



УДК 539.3

© 2012

А. Я. Григоренко, И. А. Лоза

Осесимметричные колебания полых цилиндров из функционально градиентных материалов

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Рассматривается задача о собственных осесимметричных колебаниях неоднородных по толщине полых цилиндров из функционально градиентных материалов. Свойства материала непрерывно изменяются в радиальном направлении. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних нагрузок и покрыты бесконечно тонкими закороченными электродами. Для решения данной задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После применения метода разделения переменных и метода сплайн-коллокаций по длине цилиндра исходная задача теории электроупругости сводится к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученная задача решается устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Приведены результаты численного анализа спектра собственных частот осесимметричных колебаний полого цилиндра из функционально градиентной пьезокерамики PZT 4.

Пьезоэлектрические материалы широко используются как актуаторы и сенсоры в “умных” и “адаптивных” системах благодаря наличию в них внутренне им присущему свойству — пьезоэффекту, т. е. свойству связанности электрического поля (электростатический потенциал) с механическим (полем перемещений и напряжений). Для достижения больших деформаций пьезоэлектрические актуаторы часто конструируют в форме многослойных композиционных структур, соединяя два или более пьезокерамических слоя. Соединение из двух различных пьезоэлектрических материалов или из одинаковых с различными направлениями предварительной поляризации приводит к концентрации напряжений на границе раздела двух сред, что инициирует развитие микротрещин и негативно сказывается на сроке службы устройств, использующих данное соединение. Для решения указанной проблемы был разработан новый вид материалов — так называемые функционально градиентные пьезоэлектрические материалы (ФГПМ). Это новый вид материалов, материальный состав и свойства которых непрерывно меняются в определенном направлении. Пьезоэлектрические устройства могут быть изготовлены как целиком из ФГПМ, так и использовать их

в качестве промежуточных слоев между двумя различными пьезоэлектрическими материалами. ФГПМ специально разработаны для придания материалу желаемых свойств в строго определенных приложениях. Использование ФГПМ позволяет избежать концентрации напряжений на границе раздела двух сред по сравнению с традиционными биморфами. Актуаторы с использованием ФГПМ позволяют достигать больших перемещений и в то же время минимизировать внутренние напряжения, что, несомненно, благотворно сказывается на надежности и сроке эксплуатации указанных устройств.

Ввиду того, что данное направление развивается совсем недавно и задача значительно усложнена тем, что физические свойства материала являются функциями одной из координат, известно лишь незначительное количество публикаций, посвященных данной тематике. Это статические одномерные задачи [1–4]. Для решения задачи, рассматриваемой в настоящей работе, предлагается использовать эффективный численно-аналитический подход, с успехом применявшийся для решения аналогичных задач для упругих тел [5–7], а также для однородных пьезокерамических цилиндров [8, 9].

Некоторые аспекты нестационарного электромеханического поведения пьезокерамических тел исследованы на основании численного подхода в работах [10–13].

Рассматривается задача о собственных осесимметричных колебаниях полого цилиндра из функционально градиентного пьезокерамического материала. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Торцы цилиндра жестко заземлены и свободны от электродов.

Уравнения осесимметричных гармонических колебаний в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения электростатики —

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (2)$$

соотношения Коши —

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ρ — плотность материала; ω — круговая частота; u_i — компоненты вектора перемещений; D_i — компоненты вектора электрической индукции; E_i — компоненты вектора напряженности электрического поля; ϕ — электростатический потенциал; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для материала, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; & \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z; & \sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z; \\ D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{13}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z; & D_z &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае, если материал поляризован в осевом направлении,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z; & \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; & \sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r; \\ D_r &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_r; & D_z &= e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь c_{ij} — компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} — компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала. Будем рассматривать случаи, когда указанные выше компоненты изменяются по экспоненциальному закону в направлении радиальной координаты и по степенному закону:

$$c_{ij} = c_{ij}^o e^{mr}, \quad e_{ij} = e_{ij}^o e^{mr}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^o e^{mr}, \quad (6)$$

$$c_{ij} = c_{ij}^o r^m, \quad e_{ij} = e_{ij}^o r^m, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^o r^m, \quad (7)$$

где c_{ij}^o , e_{ij}^o и ε_{ij}^o — значения соответствующих модулей на внешней поверхности цилиндра, а значение m определяется экспериментально и обычно находится в пределах $-2 \leq m \leq 2$.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующие.

