

УДК 532.5

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. МАКАСЕЕВ*

* Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

Получено 11.05.2000 ◊ Пересмотрено 14.02.2002

Задача двумерной теории установившегося движения по волновой поверхности идеальной несжимаемой весомой жидкости в горизонтальном направлении слабо изогнутой пластины сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно распределения давления на пластине. Решения интегрального уравнения определяются в трех классах функций, соответствующих движению на различных режимах глиссирования и плавания. Численные решения получены методом дискретных вихрей. Решена задача о глиссировании с неизвестной смоченной длиной.

Задача двовимірної теорії сталеного руху по хвильовій поверхні ідеальної нестисливої вагомій рідині у горизонтальному напрямку слабо зігнутої пластини зводиться до сингулярного інтегрального рівняння відносно розподілу тиску на пластині. Розв'язки інтегрального рівняння розшукуються у трьох класах функцій, що відповідають руху на різних режимах глісування та плавання. Чисельні розв'язки отримані за методом дискретних вихорів. Розв'язана задача про глісування із невідомою змоченою довжиною.

The problem of two-dimensional theory of steady motions on a wave surface of an ideal incompressible powerful liquid in a horizontal direction is gentle of a bent plate is reduced to a singular integral equation concerning pressure profile on a plate. The solutions of an integral equation are determined in three classes of functions conforming to motion with different modes of gliding and sailing. The numerical solutions are obtained by a method of discrete vortexes. The problem about a gliding with obscure wetted length is resolved.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи о движении тел по поверхности жидкости в режиме глиссирования или плавания сводятся при обоснованных предположениях к упрощенной задаче о движении слабо изогнутой пластины.

Плоская задача об установившемся глиссировании пластины по поверхности весомой жидкости впервые была решена Л. И. Седовым [1, 2], а затем Н.Е.Кочиним, который использовал иной метод решения [3]. Численные расчеты по методу Л.И.Седова для плоской пластины провел Ю.С.Чаплыгин [4], им получены основные данные по коэффициентам сил и моментов (результаты [4] содержатся в [2]), позже численные расчеты продолжил М. Н. Николаев [5, 6], исследовавший форму свободной поверхности. По методу Н. Е. Кочина расчеты, по-видимому, не проводились. Методы Л. И. Седова и Н. Е. Кочина основаны на использовании аппарата теории функций комплексного переменного и пригодны только к плоским задачам.

Более универсальным является метод интегральных уравнений. В теории глиссирования его основы исходят из решения так называемой обратной задачи теории волновых движений жидкости – определения формы свободной поверхности при движении по ней заданного распределения давления [7]. Решение такой задачи сводится к интегральным и интегро-дифференциальным со-

отношениям, которые можно использовать и для решения прямой задачи о глиссировании заданного профиля. Один из возможных подходов к такому решению можно найти в книге Л. Н. Сретенского [8], где решение сводится к интегро-дифференциальному уравнению. Аналогичный подход использовали Мауро [9], Squire [10] и для больших чисел Фруда Kumberbatch [11].

Метод интегральных уравнений, как известно, широко используется в теории крыла. Задача глиссирования как предельный случай движения крыла под свободной поверхностью рассматривалась в рамках этого метода А. Н. Панченковым в [12], где в самом общем виде записано интегральное уравнение глиссирующей несущей поверхности.

Следует отметить, что, несмотря на имеющуюся аналогию с теорией крыла, в задачах глиссирования есть свои существенные трудности, многие из которых до настоящего времени не преодолены. В то же время интегральные уравнения теории крыла, являющиеся в большинстве случаев сингулярными, уже достаточно хорошо исследованы, для них разработано много специальных методов численного решения. Методы сингулярных интегральных уравнений могут быть успешно использованы и в волновых задачах весомой жидкости.

В настоящей работе двумерная задача установившегося движения пластины по поверхности весомой жидкости сводится к сингулярному инте-

гравальному уравнению. Решения уравнения рассматриваются в трех классах функций, соответствующих различным физическим условиям движения. Это открывает возможности для решения новых задач – например, рассмотрено установившееся движение пластины по волновой поверхности в режиме плавания, а также глиссирование с заданной нагрузкой либо осадкой задней кромки, с переменной смоченной длиной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

По поверхности идеальной несжимаемой весомой жидкости движется с постоянной скоростью V_0 слабо изогнутая пластина бесконечно большого удлинения, элементы которой наклонены под небольшими углами к горизонту. Подвижную систему координат $Ox'y'$ свяжем с пластиной так, что ось x' направлена горизонтально вдоль невозмущенного уровня свободной поверхности жидкости в сторону, противоположную движению пластины, а ось y' направлена вертикально и проходит через ее переднюю кромку. Длину проекции пластины на ось x' считаем равной a . Течение жидкости относительно пластины считаем установившимся и безвихревым, т. е. существует потенциал скорости $\varphi'(x', y')$ возмущенного течения. Давление p' на свободной поверхности жидкости постоянно и равно p_0 , плотность жидкости ρ постоянна по всему объему. На смоченной поверхности пластины выполняется условие непротекания.

Будем предполагать, что впереди перед пластиной могут быть независимые от ее движения установившиеся регулярные волны малой амплитуды.

