

УДК 551.511.001: 551.593

РОЗСІЯННЯ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ НА ПЕРЕМІШАНІЙ ПЛЯМІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ НА В'ЯЗКО-ДИФУЗІЙНІЙ СТАДІЇ ЇЇ ЕВОЛЮЦІЇ

О. Г. СТЕЦЕНКО, П. В. ЛУК'ЯНОВ

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 24.07.2001

Розв'язана двовимірна задача про поле розсіяних внутрішніх хвиль, яке утворюється при набіганні монохроматичної внутрішньої хвилі на локалізовану неоднорідність поля густини (перемішану пляму), що знаходиться на в'язко-дифузійній стадії своєї еволюції для випадку, коли характерний хвильовий масштаб часу малий порівняно з характерним ентрюзійним масштабом часу. Наближений розв'язок у вигляді квадратур одержано з використанням методу малого параметра. Встановлені характерні особливості формування полів розсіяних хвиль із врахуванням динаміки перемішаної області.

Решена двумерная задача о поле рассеянных внутренних волн, образующихся при набегании монохроматических внутренних волн на локализованную неоднородность поля плотности (перемешанное пятно), находящуюся на вязко-диффузионной стадии своей эволюции. Приближенное решение в виде квадратур получено с использованием метода малого параметра. Установлены характерные особенности формирующихся полей рассеянных волн с учетом динамики перемешанного пятна.

The problem of internal waves scattering field has been solved. This field is formed when monochromatic internal wave run into localized density field heterogeneity (mixed patch). The heterogeneity is in its viscous-diffusive evolution stage. The typical wave scale of time is many times less than typical intrusive times scale. Approximation solution as integrals has been obtained by means of small parameter method. Typical features of forming scattering waves fields have been obtained. All this takes into account the dynamics of mixed patch.

ВСТУП

Динаміка атмосфери, морів і океанів у великій мірі визначається структуротворчими процесами, які там відбуваються. Значна частина з них обумовлена стратифікацією середовища. Механізми структуротворчих процесів мають різну фізичну природу, від явищ планетарного масштабу (циклони, океанські течії) до дрібномасштабної турбулентності включно. Чільне місце в цьому ряду займають процеси динаміки океану, обумовлені локалізованими збуреннями природного характеру, серед яких одним із найпоширеніших є локалізовані області неоднорідності розподілу густини (перемішані турбулентні плями). Такі області турбулентності, в силу ряду причин, пов'язаних з процесами втрати стійкості руху, постійно генеруються в океані та атмосфері, відіграючи істотну роль у процесах переносу маси та енергії. В той саме час, у таких стратифікованих середовищах завжди присутні поля фонових внутрішніх хвиль (ВХ). При проходженні внутрішніх хвиль через область перемішаної плями відбувається процес їх трансформації, в результаті чого утворюється поле розсіяних внутрішніх хвиль. Характер цього процесу визначається співвідношенням характерних просторових та часових масштабів динаміки самої плями і відповідних величин хвильо-

вого поля, а також внутрішньою структурою плями, яка, в свою чергу, змінюється за законами, характерними для стадії її еволюції. Еволюція турбулентної плями відбувається протягом трьох головних стадій – активної, проміжної та фінальної [1]. Тривалість перших двох стадій невелика, протягом них відбувається випромінювання внутрішніх хвиль та колапс самої плями з інтрюзійним розтіканням. Найбільш тривалою є фінальна стадія, коли еволюція перемішаних плям відбувається під дією сил плавучості, в'язкості й дифузії. Динаміка цієї еволюції включає в себе продовження, як і в попередніх етапах, процесу колапсу плями з розтіканням в горизонтальній площині під дією сил плавучості й в'язкості та ефекту розширення області плями через механізм дифузійного переносу. Комбінація вказаних механізмів спричинює ефект рестратифікації - вирівнювання профілю густини всередині плями відносно його незбуреного вигляду в навколишньому середовищі. Тому саме ця стадія представляє найбільший інтерес у задачах розсіяння фонових внутрішніх хвиль.

Принциповим для такого роду задач є наявність розривів профілю густини середовища та його трьох перших похідних на зовнішній границі плями. Якщо такі розриви мають місце, то в околі плями формуються пограничні шари і поле відбитих внутрішніх хвиль [2]. В класі задач, які роз-

глядають фінальну стадію еволюції перемішаних плям у полі внутрішньої хвилі, такі розриви відсутні. В цьому випадку має місце "м'яке" розсіяння ВХ на плямі [3], подібно до релеєвського розсіяння світла на м'яких частинках [4].