Поверхности свободны от внешних усилий $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ и покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$.

Торцы цилиндра (при $z = \pm L/2$) жестко заземлены $\tilde{u}_r = 0$; $\tilde{u}_z = 0$ и свободны от электродов: $D_z = 0$.

Здесь R_0 — радиус серединной поверхности цилиндра; h — половина толщины цилиндра; L — длина цилиндра.

Для решения данной задачи предлагается эффективный численно-аналитический подход. После разделения переменных и применения метода сплайн-коллокаций по осевой координате исходная двумерная задача дифференциальных уравнений в частных производных сводится к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях по радиальной координате [8, 9]

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R} \quad (8)$$

с граничными условиями

$$B_1\mathbf{R}(-1) = 0, \quad B_2\mathbf{R}(1) = 0. \quad (9)$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^o}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}^o}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^o}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h};$$

h — половина толщины цилиндра; ρ — плотность материала цилиндра; R_0 — радиус серединной поверхности; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10}/\text{Нм}^2$.

Ненулевые элементы матрицы A для случая осевой поляризации пьезокерамики имеют вид [8]:

$$A_{12} = 1; \quad A_{21} = -\Phi_2^{-1} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{11}\Omega^2}{\Delta} \Phi_2 + \frac{\Delta_6}{\Delta} \Phi_2'' \right); \quad A_{22} = -\Phi_2^{-1} \frac{1}{x} \Phi_2;$$

$$\begin{aligned}
A_{23} &= -\Phi_2^{-1} \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_1''; & A_{25} &= -\Phi_2^{-1} \left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right) \frac{1}{x} \Phi_1'; & A_{26} &= -\Phi_2^{-1} \left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right) \Phi_1'; \\
A_{34} &= 1; & A_{42} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \Phi_2'; & A_{43} &= \Phi_1^{-1} \left(\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{11}} \right) \Phi_1 + \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \Phi_1'' \right); \\
A_{44} &= \Phi_1^{-1} \frac{1}{x} \Phi_1; & A_{46} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{1}{x} \Phi_1''; & A_{56} &= 1; \\
A_{61} &= -\Phi_1^{-1} \left(\frac{\tilde{e}_{15} \Omega^2}{\Delta} \Phi_2 - \frac{\Delta_3}{\Delta} \Phi_2'' \right); & A_{63} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_1'; & A_{64} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_2}{\Delta} \Phi_1'; \\
A_{65} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \Phi_1'; & A_{66} &= -\Phi_1^{-1} \frac{1}{x} \Phi_1',
\end{aligned}$$

а матрицы B_i [8]:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{12} \frac{1}{x_0} & \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{e}_{13} & 0 \\ \tilde{c}_{55} & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 & \tilde{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{12} \frac{1}{x_N} & \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{e}_{13} & 0 \\ \tilde{c}_{55} & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 & \tilde{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \tilde{e}_{15}^2 + \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{11}; & \Delta_1 &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{15}; & \Delta_2 &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{13} - \tilde{c}_{13} \tilde{e}_{15}; & \Delta_3 &= \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{15}; \\
\Delta_4 &= \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{11}; & \Delta_5 &= \tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{11} \tilde{c}_{13}; & \Delta_6 &= \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{15} + \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{11},
\end{aligned}$$