Введем безразмерные величины – координаты $x = x'/a$, $y = y'/a$, давление $p = (p' - p_0)/\rho V_0^2$, потенциал возмущенной скорости $\varphi = \varphi'/aV_0$.

Пусть форма пластины описывается функцией $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, форма свободной поверхности $y = \eta(x)$, $x \leq 0$, $x \geq 1$. При предположениях о малости углов наклона элементов пластины к горизонту $\|f'(x)\| = \varepsilon \ll 1$, о малости амплитуд независимых волн $\|\eta(x)\|_{x \rightarrow -\infty} = O(\varepsilon)$ и о малости возмущенных скоростей $\|\partial\varphi/\partial x\| = O(\varepsilon)$, $\|\partial\varphi/\partial y\| = O(\varepsilon)$, граничные условия постоянства давления на свободной поверхности и непротекания смоченной поверхности пластины можно линеаризовать путем отбрасывания величин порядка ε^2 и снесения условий на ось x .

Скорость V_* распространения прогрессивной волны по поверхности жидкости бесконечной глубины, как известно [8], связана с длиной волны λ соотношением $V_* = \sqrt{g\lambda/2\pi}$. В случае установившегося движения следует положить $V_* = V_0$. То-

гда безразмерная длина установившихся волн будет $\lambda = 2\pi Fr^2$, где $Fr = V_0/\sqrt{ga}$ – число Фруда; g – ускорение свободного падения; амплитуду волн будем задавать.

Для потенциала скорости возмущенного течения имеем следующую линеаризованную краевую задачу [2]: найти функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа, условию постоянства давления на свободной границе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \nu\eta(x), \quad y = 0, x < 0, x > 1, \quad (1)$$

где $\nu = 1/Fr^2$; условию непротекания смоченной границы пластины:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f'(x), \quad y = 0, 0 < x < 1; \quad (2)$$

условию затухания возмущений скорости на глубине:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Условиям (1) и (3) удовлетворяет функция

$$\varphi(x, y) = \mathbf{Re} \left\{ e^{-i\nu z} \left[A_1 + iA_2 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^z \int_0^1 \frac{\gamma(\xi) e^{i\nu t}}{t - \xi} d\xi dt \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\gamma(x) = p(x, 0)$, $z = x + iy$ – комплексная переменная; A_1 и $A_2 = -$ произвольные достаточно малые постоянные, определяющие амплитуду независимых волн (при $A_1 = A_2 = 0$ впереди волн нет).

Потенциал (4) рассматривался в [2] как решение задачи о волнах при перемещении заданного давления по поверхности весомой жидкости. Для полного решения поставленной нами задачи необходимо найти такую функцию γ , чтобы выполнялось условие (2).

Для вертикальной составляющей скорости на действительной оси из выражения (4) можно получить:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{y=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \nu \left[A_1 \cos \nu x + A_2 \sin \nu x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_0^1 \frac{\gamma(s) \sin \nu(t-x)}{t-s} ds dt \right].$$

Первый интеграл в правой части существует в смысле главного значения. Двойной интеграл запишем в виде:

$$\int_{-\infty}^x \int_0^1 \frac{\gamma(s) \sin \nu(t-x)}{t-s} ds dt = \int_0^1 \gamma(s) R(x-s, \nu) ds, \quad (5)$$

где

$$R(x, \nu) = \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(\nu x) \right] \cos \nu x - \text{Ci}(\nu|x|) \sin \nu x;$$

$\text{Si}(x)$ и $\text{Ci}(x)$ – интегральные синус и косинус [13]. Функция $R(x, \nu)$ ограничена при всех x и конечных ν , в частности, $\lim_{x \rightarrow 0} R(x, \nu) = \pi/2$, поэтому интеграл (5) существует в обычном смысле.

На основании условия (2) теперь можно записать интегральное уравнение относительно $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \frac{\nu}{\pi} \int_0^1 \gamma(s) R(x-s, \nu) ds = -f'(x) - \nu (A_1 \cos \nu x + A_2 \sin \nu x), \quad (6)$$

$$0 < x < 1.$$

Все основные гидродинамические характеристики глассирующей пластины и кинематические характеристики течения определяются после решения уравнения (6) через функцию $\gamma(x)$. В частности, коэффициент подъемной силы

$$c_y = 2 \int_0^1 \gamma(x) dx, \quad (7)$$

форма свободной поверхности при $x < 0$ и $x > 1$ вычисляется, с учетом выражения (4), по формуле

$$\eta(x) = \left\{ \text{Im} e^{-i\nu z} \left[A_1 + iA_2 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^z \int_0^1 \frac{\gamma(\xi) e^{i\nu t}}{t-\xi} d\xi dt \right] \right\}_{y=0} = -A_1 \sin \nu x + A_2 \cos \nu x - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \gamma(s) \left\{ \cos \nu(x-s) \text{Ci}(\nu|x-s|) + \sin \nu(x-s) \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(\nu(x-s)) \right] \right\} ds. \quad (8)$$

На большом удалении от пластины при $x \rightarrow \infty$ форма свободной поверхности, как следует из фор-

мулы (8), представляет собой установившиеся волны

$$\eta(x)|_{x \rightarrow \infty} = - \int_0^1 \gamma(s) \sin \nu(x-s) ds - A_1 \sin \nu x + A_2 \cos \nu x \quad (9)$$

