

УДК 532.528

## РОЗРАХУНКИ КОЕФІЦІЄНТІВ ОПОРУ ТОНКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ДОЗВУКОВИХ ТІЛ

І. Г. НЕСТЕРУК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 14.11.2001

С использованием преобразований Манглера-Степанова и теории тонкого тела получены простые формулы для коэффициентов сопротивления тонких осесимметричных тел, движущихся в однородных жидкостях или газах с большими числами Рейнольдса. Сделаны оценки сопротивления, использующие только параметр тонкости тела, и расчеты толщины пограничного слоя и коэффициентов сопротивления для параболической формы при чисто ламинарном и чисто турбулентном режимах обтекания без отрыва пограничного слоя.

За допомогою перетворень Манглера-Степанова та теорії тонкого тіла отримані прості формули для коефіцієнтів опору тонких осесиметричних тіл, що рухаються в однорідних рідинах або газах з великими числами Рейнольдса. Зроблені оцінки опору, які використовують лише параметр тонкості тіла, та розрахунки товщини примежового шару і коефіцієнтів опору для параболическої форми при чисто ламинарному та чисто турбулентному режимах обтікання без відриву примежового шару.

By the use of Mangler-Stepanov transformations and the slender body theory, simple computation formulas for the drag coefficients of slender axisymmetric bodies, moving in homogeneous liquids at large Reynolds numbers, are obtained. Drag estimations were carried out, which use the body thickness parameter only. Calculations of the boundary-layer thickness and drag coefficients for a parabolic form by pure laminar and pure turbulent flow patterns without separation are presented.

### ВСТУП

Проблема мінімізації гідродинамічного опору розглядалася багатьма авторами. Зокрема, в [1-4] з використанням сучасної обчислювальної гідромеханіки розраховані осесиметричні форми, що забезпечують мінімум опору при фіксованому об'ємі для різних діапазонів чисел Рейнольдса ( $Re_L = U_\infty L / \nu$ ,  $U_\infty$  – стала швидкість руху тіла,  $L$  – його довжина,  $\nu$  – кінематична в'язкість).

Суттєвими недоліками подібних робіт є сильна залежність результатів від напівемпіричних критеріїв ламінарно-турбулентного переходу в примежовому шарі та нерозв'язана проблема його відриву, оскільки розрахунки виконані з використанням припущення про безвідривний режим обтікання, а одержані форми містять зони додатнього градієнта тиску, що робить відрив можливим.

Усунення першої вади потребує вироблення нових надійних критеріїв переходу, придатних саме для осесиметричних тіл у відповідних діапазонах чисел Рейнольдса. Для цього потрібні нові експерименти, але, як справедливо зауважено в [2], аеродинамічні труби не годяться для подібних досліджень через турбулентність та обмеженість чисел Рейнольдса. Пошукам безвідривних плоских та осесиметричних форм присвячені роботи [5-9]. Незважаючи на успіхи в теоретичних та експери-

ментальних дослідженнях запропонованих в [5-9] форм з від'ємними градієнтами тиску майже на всій поверхні, проблема безвідривної форми ще далека від свого розв'язання.

Поряд з цими недоліками комп'ютерна оптимізація гідродинамічної форми є непрозорою і не завжди може дати відповідь на прості запитання, типу: чи форма малого опору має бути тонкою і наскільки? Цю ваду можуть усунути аналітичні методи. Подальша розробка та уточнення подібних методик, запропонованих в [9, 10], і є предметом даного дослідження.

### 1. УТОЧНЕНІ ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ НА ТОНКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ

Обмежимося рухом осесиметричних тіл зі сталою швидкістю в однорідних газах або рідинах (напрямок руху співпадає з віссю симетрії) при достатньо великих числах Рейнольдса та малих числах Маха, що дозволяє вважати рідину поза в'язким примежовим шаром ідеальною та нестисловою, а потік в цій області безвихровим. Тоді через парадокс Даламбера опір тіла визначається лише тертям в примежовому шарі.