для случая радиальной поляризации пьезокерамики [9] —

$$\begin{aligned}
A_{12} &= 1; & A_{21} &= -\Phi_2^{-1} \left(\frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} \Phi_2 + \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \Phi_2'' \right); & A_{22} &= -\Phi_2^{-1} \frac{1}{x} \Phi_2; \\
A_{23} &= -\Phi_2^{-1} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x} \Phi_2''; & A_{24} &= -\Phi_2^{-1} \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x} \Phi_1'; & A_{25} &= -\Phi_2^{-1} \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x} \Phi_1'; \\
A_{26} &= -\Phi_2^{-1} \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \Phi_1'; & A_{34} &= 1; & A_{41} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_2'; & A_{42} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\Delta_2}{\Delta} \Phi_2'; \\
A_{43} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\Delta_3}{\Delta} \Phi_1''; & A_{44} &= \Phi_1^{-1} \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{x} \Phi_1; \\
A_{45} &= -\Phi_1^{-1} \left(\left(\Omega^2 - \frac{\tilde{c}_{11}}{x^2} \right) \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \Phi_1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \Phi_1'' \right); & A_{46} &= \Phi_1^{-1} \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_1'; & A_{56} &= 1; \\
A_{61} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_2'; & A_{62} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\Delta_6}{\Delta} \Phi_2'; & A_{63} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\Delta_7}{\Delta} \Phi_1''; \\
A_{64} &= \Phi_1^{-1} \frac{\tilde{e}_{15} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_1; & A_{65} &= -\Phi_1^{-1} \left(\left(\Omega^2 - \frac{\tilde{c}_{11}}{x^2} \right) \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta} \Phi_1 + \frac{\Delta_8}{\Delta} \Phi_1'' \right); \\
A_{66} &= \Phi_1^{-1} \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} + 1 \right) \frac{1}{x} \Phi_1,
\end{aligned}$$

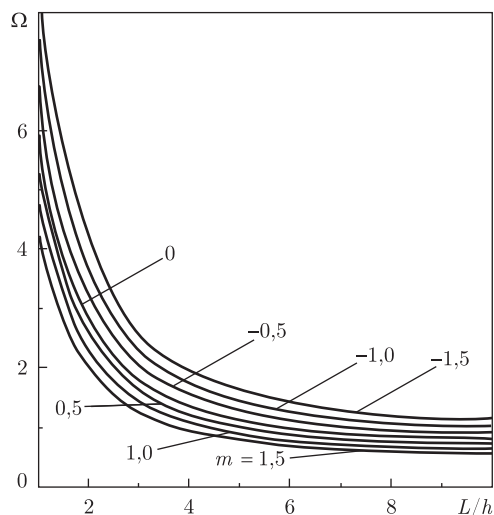


Рис. 1

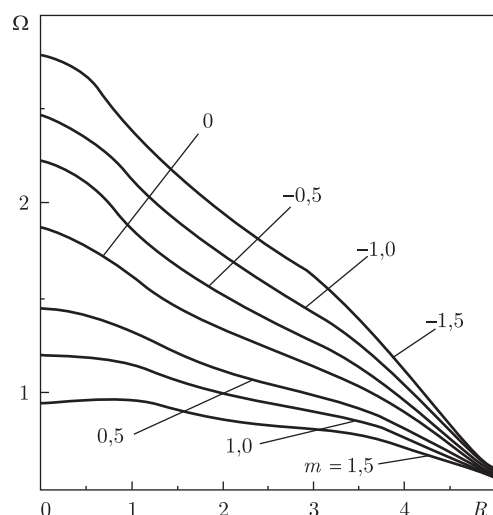


Рис. 2

а матрицы B_i [9]:

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_{13} \frac{1}{x_0} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & e_{33} \\ c_{55} & 0 & 0 & c_{55} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} c_{13} \frac{1}{x_N} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & e_{33} \\ c_{55} & 0 & 0 & c_{55} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13})\tilde{e}_{33} + \tilde{c}_{33}\tilde{e}_{13}, & \Delta_2 &= \tilde{c}_{33}(\tilde{e}_{15} + \tilde{e}_{33}) - (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})\tilde{e}_{33}, \\ \Delta_3 &= \tilde{c}_{33}\tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15}\tilde{e}_{33}, & \Delta_4 &= \tilde{c}_{33}\tilde{e}_{15} - \tilde{c}_{55}\tilde{e}_{33}, & \Delta_5 &= (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13})\tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}, \\ \Delta_6 &= (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})\tilde{e}_{33} - (\tilde{e}_{15} + \tilde{e}_{33})\tilde{e}_{33}, & \Delta_7 &= \tilde{e}_{33}\tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{15}\tilde{e}_{33}. \end{aligned}$$

Входящие в выражения элементов матриц A выражения Φ_i представляют собой линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке Δ ; $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$.

