УДК 517.944

Академік НАН України **А. М. Самойленко, Н. Г. Хома,**
С. Г. Хома-Могильська

Окремий випадок існування 2π-періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку

Вперше у спеціально виділеному класі функцій $A_2^+ = \{g\colon g(x,t) = -g(\pi-x,t) = -g(x,\pi-t) = g(x,-t)\}$ побудовано оператор, який переводить клас 2π-періодичних функцій самого в себе.

У роботі [1] побудовано оператор, за допомогою якого можна встановити умови існування розв'язку крайової періодичної задачі вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

У даній роботі доведемо, що у спеціально виділеному класі функцій можна досліджувати існування розв'язку задачі (1)–(3). Для цього введемо такі позначення: C_π — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathbb{R}$; $C_\pi^{k,l}$ — простір таких функцій $u \in C_\pi$, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$; $G_{\pi t}$ — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ разом з похідною за t; Q_ω — простір функцій $g(x,t)$, які задовольняють на $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ співвідношення $g(x,t+\omega) = g(x,t)$, тобто Q_ω — простір ω-періодичних функцій за змінною t, сюди будемо включати і ω–періодичні функції $\mu = \mu(t)$ однієї змінної; $L(X,Y)$ — простір лінійних і обмежених відображень X в Y; A_2^+ — клас функцій

$$A_2^+ = \{g\colon g(x,t) = -g(\pi-x,t) = -g(x,\pi-t) = g(x,-t)\}.$$

Розглянемо функцію

$$\widetilde{u}(x,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv (Sg)(x,t). \tag{4}$$

Справедливим є твердження:

Лема 1. *Якщо $g \in C_\pi \bigcap A_2^+$, то $Sg \in C_\pi^{1,1} \bigcap A_2^+$.*

Доведення. Те, що $Sg \in C_\pi^{1,1}$, випливає з властивостей інтегралів із змінною верхньою межею. Перевіримо, чи $Sg \in A_2^+$, тобто чи виконуються такі рівності:

$$(Sg)(x,-t) = (Sg)(x,t),$$

$$(Sg)(\pi-x,t) = -(Sg)(x,t),$$

$$(Sg)(x,\pi-t) = -(Sg)(x,t).$$

На підставі формули (4) маємо

$$(Sg)(x,-t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{-t-x+\xi}^{-t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{-t+x-\xi}^{-t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,-\theta)\,d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,-\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta = (Sg)(x,t);$$

$$(Sg)(\pi-x,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi-x} d\xi \int\limits_{t-\pi+x+\xi}^{t+\pi-x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_{\pi-x}^\pi d\xi \int\limits_{t+\pi-x-\xi}^{t-\pi+x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_\pi^x d\eta \int\limits_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} g(\pi-\eta,\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_x^0 d\eta \int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} g(\pi-\eta,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x d\eta \int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} g(\eta,\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\eta \int\limits_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} g(\eta,\tau)\,d\tau = -(Sg)(x,t);$$

$$(Sg)(x,\pi-t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{\pi-t-x+\xi}^{\pi-t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{\pi-t+x-\xi}^{\pi-t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\pi-\theta)\,d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\pi-\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta = -(Sg)(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Теорема 1. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$, *то функція* $u(x,t) = (R_2^+ g)(x,t)$, *яка визначена формулою*

$$u(x,t) = (R_2^+ g)(x,t) \equiv (Sg)(x,t) + \frac{\pi-2x}{4\pi}\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} d(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

є единою функцією з простору $C_\pi^{2,2} \bigcap A_2^+$, *яка задовольняє умови крайової періодичної зада-*