с амплитудой $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, где

$$B_1 = - \int_0^1 \gamma(s) \cos \nu s ds - A_1, \\ B_2 = \int_0^1 \gamma(s) \sin \nu s ds + A_2.$$

Подъем свободной поверхности вблизи передней кромки пластины будет:

$$\eta(0) = - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \gamma(x) \left\{ \cos \nu x \text{Ci}(\nu x) + \sin \nu x \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(\nu x) \right] \right\} dx. \quad (10)$$

При $\nu \rightarrow 0$ (невесомая жидкость), учитывая, что

$$\text{Ci}(\nu x) = \ln \gamma^* \nu x + \int_0^{\nu x} \frac{\cos t - 1}{t} dt,$$

где γ^* – постоянная Эйлера, получаем

$$\eta(0) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[- \frac{1}{\pi} \int_0^1 \gamma(x) \ln \gamma^* \nu x dx \right].$$

Отсюда следует, что при $\nu \rightarrow 0$

$$\eta(0) = O\left(\frac{c_y}{2\pi} \ln \gamma^* \nu\right),$$

т. е. для модели невесомой жидкости высота подъема пластины при постоянной смоченной длине стремится к бесконечности, что соответствует выводам [2]. Этот факт является следствием принятого в стационарной постановке задачи выбора смоченной длины в качестве характерной, используемой для вычисления числа Фруда. В реальных условиях высота подъема глассера ограничивается нагрузкой (весом глассера), а при увеличении скорости (уменьшении ν) уменьшается смоченная длина.

3. О РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Полное сингулярное интегральное уравнение первого рода (6), как известно [14], допускает решения в трех классах функций. Класс функций определяется физическими условиями – поведением решения γ на концах отрезка интегрирования и связью с выбором константы $\Gamma = \int_0^1 \gamma(x)dx$, имеющей физический смысл циркуляции возмущенной скорости и равной, как следует из уравнения (7), $c_y/2$.

По аналогии с теорией крыла, требование выполнения условия Кутта-Жуковского о равенстве нулю перепада давления в точке схода струи ($\gamma(1) = 0$) дает единственное решение уравнения (6) в классе функций, ограниченных при $x = 1$ и неограниченных при $x = 0$. Этому классу решений соответствует глиссирование пластины с гладким сходом струи в задней кромке и критической точкой в передней кромке. Методом Л. И. Седова в [1, 2, 4–6] при заданной смоченной длине исследовалось решение именно из этого класса.

В теории крыла решение в классе функций, ограниченных на обоих концах отрезка интегрирования, известно как “безударный вход”. Оно определяется при дополнительных ограничениях на правую часть сингулярного интегрального уравнения, т. е. на геометрию крыла – крыло должно иметь такое положение относительно потока и иметь вблизи передней кромки такую форму (кривизну), чтобы перепад давления в ней отсутствовал. Такое ограничение может быть введено и в случае движения по поверхности жидкости. Например, при установившемся движении пластины в режиме плавания по волновой поверхности потребуем, чтобы пластина принимала такое положение относительно волны, при котором перепад давления в передней и задней кромках равен нулю. Если форму пластины определить как $f(x) = -\alpha x + \bar{f}(x) + h$, где α – угол наклона; \bar{f} – функция, задающая малую кривизну; h – константа (подъем пластины, $h = \eta(0)$), то можно считать неизвестной величиной угол наклона пластины α и заданной \bar{f} . Тогда уравнение (6) следует рассматривать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \frac{\nu}{\pi} \int_0^1 \gamma(s) R(x-s, \nu) ds - \alpha = \\ = -\bar{f}'(x) - \nu (A_1 \cos \nu x + A_2 \sin \nu x), \\ 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (11)$$

с дополнительным неизвестным α . Рассмотрение таких движений представляет интерес при исследованиях режимов захвата малых плавающих тел поверхностной волной [15] в связи с проблемами волнового дрейфа, а также в задачах теории качки корабля, использования волновой энергии.

Решения уравнения вида (6) в классе функций, неограниченных на обоих концах, существует при дополнительных ограничениях в интегральной форме на искомую функцию. Например, может быть заданная циркуляция скорости или коэффициент подъемной силы. Уравнение (6) при этом следует решать с дополнительным условием (7). Очевидно, что в качестве дополнительного условия можно использовать и соотношение (10). Тогда заданным будет подъем пластины, по которому определится величина коэффициента подъемной силы.

В классе функций, неограниченных на обоих концах, из уравнения (6) может быть найдено решение задачи о глиссировании пластины с интерцептором в задней кромке [16]. Дополнительным уравнением в этом случае будет интегральное соотношение, записанное для малого скачка $\delta = f(1) - \eta(1)$, моделирующего в рамках линейной теории интерцептор.

Требование выполнения условия Кутта-Жуковского в точке схода струи при постоянном угле хода и заданном коэффициенте подъемной силы или заданной нагрузке приводит к задаче с неизвестной смоченной длиной. Решение уравнения (6) тогда необходимо искать в классе функций, неограниченных в передней кромке и ограниченных в задней, с дополнительным условием, задающим коэффициент подъемной силы либо нагрузку. Дополнительное условие приводит к необходимости введения еще одной неизвестной величины, которой и будет переменный верхний предел интегрирования – смоченная длина.

