu} &= (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \lambda = \varepsilon_0 \sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}} &= t - t_0.\end{aligned}\tag{22}$$

Из последней формулы и соотношений (16) вытекает, что при условии ограниченности функции (7) можно указать такие значения параметров задачи (1) (например, для моментов инерции можно принять указанные выше значения), при которых $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени.

Случай $p_1 = 0$. Положим во втором равенстве из (13) $p_1 = 0$ и подставим (13) в уравнения (8)–(10). С помощью обозначений (11), (12) можно показать, что при наличии соотношений (14)–(20) и выполнении условий

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{a_0 B_{13}}{\alpha_1}, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad 2\alpha_3 B_{13} + \alpha_1(B_{11} - B_{33}) = 0, \\ 2B_{11}[\alpha_1 A_{33} + \alpha_3(A_{22} - A_{11})] + B_{13}(\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13}) &= 0, \\ 2k &= \frac{1}{\alpha_1}[2a_0^2 \alpha_3 B_{13} - \alpha_1(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33})]\end{aligned}\tag{23}$$

система уравнений (8)–(10) допускает решение

$$\dot{\varphi} = \sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi}, \quad \lambda = p_0 + \varepsilon_0 \sqrt{c_0 + c_1 \sin \varphi},\tag{24}$$

которое порождает прецессию, определяемую первой, второй и четвертой формулами из системы (22). Отличие данной прецессии при условиях (23) от прецессии в случае (22) состоит в том, что для нее матрица B в первом уравнении из системы (1) отлична от нулевой матрицы и постоянная $k \neq 0$. При этом величина гиросtatического момента в силу (24) содержит аддитивную постоянную p_0 .

Следовательно, условия существования прецессии при $p_1 = 0$, $p_0 \neq 0$ характеризуются равенствами (14)–(20), (23). Она описывается эллиптическими функциями времени.

Таким образом, в работе получены два новых решения уравнений движения гиростата с переменным гиросtatическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил, которые описывают прецессионное движение класса Докшевича. При этом первое решение имеет аналог для случая движения гиростата под действием силы тяжести.

1. *Ишлунский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – Москва: Наука, 1976. – 670 с.
2. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.

3. Гопр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 573–587.
4. Гопр Г. В., Мазнев А. В., Щетинина Е. К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
5. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. Math. Pures et Appl. – 1858. – **3**. – Р. 1–25.
6. Volterra V. Sur la thèorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – Р. 201–358.
7. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: Собр. соч. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1949. – Т. 2. – С. 152–309.
8. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика тв. тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
9. Дружинин Э. И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
10. Ковалева Л. М., Позднякович А. Е. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика тв. тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
11. Волкова О. С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Там же. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
12. Волкова О. С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
13. Волкова О. С., Гашененко И. Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика тв. тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
14. Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
15. Докшевич А. И. Об одном частном решении задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР. – 1966. – **167**, № 6. – С. 1251–1252.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 11.05.2011

О. В. Мазнев

Один випадок прецесії загального виду в задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом

Розглянуто прецесію загального виду в задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом. Отримано нові розв'язки рівнянь руху гіростата, які характеризуються постійністю добутку швидкостей прецесії та власного обертання.

A. V. Maznyev

The case of general-view precession in the gyrostat motion problem with a variable gyrostatic moment

A general-view precession in the gyrostat motion problem with a variable gyrostatic moment is examined. The new solutions of the gyrostat motion equations which are characterized by the constancy of the product of the velocities of precession and own rotation are obtained.