чі (1)–(3). *Крім того,* $R_2^+ \in L(C_\pi \bigcap A_2^+,\ C_\pi^{1,1} A_2^+)$, $R_2^+ \in L(G_{\pi t} \bigcap A_2^+,\ C_\pi^{2,2} \bigcap A_2^+)$, *при цьому*

$$\begin{aligned}
&\|(R_2^+ g)(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi^2}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi};\\
&\|(R_2^+ g)_t(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi};\\
&\|(R_2^+ g)_x(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \pi\|g(x,t)\|_{C_\pi},
\end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\|\varphi(x,t)\|_{C_\pi} = \sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times R} |\varphi(x,t)|.$$

Доведення. Оскільки при $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$ функція $(Sg)(x,t)$ є розв'язком неоднорідного рівняння (1) [2], а функція

$$(Z_2^+ g)(x,t) = \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{7}$$

з урахуванням того, що при $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$

$$\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \equiv (Sg)(0,t) = \mathrm{const}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком однорідного рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, то функція $u = R_2^+ g = Sg + Z_2^+ g$ є розв'язком 2π–періодичної задачі (1), (3). Вона також задовольняє крайові умови $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Справді,

$$(R_2^+ g)(0,t) = -\frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = 0, \qquad t \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned}
(R_2^+ g)(\pi,t) &= -\frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\eta \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\eta \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Отже, $(R_2^+ g)(0,t) = (R_2^+ g)(\pi,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Таким чином, $u(x,t) = (R_2^+ g)(x,t)$ задовольняє крайові умови (2).

Доведемо тепер, що оператор $R_2^+ \colon A_2^+ \to A_2^+$. Оскільки $R_2^+ = S + Z_2^+$, а за лемою 1 $S \colon A_2^+ \to A_2^+$, то для доведення потрібно показати, що $Z_2^+ \colon A_2^+ \to A_2^+$.

Використовуючи (7) при $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$, одержуємо

$$(Z_2^+ g)(x,-t) = \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{-t-\xi}^{-t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t+\xi}^{t-\xi} g(\xi,-\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta = (Z_2^+ g)(x,t);$$

$$(Z_2^+ g)(\pi - x,t) = \frac{-\pi + 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -\frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -(Z_2^+ g)(x,t);$$

$$(Z_2^+ g)(x,\pi - t) = \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{\pi-t-\xi}^{\pi-t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -\frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t+\xi}^{t-\xi} g(\xi,\pi-\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} d(\xi,\theta)\,d\theta = -(Z_2^+ g)(x,t).$$

Звідси, на підставі одержаних рівностей, випливає, що $Z_2^+ \colon A_2^+ \to A_2^+$.

Доведемо тепер справедливість оцінок (6). Оскільки

$$\|(R_2^+ g)(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \|(Sg)(x,t)\|_{C_\pi} + \|(Z_2^+ g)(x,t)\|_{C_\pi}, \tag{8}$$

то доведемо, що

$$\|(Sg)(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \|g(x,t)\|_{C_\pi}$$

і

$$\|(Z_2^+ g)(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

Записавши функцію $\widetilde{u}(x,t) = (Sg)(x,t)$, визначену згідно з формулою (4), у вигляді

$$(Sg)(x,t) = \int\limits_0^{\pi} Q(\xi)\,d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

де

$$Q(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}, & 0 \leqslant \xi \leqslant x, \\ \dfrac{1}{4}, & x < \xi < \pi, \end{cases}$$

матимемо, що

$$|(Sg)(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}\int\limits_0^\pi |x-\xi|\,d\xi = \frac{1}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}\left(\int\limits_0^x (x-\xi)\,d\xi - \int\limits_x^\pi (x-\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{(\pi-x)^2}{2}\right) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

Отже,

$$\|(Sg)(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\|g(x,t)\|_{C_\pi}. \tag{9}$$

Оскільки

$$\max_{[0,\pi]}\left|\frac{\pi-2x}{4\pi}\right| \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{і} \qquad \left|\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau), d\tau\right| \leqslant \pi^2\|g(x,t)\|_{C_\pi},$$

то

$$\|(Z_2^+ g)(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\|g(x,t)\|_{C_\pi}. \tag{10}$$