При такой постановке задачи необходимо поновому определить характерную длину для вычисления числа Фруда. В задаче с заданным коэффициентом подъемной силы c_y в качестве характерной длины можно взять смоченную длину $a = l_0$ при $\nu \rightarrow 0$ (для невесомой жидкости). Обозначим неизвестную безразмерную длину через l . Для определения $\gamma(x)$ и l будем иметь систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \frac{\nu}{\pi} \int_0^l \gamma(s) R(x-s, \nu) ds = -f'(x) - \\ - \nu (A_1 \cos \nu x + A_2 \sin \nu x), \quad 0 < x < l. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_0^l \gamma(x) dx = c_y/2. \quad (13)$$

Как видно, эта задача нелинейна относительно l .

В задаче с заданной нагрузкой в качестве характерной длины следует взять [17] $a = \sqrt[3]{\Delta/\rho g}$, где Δ – нагрузка (вес глссера) (для пространственной задачи $a = \sqrt[3]{\Delta/\rho g}$). Коэффициент подъемной силы тогда

$$c_y = \frac{2\Delta}{\rho V_0^2 a} = \frac{2}{Fr^2} = 2\nu. \quad (14)$$

Учитывая соотношения (7) и (14), уравнение (12) теперь надо решать с условием

$$\int_0^l \gamma(x) dx = \nu. \quad (15)$$

Для подъема свободной поверхности вблизи передней кромки при $\nu \rightarrow 0$ из выражения (10) можно получить:

$$\eta(0) = O(\nu \ln \gamma^* \nu),$$

т. е. высота подъема пластины при постоянной нагрузке с увеличением скорости глссера стремится к нулю.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим движение плоской пластины, когда $f'(x) = -\alpha$. Независимые волны на бесконечности перед пластиной, как следует из формулы (8), имеют синусоидальный вид: $\eta(x)_{x \rightarrow -\infty} = -A_1 \sin \nu x + A_2 \cos \nu x = -A \sin(\nu x - \theta)$, где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ – амплитуда волны. Положение пластины относительно волны задается параметром θ , при этом $A_1 = A \cos \theta$, $A_2 = A \sin \theta$. Величину θ достаточно брать из интервала $[0, 2\pi]$.

Для решения уравнения (6) воспользуемся численным методом дискретных вихрей (МДВ) [18, 19]. Не останавливаясь на подробностях, связанных с реализацией метода, отметим лишь, что класс функций, в котором ищется численное решение сингулярного интегрального уравнения методом дискретных вихрей, выбирается с учетом взаимного расположения точек определения функции γ и точек, в которых удовлетворяется условие обтекания (расчетные точки) и определяется так называемым Б-условием метода дискретных вихрей [19]: к тем кромкам, где решение должно быть неограниченным, ближайшими располагаются дискретные вихри (точки определения γ), а к тем, где оно ограничено – расчетные точки.

4.1. Решение в классе функций, ограниченных при $x = 1$ и неограниченных при $x = 0$

Функция γ определяется в точках $s_j = (j - 3/4)/N$, $j = \overline{1, N}$; условие гладкого обтекания выполняется в точках $x_i = (i - 1/4)/N$, $i = \overline{1, N}$. При этом уравнение (6) заменяется системой N линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных.

Результаты, которые дает метод интегральных уравнений в этом классе решений, практически совпадают с известными данными Л. И. Седова. Приведем некоторые результаты, не содержащиеся в работах [1, 2, 4–6].

Рис. 1 иллюстрирует влияние числа Фруда на

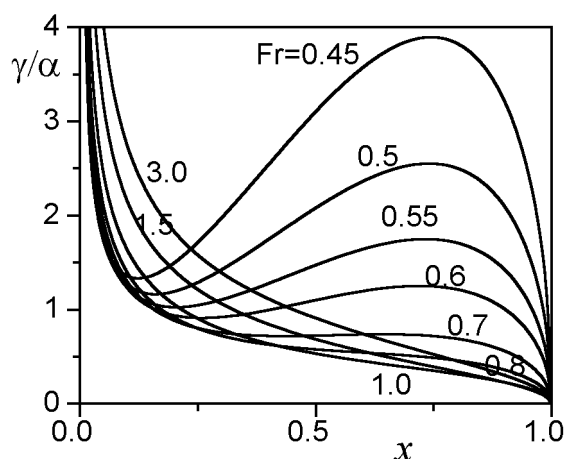


Рис. 1. Распределение давления по глссирующей пластине при различных числах Фруда

распределение давления при глссировании при отсутствии волн впереди ($A = 0$). Форма свободной поверхности перед и за пластиной показана на рис. 2. Форма свободной поверхности при наличии волн перед пластиной показана на рис. 3.

Амплитуда волны $A/\alpha = 1$, число Фруда $Fr = 0.8$.