Решение задачи (8), (9) было выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Ниже приведены результаты численного анализа задачи (8), (9). На рис. 1 представлена зависимость первой собственной частоты от безразмерной длины цилиндра для различных значений параметра m (материал поляризован в радиальном направлении, а свойства материала меняются по степенному закону (7) в направлении радиальной координаты). При этом внешний радиус цилиндра $R_+ = 5$, внешний — $R_- = 3$. Когда $m = 0$ имеем случай однородного материала рассмотренный в работе [9]. На внешней поверхности цилиндра при $R_+ = 5$ заданы следующие характеристики пьезокерамики PZT 4:

$$\begin{aligned} c_{11}^0 &= 13,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; & c_{12}^0 &= 7,43 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; & c_{13}^0 &= 7,78 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; \\ c_{33}^0 &= 11,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; & c_{55}^0 &= 2,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; \\ e_{13}^0 &= -5,2 \frac{\text{K}}{\text{M}^2}; & e_{15}^0 &= 12,7 \frac{\text{K}}{\text{M}^2}; & e_{33}^0 &= 15,1 \frac{\text{K}}{\text{M}^2}; & \varepsilon_{11}^0 &= 730; & \varepsilon_{33}^0 &= 635. \end{aligned}$$

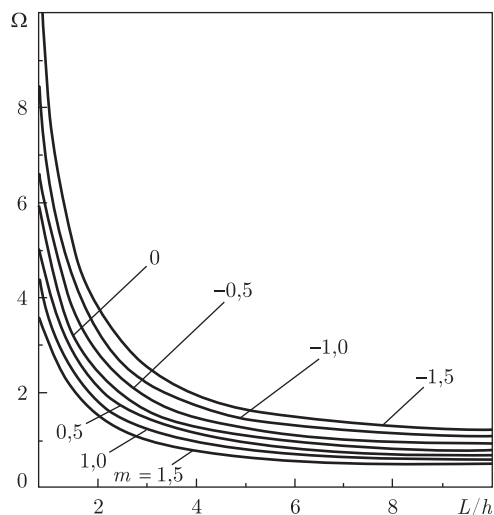


Рис. 3

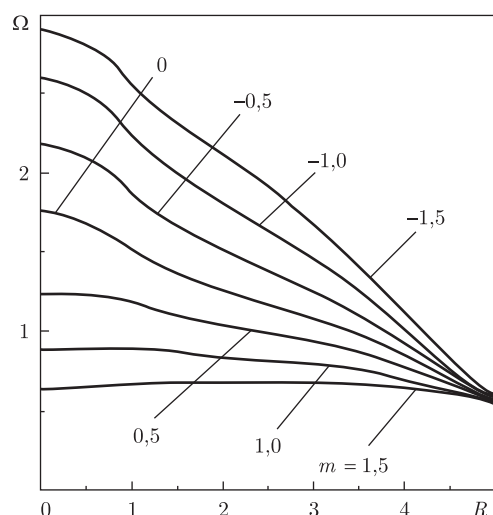


Рис. 4

Как видно из приведенного рисунка, меньшим значениям степени m соответствуют большие значения собственных частот. Причина становится очевидной, если рассмотреть изменение физико-механических характеристик градиентного материала по толщине для различных значений параметра m . Меньшим значениям параметра m соответствуют большие значения упругих модулей на внутренней поверхности цилиндра.

Рис. 2 демонстрирует зависимость первой собственной частоты от внутреннего диаметра цилиндра (R_-) для различных значений параметра m , при этом длина цилиндра ($L = 5$) и его внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне — от 0,05 до 4,95 безразмерных единиц. То есть от практически сплошного цилиндра до тонкой цилиндрической оболочки.

Анализируя приведенный рисунок, можно также отметить соответствие меньшим значениям степени m больших значений собственных частот, а также тот факт, что для более толстых цилиндров влияние показателя степени более значительно.

На рис. 3 представлена зависимость первой собственной частоты от безразмерной длины цилиндра для различных значений параметра m (материал поляризован в осевом направлении, а свойства материала меняются по экспоненциальному закону (6) в направлении радиальной координаты). При этом внешний радиус цилиндра $R_+ = 5$, внутренний — $R_- = 3$. Когда $m = 0$, имеем случай однородного материала, рассмотренный в работе [8]. На внешней поверхности цилиндра при $R_+ = 5$ заданы также характеристики пьезокерамики PZT 4.

Как видно из приведенного рисунка, так же, как и в случае радиальной поляризации, меньшим значениям степени m соответствуют большие значения собственных частот.