Формування поля розсіяних ВХ на плямі визначається співвідношеннями характерних лінійних розмірів набігаючої ВХ l_v і плями l_i та відповідно характерних часових масштабів хвильового t_w і інтрузійного процесів t_i . У випадку, коли $l_i \gg l_w$, процесом розсіяння можна знехтувати. Коли ж, навпаки, $l_i \ll l_w$, то має місце процес рефракції ВХ в області плями [5]. Практичний інтерес в задачах розсіяння ВХ на плямах представляють випадки $l_i \sim l_w$. Характер процесу розсіяння залежить від параметра τ , який визначається співвідношенням між t_w та t_i ($\tau = t_w/t_i$), структури набігаючої хвилі й характеру стратифікації середовища.

Якщо за хвильовий масштаб часу взяти величину $t_w = N^{-1}$, (тут

$$N = \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right)^{\frac{1}{2}}$$

– характерне значення частоти В'яйсяля-Брента середовища; $\bar{\rho}(z)$ – густина незбуреного середовища; ρ_0 – її деяке характерне значення), а за інтрузійний масштаб взяти величину [6] $t_i = N^{-2} l_v^{-2} \delta^{-2} \nu$, (де $\delta = l_v/l_H$, l_v, l_H – відповідно вертикальний і горизонтальний розміри плями, ν – кінематична в'язкість середовища), то величина параметра τ визначається виразом

$$\tau = N l_v^2 \delta^2 \nu^{-1}.$$

Інтерес до проблеми розсіяння ВХ на локалізованих неоднорідностях розподілу густини спричинив появу ряду робіт [3, 7 - 9]. Характерною їхньою особливістю було припущення "замороженості" внутрішньої структури цих збурень, що, звичайно, не відповідає дійсності, оскільки, як відзначалося вище, такого роду утворення мають змінну в часі геометрію і структуру. В період появи зазначених вище робіт не всі етапи еволюції перемішаних областей були досліджені, зокрема, зовсім не була вивчена в'язко-дифузійна стадія. Лише після виходу роботи [6], в якій детально досліджена саме ця стадія еволюції, та роботи [11], де встановлено, що навіть для випадку $l_w \gg l_i$ впливом нестационарності зміни поля стратифікації, обумовленої проходом в околі плями фонові внутрішньої хвилі, на динаміку в'язко-дифузійної стадії її еволюції можна знехтувати,

з'явилася можливість коректно розв'язати задачу розсіяння ВХ на такого роду областях.

У даній роботі розв'язується двовимірною задачею розсіяння монохроматичної ВХ на локалізованій перемішаній плямі, яка знаходиться в шарі скінченної товщини h лінійностратифікованої рідини з $N = \text{const}$ і перебуває на в'язко-дифузійній стадії своєї еволюції для випадку, коли $\tau \ll 1$. Розглядається лише однократне розсіяння ВХ на плямі.

1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Система рівнянь в наближенні Бусинеска, яка описує двовимірний рух стратифікованого середовища в полі лінійних внутрішніх хвиль, має вигляд [12] (індекс "w" позначає саме хвильовий характер руху).

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_w}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_w}{\partial x} - b_w = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_w}{\partial x} + \frac{\partial w_w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial b_w}{\partial t} + N^2 w = 0. \quad (4)$$

Тут u_w і w_w – відповідно горизонтальна і вертикальна складові швидкості; $b_w = -g(\rho - \bar{\rho})/\rho_0$ – збурена плавучість, ρ – густина середовища і g – прискорення сили тяжіння; частота В'яйсяля-Брента N виражається через b_w як $N = \partial b_w / \partial z$.

Система координат вибрана таким чином, що початок координат знаходиться на вільній поверхні, напрям вісі x співпадає з напрямом поширення фонових ВХ, а вісь z направлена вгору.

В'язко-дифузійна стадія еволюції двовимірної перемішаної плями описується рівняннями, одержаними в [6] (індекс "i" виділяє інтрузійний характер руху):

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_i}{\partial z} - b_i = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial b_i}{\partial x} + w_i \frac{\partial b_i}{\partial z} + N^2 w_i = \chi_T \frac{\partial^2 b_i}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Тут χ_T – коефіцієнт температуропровідності (важиться, що стратифікація обумовлена вертикаль-

ним градієнтом температури). Координати центра плями у вибраній системі координат – $x = 0$; $z = z_0$.

На підставі (1) – (8) система рівнянь в наближенні Бусинеска, яка описує динаміку середовища в процесі взаємодії плями і набігаючих на неї ВХ, представляється як

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - b = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} + N^2 w = \chi_T \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Початкові та граничні умови задачі задаються з врахуванням наступних міркувань, обумовлених тим, що розв'язання задачі відбувається паралельно для хвильового й інтрузійного процесів. Як показано в [11], інтрузійну задачу з достатнім ступенем точності можна розв'язувати автономно, без врахування впливу на динаміку плями поля набігаючих ВХ. Тому граничні й початкові умови необхідно задавати окремо для кожного з названих процесів.