В работе [6] предложено рассмотреть нестационарное движение пластины по волне в виде последовательности ее положений относительно волны в стационарной задаче. Метод интегральных уравнений представляет собой достаточно удобный инструмент для решения такой квазистационарной задачи, при этом надо положить $\theta = vt$, где v – скорость движения пластины относительно волны; t – время. С изменением величины параметра θ , определяющего положение пластины относительно волны, изменения всех гидродинамических характеристик имеют периодический характер, однако при подъеме пластины на гребень волны и опускании до впадины они при постоянном угле атаки отличаются, т. е. наблюдается

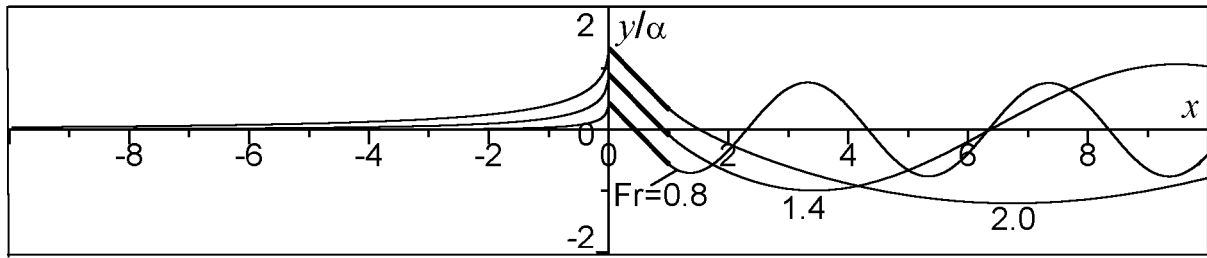


Рис. 2. Форма свободной поверхности при отсутствии волн перед пластиной при различных числах Фруда

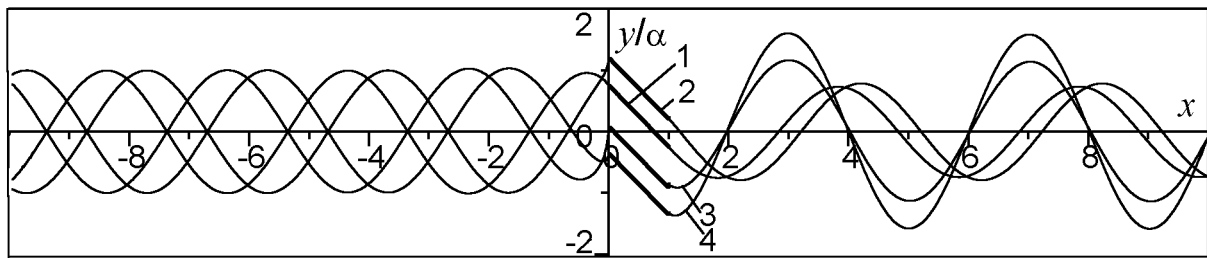


Рис. 3. Форма свободной поверхности при наличии волн перед пластиной $Fr = 0.8$; $1 - \theta = 1.047$; $2 - \theta = 2.094$; $3 - \theta = 4.189$; $4 - \theta = 5.236$

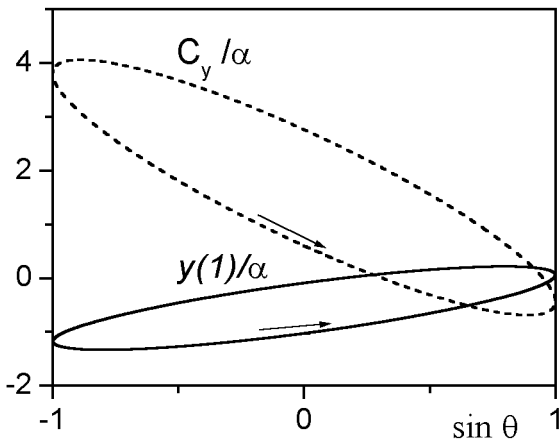


Рис. 4. Гистерезис зависимостей коэффициента подъемной силы c_y/α и осадки задней кромки $y(1)/\alpha$ от $\sin \theta$

гистерезис характеристик. В качестве примера на рис. 4 приведены зависимости коэффициента подъемной силы и осадки задней кромки пластины от величины $\sin \theta$, определяющей высоту невозмущенной волны в точке, соответствующей передней кромке пластины. Отметим, что явление гистерезиса гидродинамических характеристик при подъеме и опускании глассера установлено экспериментально Л. А. Эшштейном (см. [20]).

4.2. Решение в классе функций, ограниченных при $x = 0$ и $x = 1$

Как уже отмечалось, в этом случае в число неизвестных будет входить также угол наклона пластины α . Интегральное уравнение имеет вид (11). Функция γ определяется в точках $s_j = (2j-1)/2N$, $j = \overline{1, N}$; условие гладкого обтекания выполняется в точках $x_j = (i-1)/N$, $i = \overline{1, N+1}$. При этом уравнение (11) заменяется системой $N+1$ линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных γ и неизвестного α .

На рис. 5 показана форма свободной поверхности, отнесенная к амплитуде волны, образующаяся при движении пластины со скоростью волны при числе Фруда $Fr = 0.8$. Распределение давления для тех же вариантов, что и на рис. 5, показано на рис. 6. Угол наклона пластины, отнесенный к амплитуде волны, как функция двух переменных – числа Фруда и параметра θ – представлен на рис. 7. Как видно, угол наклона стремится к нулю уже при числах Фруда порядка 2.5 – 3.

В случае длинных волн здесь также можно рассмотреть квазистационарную задачу о плавающей пластине в условиях волнения, при этом $v = \theta/t$ будет трактоваться как скорость набегающей волны.