На рис. 4 представлена зависимость первой собственной частоты от внутреннего диаметра цилиндра (R_-) для различных значений m , при этом длина цилиндра ($L = 5$) и его внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными.

Анализируя приведенный рисунок, можно также отметить соответствие меньшим значениям степени m больших значений собственных частот, а также тот факт, что для более толстых цилиндров влияние показателя степени более значительно.

1. *Dai H. L., Fu Y. M., Yang J. H.* Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere // *Acta Mech. Sin.* – 2007. – **23**. – P. 55–63.
2. *Dai H. L., Hong L., Fu Y. M., Xiao X.* Analytical solution for electromagnetoelastothermoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder // *Appl. Math. Modeling.* – 2010. – **34**. – P. 343–357.
3. *Khoshgoftar M. J., Ghorbanpour A., Arefi M.* Thermoelastic analysis of thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric materials // *Smart Mater. Struct.* – 2009. – **18**. – P. 115007.
4. *Jabbary M., Sohrabpour S., Eslami M.* Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2002. – **79**. – P. 493–497.
5. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G.* Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basis of different models. – Киев: ИД “Академперіодика”, 2009. – 549 с.
6. *Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P.* Stress-strain state of shallow shells with rectangular planform and varying thickness: Refined formulation // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **41**, No 10. – P. 1132–1141.
7. *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Using Spline-Approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of thick-walled orthotropic cylinders // *Ibid.* – 2008. – **44**, No 10. – P. 1137–1147.
8. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А.* Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 6. – С. 61–66.
9. *Лоза И. А.* Свободные колебания пьезокерамических полых цилиндров с радиальной поляризацией // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 4. – С. 138–145.
10. *Shul'ga N. A., Grigorieva L. O.* Studying the electroelastic deformation of layer under mechanical loading by the method of characteristics // *Inter. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No 1. – P. 82–89.
11. *Shul'ga N. A., Grigorieva L. O.* Radial electromechanical non-stationary vibrations of a hollow piezoceramic cylinder under elastic excitation // *Ibid.* – No 2. – P. 230–235.
12. *Shul'ga N. A., Grigorieva L. O.* On electroelastic non-stationary vibrations of a piezoceramic layer // *Ibid.* – No 3. – P. 373–381.
13. *Shul'ga N. A., Grigorieva L. O.* Radial elasto-electric nonstationary oscillations of piezoceramic cylinder under mechanical loading // *Ibid.* – No 4. – P. 466–471.

*Институт механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Национальный транспортный университет, Киев*

Поступило в редакцію 06.04.2011

О. Я. Григоренко, І. А. Лоза

Осесиметричні коливання порожнистих циліндрів з функціонально градієнтних п'єзокерамічних матеріалів

Розглядається задача про власні осесиметричні коливання неоднорідних за товщиною порожнистих циліндрів з функціонального градієнтного п'єзоелектричного матеріалу. Власності матеріалу неперервно змінюються у радіальному напрямі. Бічні поверхні циліндра вільні від зовнішніх навантажень та вкриті нескінченно тонкими замкнутими електродами. Для розв'язання цієї задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Після застосування методу розділення змінних та методу сплайн-колокацій по довжині циліндра початкова задача теорії електропружності у частинних похідних зводиться до крайової задачі на власні значення у звичайних диференціальних рівняннях. Отримана задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покровкового пошуку. Наведено результати чисельного аналізу спектра власних частот осесиметричних коливань порожнистого циліндра з функціонально градієнтної п'єзокераміки PZT.

A. Ya. Grigorenko, I. A. Loza

Axisymmetric natural vibrations of a hollow cylinder made of a functionally graded piezoceramic material

The problem on axisymmetric natural vibrations of a hollow inhomogeneous cylinder made of a functionally graded piezoceramic material is considered. Material properties are varying continuously in the radial direction. Lateral faces of the cylinder are free from environmental loads and are coated by short-circuited electrodes. After the separation of variables and the application of the spline-collocation method, the initial problem of the theory of electroelasticity in partial derivatives is reduced to a boundary-value problem with a system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem obtained is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization coupled with the incremental search method. The numerical results for the natural frequencies of vibrations of a FGPM hollow cylinder are presented.