Так само, як в роботах [9, 10], перетворення Манглера – Степанова будуть використовуватись для зведення осесиметричного випадку до плоско-

го (див., наприклад, [11]). Тоді зв'язок між координатами  $x, y$  для осесиметричного примежового шару з відповідними плоскими  $\bar{x}, \bar{y}$  має вигляд [11]

$$\bar{x} = \int_0^x R^2(\xi) d\xi; \quad \bar{y} = R(x)y. \quad (1)$$

Тут  $R(x)$  – радіус осесиметричного тіла; координати  $x, \bar{x}$  відраховуються вздовж поверхні тіл; координати  $y, \bar{y}$  – по нормалі до них. Для складових швидкості рідини  $u, v$  та швидкості потоку на зовнішній межі примежового шару  $U(x)$  справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u; & \bar{U} &= U; \\ \bar{v} &= \frac{v}{R(x)} + \frac{R'(x)yu}{R^2(x)}; & R'(x) &\equiv \frac{dR}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Безрозмірні швидкості в рівняннях (1), (2) отримані шляхом ділення на швидкість набігаючого потоку на нескінченності  $U_\infty$ , довжини віднесені до довжини осесиметричного тіла  $L$ .

За допомогою рівнянь (1), (2) можна отримати наступні вирази для товщин витіснення  $\delta^*$  та втрати імпульсу  $\delta^{**}$ , а також для напруження тертя  $\tau_w$  на поверхні [11]:

$$\delta^* = \frac{\bar{\delta}^*}{R(x)}; \quad \delta^{**} = \frac{\bar{\delta}^{**}}{R(x)}; \quad \tau_w = R(x) \cdot \bar{\tau}_w. \quad (3)$$

Рівняння (1)–(3) справедливі для будь-яких осесиметричних тіл, якщо товщина примежового шару на них мала порівняно з радіусом. Але форми мінімального гідродинамічного опору мусять бути "обтічними", тобто витягнутими в напрямку руху. Інакше виникає відрив, втрачає силу парадокс Даламбера, і значно збільшується опір через перерозподіл тиску на поверхні тіла. Природно, що саме такі форми пропонуються всіма дослідниками, [див., наприклад, 1–4, 12].

Отже, найбільший практичний інтерес мають тонкі тіла, для яких величина  $R(x)$  є малою порядку  $\varepsilon = R_{max}/L$ , де  $R_{max}$  – максимальний радіус тіла. Всі подальші оцінки будуть робитися з врахуванням того, що  $\varepsilon \ll 1$ .

На перший погляд з формул (3) випливає, що примежовий шар на тонких осесиметричних тілах мав би бути набагато товстішим від аналогічного плоского, а тертя на осесиметричному тілі набагато менше, ніж на плоскому. Саме такий висновок було зроблено в [9, 10]. Але він вимагає уточнення через те, що величини  $\bar{\delta}^*$ ,  $\bar{\delta}^{**}$ ,  $\bar{\tau}_w$  також можуть бути малими або великими, тобто потребу-

ють додаткових оцінок. Єдине, що можна констатувати беззастережно, це те, що висновок робіт [9, 10] справедливий поблизу задніх крамок осесиметричних тіл, оскільки величини  $\bar{\delta}^*$ ,  $\bar{\delta}^{**}$ ,  $\bar{\tau}_w$  є скінченними, а  $R(x)$  прямує в цій області до нуля. Уточнені оцінки параметрів примежового шару та коефіцієнта опору тонких осесиметричних тіл будуть зроблені нижче.

Так само, як в роботах [9, 10], будемо вважати, що величина  $U$  приблизно дорівнює одиниці, тобто нехтувати товщиною примежового шару та особливостями розподілу тиску на поверхні. Для тонкого тіла, що обтікається у безвідривному режимі, це завжди можна зробити. Як показано в [10], з точністю до членів порядку  $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$  швидкість  $U(x)$  можна вважати сталою, що співпадає з  $U_\infty$ . При цьому використовувались результати теорії тонкого тіла [13]. Крім того, для тонкого тіла координату  $x$  можна відраховувати вздовж осі тіла. Отже, точність подальших результатів буде збільшуватись при зменшенні параметра  $\varepsilon$ .

За формулами (2) величина  $\bar{U}(x)$  буде також рівною 1 сталою. Тобто, тонкому осесиметричному тілу у вибраному наближенні відповідає плоска пластинка, примежовий шар на якій добре досліджений.

Зокрема, для ламінарного обтікання пластинки розв'язок Блазіуса дає, [11]:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_l^{**} &= 0.664(\bar{x})^{1/2} Re_L^{-1/2}; \\ \bar{\tau}_{wl} &= 0.664(\bar{x})^{-1/2} Re_L^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для турбулентного випадку відповідно [11]:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_t^{**} &= 0.0153(\bar{x})^{6/7} Re_L^{-1/7}; \\ \bar{\tau}_{wt} &= 0.0263(\bar{x})^{-1/7} Re_L^{-1/7}. \end{aligned} \quad (5)$$

Слід зауважити, що в роботах [9, 10] у формулах (4), (5) замість  $\bar{x}$  помилково вжито величину  $x$ , що призвело до неправильних подальших оцінок.