4.3. Решение в классе функций, неограниченных при $x = 0$ и $x = 1$

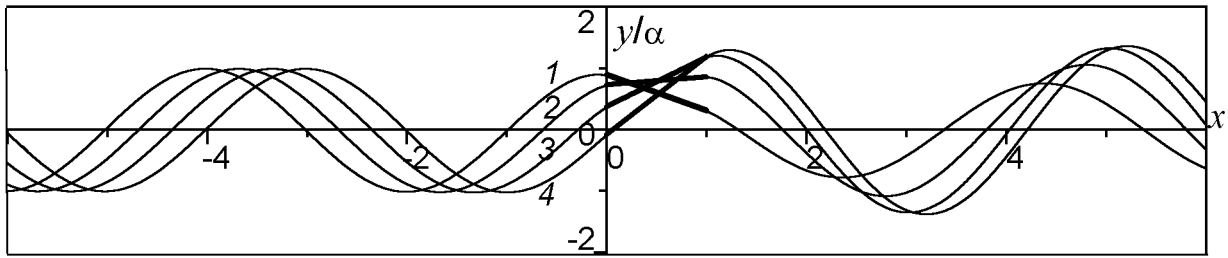


Рис. 5. Форма свободной поверхности при свободном установлении угла наклона пластины, $Fr = 0.8$: 1 - $\theta = 1.571$; 2 - $\theta = 2.094$; 3 - $\theta = 2.618$; 4 - $\theta = 3.142$

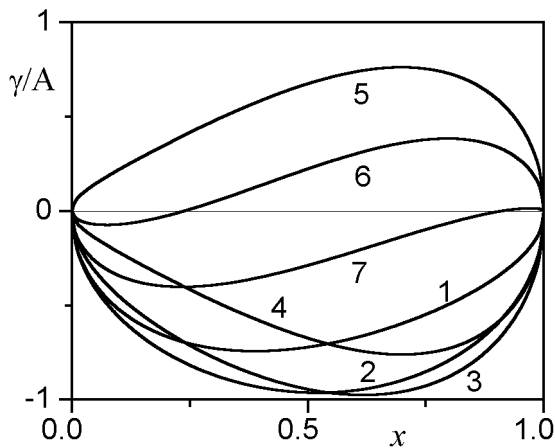


Рис. 6. Распределение давления по пластине при $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$, $Fr = 0.8$: 1 - $\theta = 1.571$; 2 - $\theta = 2.094$; 3 - $\theta = 2.618$; 4 - $\theta = 3.142$; 5 - $\theta = 0$; 6 - $\theta = 0.524$; 7 - $\theta = 1.047$

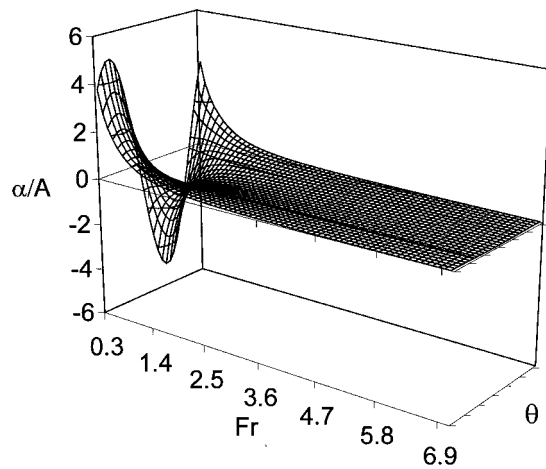


Рис. 7. Угол наклона пластины как функция от Fr и θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Установившееся течение при движении пластины с заданным коэффициентом подъемной силы при постоянной смоченной длине определяется из решения уравнения (6) с условием (7) в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка интегрирования. Функция γ в этом случае определяется в точках $s_j = (j-1)/N$, $j = \overline{1, N+1}$; условие гладкого обтекания выполняется в точках $x_i = (2i-1)/2N$, $i = \overline{1, N}$. При этом уравнения (6) и (7) заменяются системой $N+1$ линейных алгебраических уравнений с $N+1$ неизвестными γ_j .

На рис. 8 показано распределение давления при $c_y/\alpha = 0$ (бесциркуляционное течение) для различных чисел Фруда и при отсутствии волн перед пластиной. Форма свободной поверхности для этих же значений параметров показана на рис. 9.

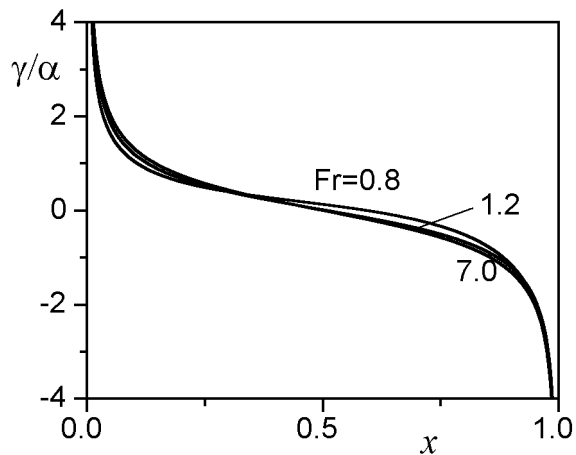


Рис. 8. Распределение давления по пластине при $c_y/\alpha = 0$ для различных чисел Фруда