Для турбулентних плям на в'язко-дифузійній стадії еволюції характерні горизонтальний l_H і вертикальний l_v розміри співвідносяться як $l_v \sim 0.01 l_H$, причому характерне значення l_v у морях і океанах складає величину порядку десятків сантиметрів – метрів. Тому на еволюцію плям безпосереднім впливом вільної поверхні і дна можна знехтувати. Отже, за припущення, що пляма знаходиться достатньо далеко від границі середовища, для інтрузійного процесу граничні й початкові умови задаються аналогічно випадку безмежного середовища

$$b_i, u_i, w_i \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty, \quad (13)$$

де $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Для розсіяної хвилі будуть виконуватись спрощені граничні умови, які випливають із загальноприйнятої заміни умови на вільній поверхні умовою "твердої кришки". Отже, для хвильової складової руху

$$w_w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{та} \quad z = -h. \quad (14)$$

Початкова умова для b_i має вигляд

$$b_i = b_{i0}(x, z) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (15)$$

Про початкові умови для u_w і w_w буде йти мова при розв'язанні хвильової задачі.

Вважається, що досліджувана пляма з'являється (немов би миттєво "включається") в деякий початковий момент часу. Динаміка досліджуваного процесу визначається трьома механізмами. Це набігаюча фонові ВХ, розсіяна внутрішня хвиля та інтрузійний процес розтікання плями. Перші два механізми мають характерний масштаб часу $t_w = N^{-1}$, в той час як процес еволюції плями відбувається з характерним часовим масштабом $t_i = \nu l_v^{-2} N^{-2} \delta^{-1}$ і відбувається без помітного впливу на нього набігаючої хвилі. Тому розв'язок поставленої задачі можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} u &= u_i(x, z, t_1) + u_{w0}(x, z, t) + u_{w1}(x, z, t, t_1), \\ w &= w_i(x, z, t_1) + w_{w0}(x, z, t) + w_{w1}(x, z, t, t_1), \\ b &= b_i(x, z, t_1) + b_{w0}(x, z, t) + b_{w1}(x, z, t, t_1), \\ p &= p_i(x, z, t_1) + p_{w0}(x, z, t) + p_{w1}(x, z, t, t_1), \end{aligned} \quad (16)$$

де $t_1 = \tau t$, а складові з індексами "w0" та "w1" відносяться відповідно до набігаючої і розсіяної хвилі.

Розв'язок інтрузійної задачі для b_i зводиться до інтегрування диференціального рівняння для допоміжної функції Q , такої, що $b_i = \partial^4 Q / \partial z^4$ [6]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^5 Q}{\partial t \partial z^4} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \epsilon_T \frac{\partial^6 Q}{\partial z^6} = \\ &= -\vartheta \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \frac{\partial^5 Q}{\partial x \partial z^4} - \frac{\partial^5 Q}{\partial z^5} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

з початковою умовою, що випливає з умови (15):

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} = b_{i0}(x, z) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (18)$$

і нульової граничної умови, що випливає з умови (15):

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

Шукана функція Q , величини t, x, z в задачі (17)–(18) обезрозмірені відповідно до характерних масштабів інтрузійної задачі, а саме: для $x - l_H$, для $z - l_v = \delta l_H$, для часу $t - \nu l_v^{-2} N^{-2} \delta^{-2}$, для горизонтальної швидкості $u_i - V_H = l_v^2 N^2 \delta / \nu$, для вертикальної швидкості $w - V_H \delta$, для тиску $p / \rho_0 - \nu V_H l_H^{-1} \delta^2 \vartheta$, для плавучості $b_i - \nu V_H l_v^{-3} \delta^{-1}$. Тут $\vartheta = \nu V_H l_v^{-3} \delta^{-1} N^{-2}$ – параметр, який характеризує ступінь перемішаності середовища всередині плями [6].