Таким чином, підставляючи оцінки (9) і (10) у (8), одержуємо першу оцінку (6).
Ураховуючи, що при $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$

$$(R_2^+ g)_t(x,t) = (Sg)_t(x,t) \equiv \int\limits_0^\pi Q(\xi)\{g(\xi,t+x-\xi) - g(\xi,t-x+\xi)\}\,d\xi,$$

одержуємо

$$\|(R_2^+ g)_t(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

Оскільки

$$(R_2^+ g)_x(x,t) = (Sg)_x(x,t) + (Z_2^+ g)_x(x,t) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_0^\pi Q(\xi)\{g(\xi,t+x-\xi) + g(\xi,t-x+\xi)\}\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

то

$$\|(R_2^+ g)_x(x,t)\|_{C_\pi} \leqslant \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi} + \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi} = \pi\|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

Теорему 1 доведено.

Беручи до уваги те, що оператор R_2^+ переводить парну за t функцію $g(x,t)$ у парну функцію $(R_2^+ g)(x,t)$, і враховуючи властивості тригонометричних рядів Фур'є, доведемо, що розв'язок $u(x,t)=(R_2^+g)(x,t)$ крайової періодичної задачі (1)–(3) розкладається лише за косинусами, тобто при певних умовах він зображається рядом

$$u(x,t)=(R_2^+g)(x,t)=\frac{a_0(x)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)\cos kt. \tag{11}$$

Крім цього, враховуючи формулу обчислення коефіцієнтів Фур'є $a_k(x)$ функції $(R_2^+g)(x,t)\in A_2^+$, тобто формулу

$$a_k(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(R_2^+g)(x,t)\cos kt\,dt, \qquad k=0,1,2,\ldots, \tag{12}$$

переконуємося в справедливості такого твердження.

Лема 2. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\bigcap A_2^+$, *то* $a_{2n}(x)=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. Справді, на підставі теореми 1 та формули (12) при $g\in G_{\pi t}\bigcap A_2^+$ маємо, що $R_2^+g\in A_2^+\bigcap C_\pi^{2,2}$ і

$$a_k(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(R_2^+g)(x,t)\cos kt\,dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(R_2^+g)(x,t)\cos kt\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(R_2^+g)(x,t)\cos kt\,dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(R_2^+g)(x,\pi-\tau)\cos k(\pi-\tau)\,d\tau=$$

$$=\begin{cases}0, & k=2n, \qquad n=0,1,2,\ldots;\\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}(R_2^+g)(x,\tau)\cos k\tau\,d\tau, & k=2n-1, \qquad n=1,2,\ldots,\end{cases}$$

що й потрібно було довести.

Отже, при відповідних умовах, накладених на функцію $g(x,t)$ — праву частину неоднорідного рівняння (1), розв'язок крайової періодичної задачі (1)–(3) у класі функцій A_2^+ має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t+\frac{a_0(x)}{2}. \tag{13}$$

1. *Самойленко А. М., Хома-Могильська С. Г.* Аналітичний метод відшукання 2π-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку // Доп. НАН. України. – 2010. – № 4. – С. 25–29.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 07.04.2011

Академик НАН Украины **А. М. Самойленко, Н. Г. Хома,**
С. Г. Хома-Могильская

Частный случай существования 2π-периодических решений краевых задач для гиперболического уравнения второго порядка

Впервые в специально выделенном классе функций $A_2^+ = \{g\colon g(x,t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = g(x, -t)\}$ *построен оператор, который переводит класс* 2π*-периодических функций самого у себя.*

Academican of the NAS of Ukraine **A. M. Samoilenko, N. H. Khoma,**
S. H. Khoma-Mohylska

Special case of the existence of 2π-periodic solutions to boundary-value problems for hyperbolic equations of the second order

In a special function class $A_2^+ = \{g\colon g(x,t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = g(x, -t)\}$, *an operator which transfers the class of* 2π*-periodic functions into itself is constructed for the first time.*