4.4. Решение с неизвестной смоченной длиной

Численное решение системы (12), (13) с помощью МДВ определяется по схеме дискретизации, изложенной в п. 4.1. Система интегральных урав-

нений в результате заменяется системой нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейность в данном случае создается одной переменной – смоченной длиной l . Для решения такой алгебраической системы воспользуемся методом последова-

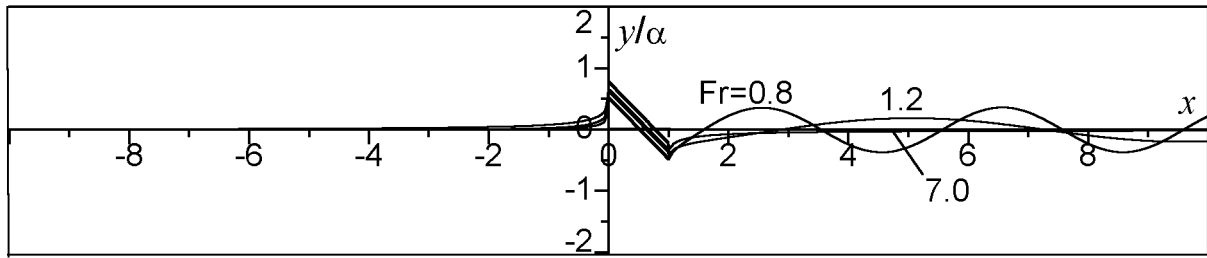


Рис. 9. Форма свободной поверхности при $c_y/\alpha = 0$

тельной минимизации [21]. Алгебраическую систему можно записать в виде

$$C(l)X = b, \quad (16)$$

где C – матрица, состоящая из N столбцов и $N+1$ строки; b – столбец правых частей размерности $N+1$; X – вектор-столбец из N неизвестных значений функции γ . Элементы матрицы C зависят от l . Общее решение нелинейной системы (16) определяется как решение задачи поиска нулевого минимума по l функции

$$F(l) = \min_X (C(l)X - b)^T (C(l)X - b).$$

На рис. 10 показана зависимость приведенной

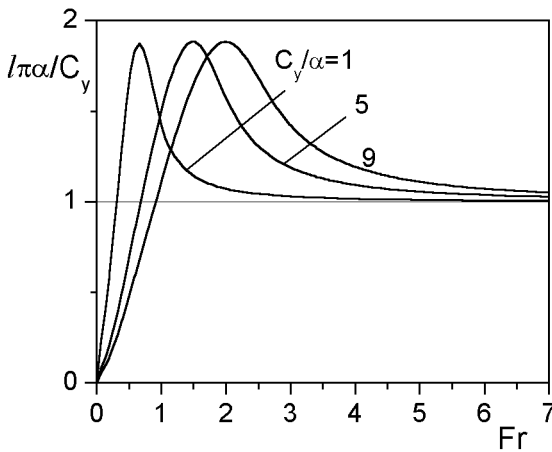


Рис. 10. Зависимость приведенной смоченной длины от числа Фруда при различных c_y/α

смоченной длины глассирующей пластины $l\pi\alpha/c_y$ от числа Фруда для различных заданных значений коэффициента подъемной силы. Как видно, при увеличении числа Фруда (увеличении скорости) при постоянной нагрузке смоченная длина глассера вначале растет, а затем, начиная с некоторого значения, убывает до стационарного значения, соответствующего невесомой жидкости и равно $c_y/\pi\alpha$.

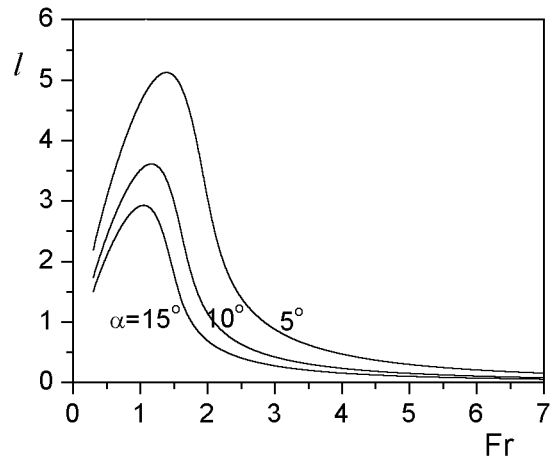


Рис. 11. Зависимость смоченной длины при глассировании с постоянной нагрузкой от числа Фруда

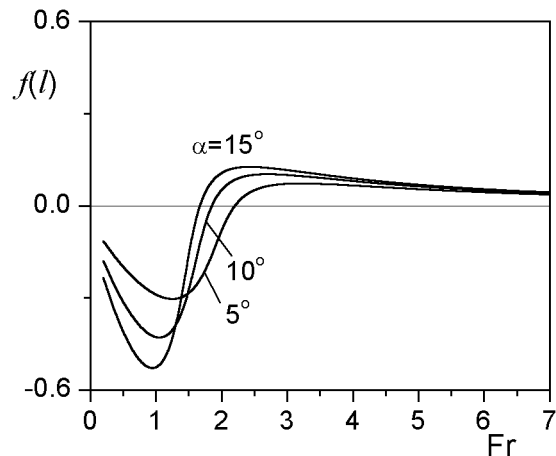


Рис. 12. Зависимость осадки задней кромки пластины от числа Фруда при глассировании с постоянной нагрузкой