Після підстановки представлення (16) у систему (8)–(12), та врахування рівнянь (1)–(8), одержується система рівнянь, яка описує розсіану хвилю. Після обезрозмірювання з використанням характерних масштабів хвильової задачі, а саме: для

x і $z - h$, для часу $t - N^{-1}$, для складових швидкості u_{w1} і $w_{w1} - Nh$, для тиску $p/\rho_0 - N^2 h^2$, для плавучості $b - N^2 h$, ця система набирає вигляду

$$\frac{\partial u_{w1}}{\partial t} + \frac{\partial p_{w1}}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial w_{w1}}{\partial t} + \frac{\partial p_{w1}}{\partial z} - b_{w1} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_{w1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{w1}}{\partial z} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial b_{w1}}{\partial t} + w_{w1} = - \left(u_{w0} \frac{\partial b_i}{\partial x} + w_{w0} \frac{\partial b_i}{\partial z} \right). \quad (22)$$

Система рівнянь (19)–(22) в силу своєї лінійності легко зводиться до одного рівняння відносно вертикальної складової швидкості

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_{w1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{w1}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 w_{w1}}{\partial x^2} = \\ = - \left(u_{w0} \frac{\partial b_i}{\partial x} + w_{w0} \frac{\partial b_i}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

з граничними умовами

$$w_{w1} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{та} \quad z = -1. \quad (24)$$

Отже, для знаходження розв'язку задачі приймається така схема його побудови:

1. Розв'язується інтрузійна задача (17)–(19), в результаті чого визначається розподіл у часі плавучості $b_i(x, z, t_1)$.

2. Для вже відомої $b_i(x, z, t_1)$ знаходиться розв'язок рівняння (23) з граничними умовами (24) і початковими умовами, які відповідають умові миттєвого "включення" плями.

2. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В шарі скінченної товщини лінійностратифікованої рідини з $N = \text{const}$ для n -ої моди монохроматичної внутрішньої хвилі величина амплітуди визначається як [12]

$$\eta_n = a \sin(\pi n z) e^{i(kx - \omega_n t)}. \quad (25)$$

Компоненти швидкості в полі ВХ відповідно виражаються як

$$\begin{aligned} u_{w0}(x, z, t) = \frac{A_n \pi n i}{k} \cos(\pi n z) e^{i(kx - \omega_n t)}, \\ w_{w0}(x, z, t) = A_n \sin(\pi n z) e^{i(kx - \omega_n t)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Тут $A_n = -i a \omega_n$, а частота ω_n зв'язана з хвильовим числом k дисперсійним співвідношенням

$$\omega_n = \frac{k}{[k^2 + (\pi n)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Зважаючи на представлення (25), розв'язок задачі (23)–(24) шукається у вигляді

$$w_{w1} = \bar{w}(x, z, t_1) e^{-i\omega_n t}. \quad (27)$$

Оскільки $t_1 = \tau t$, то після підстановки представлення (27) у рівняння (23) одержимо

$$\begin{aligned} \left(\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - 2i\tau\omega_n \frac{\partial}{\partial t_1} - \omega_n^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = -A_n F(x, z, t_1), \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$F = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[\frac{\pi n i}{k} \cos(\pi n z) \frac{\partial b_i}{\partial x} + \sin(\pi n z) \frac{\partial b_i}{\partial z} \right] e^{ikx} \right\}.$$

Граничні умови для \bar{w} аналогічні умовам (24):

$$\bar{w} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{і} \quad z = -1. \quad (29)$$

В силу малості параметра τ розв'язок для $\bar{w}(x, z, t_1)$ можна представити у вигляді розкладу в ряд по цьому параметру

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \tau \bar{w}_1 + \tau^2 \bar{w}_2 + \dots \quad (30)$$

Підставляючи розкладення (30) у рівняння (28) та прирівнюючи члени при однакових ступенях τ , одержимо для перших двох членів розкладу

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} = \frac{a}{\omega_n^2} F_0(x, z), \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} F_0(x, z) = \frac{\pi n}{k} \cos(\pi n z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\cos(kx) \frac{\partial b_i}{\partial x} \right] + \\ + \sin(\pi n z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin(kx) \frac{\partial b_i}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

і

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial x^2} = F_1(x, z, t_1), \quad (32)$$

де

$$F_1(x, z, t_1) = -\frac{2}{\omega_n} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial z^2} \right).$$

Граничні умови для \bar{w}_0 і \bar{w}_1 аналогічні умовам (29). Як впливає з вигляду рівнянь (31) та (32), розв'язки для \bar{w}_0 і \bar{w}_1 містять t_1 в якості параметра і тому початкова умова по часу для них явно не задається. Для моменту $t = t_1 = 0$ одержується розв'язок для поля розсіяних ВХ, який

відповідає структурі плями в цей момент, тобто для $b_i = b_i(x, z, 0)$ так, неначе ця структура існувала до цього у незмінному вигляді. Ця в певній мірі "некоректність" обумовлена застосуванням методу малого параметра, а фізично вона впливає саме з малості параметра τ .