Система уравнений (12), (15) решается аналогично. На рис. 11 и 12 представлены зависимости соответственно смоченной длины пластины и осадки задней кромки от числа Фруда при глассировании с заданной нагрузкой. При $\nu \rightarrow 0$ ($Fr \rightarrow \infty$) и смоченная длина, и подъем пласти-

ны стремятся к нулю, что соответствует реально наблюдаемым на практике явлениям при глиссировании с большими скоростями.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установившиеся движения слабо изогнутой пластины по волновой поверхности несжимаемой жидкости описываются сингулярным интегральным уравнением относительно распределения давления по смоченной длине. Решение уравнения существует в трех классах функций, соответствующих движению на различных режимах.

Решение, неограниченное в передней кромке и ограниченное в точке схода струи, соответствует глиссированию с заданным углом хода и при заданной смоченной длине совпадает с известным решением Л. И. Седова.

Рассмотрение решений в других классах функций дает возможность для постановок и решения новых задач.

Так, решение, ограниченное на обеих кромках, соответствует движению пластины со скоростью волны и свободным установлением угла наклона (в режиме плавания). В классе функций, неограниченных на обеих кромках при заданной смоченной длине, можно найти решение задачи о глиссировании с дополнительными ограничениями – на величину коэффициента подъемной силы, осадку задней кромки и др. В этом же классе функций определяется решение задачи о глиссировании пластины с интерцептором в задней кромке.

Решение задачи о глиссировании с заданным коэффициентом подъемной силы или заданной нагрузкой и требованием выполнимости постулата Кутта-Жуковского определяется в классе функций, неограниченных на передней кромке и ограниченных в задней, но с неизвестной смоченной длиной глиссера. Показано, что при глиссировании с постоянной нагрузкой при увеличении скорости движения уменьшается смоченная длина и уменьшается высота подъема глиссера.

Использование решений в разных классах функций позволяет получать стационарные гидродинамические характеристики глиссирующих и плавающих тел, кроме того, их можно применять для оценочных расчетов нестационарного движения в квазистационарном приближении.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. И. Ефремову за внимание к работе, полезные советы и критические замечания.

1. Седов Л.И. Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости // Труды конф. по

- волновому сопротивлению.– М.: ЦАГИ.– 1937.– С. 3-38.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.– М.: Наука, 1981.– 448 с.
3. Кочин Н.Е. Плоская задача о глиссировании слабо изогнутого контура по поверхности тяжелой несжимаемой жидкости // Труды ЦАГИ.– 1938.– Вып. 356.– С. 3 – 24.
4. Чаплыгин Ю.С. Глиссирование плоской пластины бесконечного размаха по поверхности тяжелой жидкости // Труды ЦАГИ.– 1940.– Вып. 508.– С. 3 – 40.
5. Николаев М.Н. Форма свободной поверхности тяжелой жидкости при глиссировании пластинки бесконечного размаха // Труды ЦАГИ.– 1974.– Вып. 1548.– С. 3 – 19.
6. Николаев М.Н. К решению плоской задачи о глиссировании по взволнованной поверхности тяжелой жидкости // ПММ.– 1977.– Т. 41.– С. 985 – 992.
7. Ламб Г. Гидродинамика.– М.-Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
8. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1978.– 550 с.
9. Магуо Н. Two-dimensional theory of the hydroplane // Proceedings of the 1-st Japan National Congress for Applied Mechanics.– Tokyo.– 1952.– P. 409 – 415.
10. Squire H.V. The motion of a simple wedge along the water surface // Proceedings of the Royal Society of London. S. A. Math. And Phys. sc.– 1958.– vol. 243.– P. 48 – 64.
11. Cumberbatch E. Two-dimensional planing at high Froude number // J. of Fluid Mech.– 1958.– vol. 4, part 5, september.– P. 466 – 478.
12. Панченков А.Н. Гидродинамика подводного крыла.– Киев: Наук. думка, 1965.– 552 с.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.– М.: Наука, 1977.– 342 с.
14. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: ГИФМЛ, 1962.– 600 с.
15. Марченко А.В. О режимах плавания малого тела под влиянием поверхностной волны // ПММ.– 1999.– 3.– С. 489 – 496.
16. Фридман Г.М. Гидродинамика несущих систем с учетом кавитации и свободных границ потока на основе метода сращиваемых асимптотических разложений.– Санкт-Петербургский гос. морск. техн. университет: Автореф. дисс. докт. техн. наук, 2000.– 41 с.
17. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.– М.: Наука, 1981.– 448 с.
18. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.– М.: Наука, 1965.– 244 с.
19. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.– М.: Наука, 1985.– 256 с.
20. Лотов А.Б. Глиссирование и быстрый вход тел в воду.– М.: Изд. МИФИ, 1984.– 108 с.
21. Роман В.М., Макасеев М.В. Расчет формы каверны за суперкавитирующим крылом конечного размаха // Динамика сплошной среды с нестационарными границами.– Чебоксары: Изд-во Чуваш. унта.– 1984.– С. 103 – 109.