Розв'язок рівняння (31) в силу його лінійності зручно шукати у вигляді розкладу в ряд по власним функціям відповідної крайової задачі для ВХ. Для заданої схеми стратифікації власними функціями є $\sin(\pi mz)$ [12]. Тому \bar{w}_0 представляється як

$$\bar{w}_0(x, z, t_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi(x, t_1) \cdot \sin(\pi mz), \quad (33)$$

Підставляючи розклад (33) у рівняння (31), домножуючи одержане на $\sin(\pi mz)$ та інтегруючи його поперек стратифікованого шару, одержимо для $\phi(x, t_1)$ звичайне диференціальне рівняння з t_1 в якості параметра.

$$\phi_m'' + \frac{\pi^2 m^2 \omega_n^2}{1 - \omega_n^2} \phi_m = -f_m(x, t_1), \quad (34)$$

де

$$f_m(x, t_1) = \frac{2a\omega_n}{1 - \omega_n^2} \int_{-1}^1 \Phi(x, z, t_1) \sin(\pi mz) dz,$$

$$\Phi(x, z, t_1) = \frac{\pi n}{k} \cos(\pi n z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\cos(kx) \frac{\partial b_i}{\partial x} \right] +$$

$$+ \sin(\pi n z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin(kx) \frac{\partial b_i}{\partial z} \right].$$

Розв'язок рівняння (34) має вигляд [13]

$$\phi_m = -\frac{n}{mk} \left\{ \int_{-\infty}^x f_m \sin \left[\frac{km}{n}(x - x_1) \right] dx_1 - \int_x^{\infty} f_m \sin \left[\frac{km}{n}(x - x_1) \right] dx_1 \right\}.$$

Тут $k = \pi n \omega_n / (1 - \omega_n^2)^{1/2}$ - хвильове число набігаючої хвилі, виражене через частоту хвилі.

Отже, розв'язок для \bar{w}_0 представляється у вигляді

$$\bar{w}_0 = -\frac{2ak}{\pi^2 n \omega_n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mz)}{m} \int \int_S \Phi(\xi_1, \xi_2, t_1) \times$$

$$\times \sin(\pi m \xi_2) \sin \left[\frac{km}{n}(x - \xi_1) \right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Тут $S(\xi_1, \xi_2, t_1)$ - змінна в часі область інтрузійної плями.

Подібним чином знаходиться розв'язок рівняння (32):

$$\bar{w}_1 = \frac{4a(k^2 + \pi^2 n^2)}{\pi^2 n^2 \omega_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi mz) (I_- - I_+), \quad (35)$$

де

$$I_- = \int_{-\infty}^x \frac{\partial R_m}{\partial t_1}(x_1, t_1) \sin \left[\frac{km}{n}(x - x_1) \right] dx_1,$$

$$I_+ = \int_x^{\infty} \frac{\partial R_m}{\partial t_1}(x_1, t_1) \sin \left[\frac{km}{n}(x - x_1) \right] dx_1,$$

$$R_m(x, t_1) = \int \int_S \Phi(\xi_1, \xi_2, t_1) \sin(\pi n \xi_2) \times$$

$$\times \sin \left[\frac{km}{n}(x - \xi_1) \right] d\xi_1 d\xi_2.$$

В одержаному розв'язку (36) можна виконати інтегрування по x_1 ; в результаті одержується більш зручний для розрахунків вираз для \bar{w}_1 :

$$\bar{w}_1 = \frac{4a(k^2 + \pi^2 n^2)}{\pi^2 n^2 \omega_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi mz) I_s, \quad (36)$$

де

$$I_s = \int \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(\xi_1, \xi_2, t_1) \sin(\pi n \xi_2) [\psi_1 - \psi_2] d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\psi_1(\xi_1, x) = \frac{n}{2kn} \left\{ \sin \left(\frac{2kmL_x}{n} \right) \cos \left[\frac{km}{n}(x + \xi_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \sin \left[\frac{km}{n}(x - \xi_1) \right] \right\},$$

$$\psi_2(\xi_1, x) = x \cos \left[\frac{km}{n}(x - \xi_1) \right],$$

$L_x(t_1)$ - половина горизонтального розміру плями, яка визначається в процесі розв'язання інтрузійної задачі.

Як впливає з одержаних результатів, перша складова розв'язку \bar{w}_0 відповідає наближенню квазізамороженості інтрузійної області з внутрішньою структурою, яка відповідає розрахунковому моменту часу t , (або $t_1 = \tau t$). Складова (37) дає поправку до структури розсіяної хвилі, яка враховує скінченність τ .

Вигляд розв'язку (35) подібний до одержаного в [3], однак тут враховується реальна структура плями та динаміка її зміни в часі, чого немає в [3], де структура плями прийнята незмінною, а інтеграл у виразі (36) оцінюється за допомогою теореми про середнє і, таким чином, одержується лише якісний результат про характер поля розсіяних ВХ. Таким чином, результати робіт [3, 7, 8] дають лише якісну картину першого наближення

поля розсіяних хвиль для періоду життя плями, що відповідає в'язко-дифузійній стадії її еволюції при $\tau \ll 1$.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

Для модельних розрахунків взято шар лінійно-стратифікованої рідини товщиною 100 м з $N = 0,01$. Горизонтальний розмір плями в початковий момент приймався $l_H = 100$ м; горизонт її розташування відповідає $z = -20$ м та $z = -50$ м. Товщина плями задавалась такою, щоб забезпечувалась малість параметра τ . Структура всередині плями в початковий момент відповідала значенню $\vartheta = 1$, тобто максимальній її перемішаності [6]. Розрахунки виконувались для різних номерів мод і різних значень хвильового числа набігаючої ВХ. Амплітуда ВХ задавалась рівною 5 метрам. Поля розсіяних ВХ одержані для різних моментів часу t_1 . Розрахунки хвильових картин виконані в рамках першого наближення, оскільки за прийнятої умови $\tau \ll 1$ цього виявляється цілком достатньо для аналізу поля розсіяних хвиль. Результати розрахунків представлені у вигляді ізоліній значень w_0 в площині (x, z) та розподілу w_0 на заданих горизонтах z .

Результати розрахунків показують, що полю розсіяної на перемішаній плямі внутрішньої хвилі притаманні ряд характерних особливостей, найбільш примітною з яких є формування двох систем зон концентрації енергії, які мають вигляд періодично розташованих смуг. Загальний характер цих смуг та їхній зв'язок із перемішаною плямою представлено на рис. 1, де кожна з систем заштрихована в різний спосіб. Обидві системи перетинаються в області плями, далі зони перетину періодично повторюються. При цьому, як впливає з одержаного розв'язку (35), розсіяні хвилі займають всю область середовища. Ця фізична некоректність є наслідком застосованої постановки задачі, в якій не розглядаються попередні етапи еволюції плями з моменту її утворення, коли природньою початковою умовою для розсіяних внутрішніх хвиль була б їх відсутність в усіх точках області рідини, та малістю параметра τ . Насправді реальною фізичною картиною є така, що на момент початку в'язко-дифузійної стадії еволюції плями від неї вже сформувався поле розсіяних хвиль, яке займає достатньо широку область середовища в напрямку вісі x і структура якого в більшій її частині, що прилягає до плями, вже відповідає тому, що слідує з одержаного тут роз-

в'язку. Характер періодичності хвильової кар-

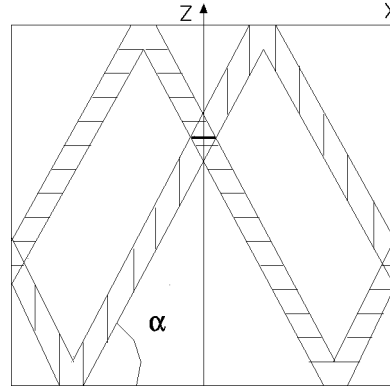


Рис. 1. Схематичний вигляд поля розсіяних внутрішніх хвиль

тини впливає безпосередньо з вигляду розв'язку (35). Періодичність всередині кожної з двох систем ВХ визначається номером моди та значенням хвильового числа набігаючої фонової ВХ і виражається через них значенням періоду T_{w*} у вигляді

$$T_{w*} = \frac{2\pi n}{k}$$

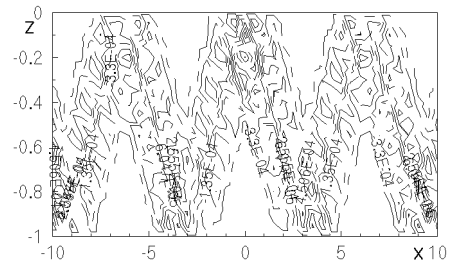


Рис. 2. Поле розсіяних ВХ при $t = 10T_w = 0.808$, $\tau_0 = 0.0625$ для $n = 2$; $k = 2$; $z_0 = -0.2$; $l_v = 0.005$; $l_h = 1$

Кут нахилу смуг α на рис. 1 визначається з виразу

$$\text{tg } \alpha = \frac{k}{\pi n}$$

а їх ширина дорівнює горизонтальному розміру плями, зростаючи в часі відповідно до його зростання.

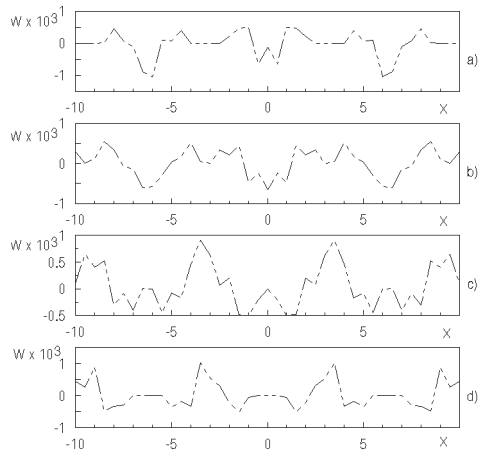


Рис. 3. Вертикальна складова швидкості розсіяних ВХ при $t = 10T_w = 12,9, \tau = 0.0625$ для $n = 2; k = 2; z_0 = -0.25; l_v = 0.005; l_h = 1$; а) $z = -0.2$; б) $z = -0.4$; в) $z = -0.6$; д) $z = -0.8$

Проведені розрахунки виявили факт зростання енергетики розсіяних хвиль протягом певного початкового періоду часу з наступним її падінням, обумовленим вирівнюванням профілю густини всередині плями (рестратифікацією). Встановлено також, що виявлені системи полос концентрації енергії розсіяних ВХ мають протилежні напрямки руху рідини вздовж вісі x та однакові напрямки руху вздовж вісі z . Деякі характерні картини розсіяних ВХ та їхня структура наведені на рис.2 - рис. 5, де розрахунковий час представлено в періодах набігаючої ВХ T_w та в інтрузійному масштабі t_i , а параметр τ наведено для початкового моменту часу. На рис. 2 представлено приклад розміщення зон концентрації енергії цих хвиль для випадку, коли пляма знаходиться відносно близько від границі середовища ($z_0 = -0,2$), так, що дві згадувані вище системи, будучи розташованими близько одна одній, утворюють немов би одну спільну зону. Про те, що в цих системах має місце протилежний напрям руху частинок середовища вздовж вісі x , можна судити з рис. 3, де наведено розподіл вертикальної складової швидкості $\bar{w}_0(x, z)$ для різних горизонтів z . На рис. 4 наведено розміщення енергетичних полос ВХ при іншій комбінації (k і n для плями, розміщеної посередині шару середовища ($z_0 = -0,5$)). Як видно, в даному випадку системи смуг концентрації енергії розсіяних ВХ чітко розділені. А розподіл \bar{w}_0 на різних горизонтах z (рис. 5) підтверджує протилежність напрям-

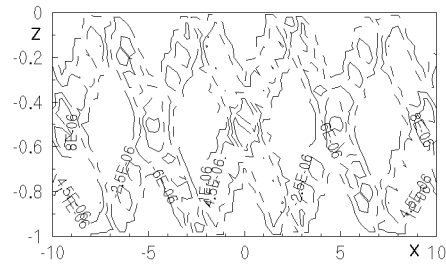


Рис. 4. Поле розсіяних ВХ при $t = 100T_w = 11.8, \tau_0 = 0.009$ для $n = 3; k = 2; z_0 = -0.5; l_v = 0.0025; l_h = 1$

ку руху в них вздовж вісі x і однаковість напрямку руху вздовж вісі z .

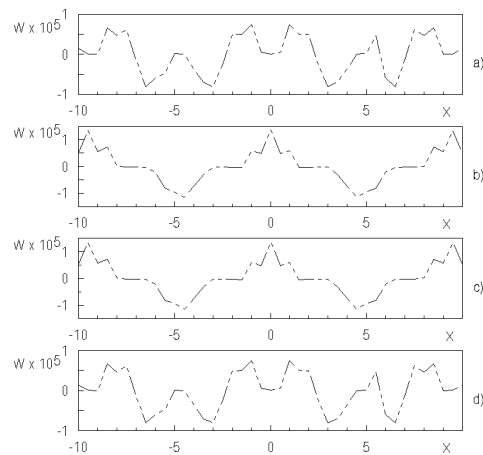


Рис. 5. Вертикальна складова швидкості розсіяних ВХ при $t = 100T_w = 129, \tau = 0.009$ для $n = 3; k = 2; z_0 = -0.25; l_v = 0.1; l_h = 100$; а) $z = -0.2$; б) $z = -0.4$; в) $z = -0.6$; д) $z = -0.8$

В цілому енергія розсіяних ВХ може складати як помітну, так і незначну частину енергії набігаючої ВХ. Так, у випадку рис. 2 найбільше значення вертикальної складової швидкості розсіяної ВХ є $\bar{w}_0 = 0,0015$ проти $w_{w0max} = 0,0152$, тобто $\bar{w}_0 \approx 0,1w_{w0max}$. У випадку ж рис. 4 найбільше значення $|\bar{w}_0|$ є $2 \cdot 10^{-5}$, що складає лише 0,2 відсотка від найбільшого значення $w_{w0max} = 0,0105$.

Таким чином, структура та енергетика поля розсіяних внутрішніх хвиль, що утворюються в результаті взаємодії набігаючої фонові ВХ з пля-

мою перемішаної рідини, визначається такими головними факторами як довжина набігаючої хвилі (величина її хвильового числа), її амплітуда, номер моди, характер стратифікації та фізичні характеристики середовища, внутрішня структура плями та горизонт її розміщення. Як впливає з характеру розв'язку (33), поле розсіяних хвиль насичує середовище височастотними хвильовими гармоніками, змінюючи його структуру протягом тривалого часу, який може складати в реальному океані величину в декілька годин. Саме це і може бути механізмом активної участі в динаміці обмінних процесів у морях та океанах.

4. ЗАКЛЮЧЕННЯ

Розв'язана тут задача відноситься до частинного випадку ($\tau \ll 1$) в проблемі розсіяння фононих внутрішніх хвиль на перемішаних областях – турбулентних плямах, що перебувають на фінальній в'язко-дифузійній стадії своєї еволюції. Одержано, що в цьому випадку все середовище заповнене двома системами зон концентрації енергії розсіяних ВХ, що мають вигляд періодичних вздовж горизонтальної координати смуг. Нескінченність області, зайнятої розсіяними ВХ, є результатом невраховування в рамках запропонованої моделі передісторії еволюції плями на більш ранніх стадіях та особливостях методу малого параметра, коли одержане рівняння містить час в якості пасивного параметра, а не визначальної процес змінної. В реальних ситуаціях інтерпретація такого результату означатиме, що область розсіяних ВХ займає достатньо протяжну область в напрямку горизонтальної вісі. Напрямки руху частинок середовища в цих системах співпадають у напрямку вертикальної вісі й протилежні в напрямку горизонтальної вісі. В залежності від горизонту розміщення плями та параметрів набігаючої хвилі і плями енергетика розсіяних хвиль може бути як достатньо істотною відносно енергетики набігаючої хвилі, так і незначною.

Як впливає з одержаних результатів, виконані раніше в даному напрямку дослідження відповідають саме розглянутій тут в'язко-дифузійній стадії еволюції плями за умови прийняття "замороженості", тобто незмінності в часі як геометрії, так

і внутрішньої структури плями з повністю перемішаною в ній рідиною. Результати цих робіт дають неповний і лише якісний характер справжньої картини досліджуваного процесу.

Зрозуміло, що для побудови фізично коректної картини поля розсіяних хвиль на перемішаних плямах необхідно розглянути попередній період еволюції плями, зокрема, ту саму в'язко-дифузійну стадію, але на її більш ранньому етапі, коли $\tau \sim 1$.

1. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.– К.: Наук. думка, 1988.– 239 с.
2. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // ПМТФ.– 1998.– 30, N 5.– С. 88-98.
3. Григорьев П.Л., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Приближение однократного рассеяния внутренних волн на неоднородности поля плотности // Изв. АН СССР, ФАО.– 1985.– 21, N 3.– С. 321-324.
4. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной воде.– М.-Л.: Гостеоиздат, 1951.– 288 с.
5. Жмур В.В. Рефракция внутренних волн на пятнах перемешанной жидкости в двухслойном океане // Изв. АН СССР, ФАО.– 1984.– 20, N 1.– С. 108-111.
6. Lukyanov P.V., Maderith V.S. Restratification processes in the final stage of turbulence decay in a stably stratified medium // Доповіді НАН України.– 1995.– N 5.– Р. 46-48.
7. Буданов Л.А., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Борновское приближенное решение задачи рассеяния внутренних волн // ПМТФ.– 1984.– N 2.– С. 88-93.
8. Бунимович Л.А., Жмур В.В. Рассеяние внутренних волн на ансамбле пятен перемешанной жидкости // Изв. АН СССР, ФАО.– 1985.– 21, N 3.– С. 311-318.
9. Григорьев П.Л., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Рассеяние внутренней волны на слабонеоднородном возмущении поля плотности жидкости с учетом формы свободной поверхности и дна // Изв. АН СССР, ФАО.– 1986.– 22, N 9.– С. 948-952.
10. Григорьев П.Л., Тибилов А.С., Яковлев В.А. Задача рассеяния внутренней волны на слабонеоднородном возмущении поля плотности в трехслойной модели океана // Изв. АН СССР, ФАО.– 1987.– 23, N 11.– С. 1193-1197.
11. Лук'янов П.В., Мадерич В.С., Стеценко О.Г. В'язко дифузійна стадія еволюції перемішаної плями, що знаходиться в полі внутрішньої хвилі // Доповіді НАН України.– 2000.– N 1.– С. 101-106.
12. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.– М.: Мир, 1977.– 431 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1971.– 376 с.