Використовуючи залежності (1), (3)–(5), отримуємо формули для товщини втрати імпульсу та напруження тертя ламінарного примежового шару на тонкому осесиметричному тілі:

$$\delta_t^{**} = 0.664 \left[ \int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{1/2} Re_L^{-1/2} R^{-1}(x), \quad (6)$$

$$\tau_{wl} = 0.664 \left[ \int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{-1/2} Re_L^{-1/2} R(x). \quad (7)$$

Відповідно для турбулентного примежового шару:

$$\delta_t^{**} = 0.0153 \left[ \int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{6/7} Re_L^{-1/7} R^{-1}(x), \quad (8)$$

$$\tau_{wt} = 0.0263 \left[ \int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{-1/7} Re_L^{-1/7} R(x). \quad (9)$$

Формули (6)–(9) дозволяють оцінити товщини та коефіцієнти тертя в серединних частинах примежових шарів (там де  $R(x) \sim \varepsilon$ ):

$$\delta_i^{**} \sim 0.66 Re_L^{-1/2}; \quad (10)$$

$$\tau_{wi} \sim 0.66 Re_L^{-1/2};$$

$$\delta_t^{**} \sim 0.015 Re_L^{-1/7} \varepsilon^{5/7}; \quad (11)$$

$$\tau_{wt} \sim 0.026 Re_L^{-1/7} \varepsilon^{5/7}.$$

Порівняння формул (10) та (4) свідчить, що товщина ламінарного примежового шару та коефіцієнт тертя на тонкому осесиметричному тілі мають такий самий порядок величин, як і на плоскій пластині при однакових довжинах та значеннях  $Re_L$ . Слід зауважити, що обидві оцінки не залежать від параметра  $\varepsilon$ , а лише від числа Рейнольдса. Інакшою є ситуація з турбулентним шаром на тонкому осесиметричному тілі. Його товщина та коефіцієнт тертя залежать від  $\varepsilon$  і можуть бути для малих значень цього параметра набагато меншими, ніж відповідні характеристики примежового шару на пластинці (див. формули (11) та (5)).

Уточнені (порівняно з роботами [9, 10]) оцінки товщини примежового шару вимагають нових досліджень області придатності отриманих формул. Оскільки перетворення Манглера–Спепанова справедливі лише при  $\delta^{**} \ll R(x) \sim \varepsilon$ , то рівняння (10) дає наступні обмеження на числа Рейнольдса при ламінарному режимі обтікання:

$$0.66 Re_L^{-1/2} \ll \varepsilon. \quad (12)$$

Умова (12) свідчить про широку область застосувань запропонованих формул. Наприклад, для значення  $\varepsilon = 0.1$  числа Рейнольдса мають бути більшими  $10^4$ , для  $\varepsilon = 0.01$  потрібно виконання умови  $Re_L > 10^6$ .

Для турбулентного примежового шару з рівняння (11) випливають наступні обмеження на  $Re_L$ :

$$0.015 Re_L^{-1/7} \ll \varepsilon^{2/7}. \quad (13)$$

Умова (13) жодним чином не обмежує область практичних застосувань даної теорії, оскільки для  $\varepsilon > 0.0001$  достатньо, щоб  $Re_L$  було більшим 100.

Отже, отримані результати справедливі в широких діапазонах чисел Рейнольдса та параметра  $\varepsilon$ . Єдиною областю непридатності рівнянь (3), (6)–(9) є малий окіл задньої кромки замкнених тіл, де, як вже зазначалось, товщина примежового шару може бути необмежено великою (відповідно до формул (3), (6), (8)).

## 2. ОЦІНКИ ПОВНОГО ОПОРУ ТОНКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ ПРИ ЛАМІНАРНОМУ ТА ТУРБУЛЕНТНОМУ РЕЖИМАХ ОБТІКАННЯ

Якщо осесиметричне тіло обтікається у безвідривному режимі, і товщиною примежового шару можна знехтувати, то його повний опір визначається лише тертям. За парадоксом Даламбера складова опору, яка пов'язана з розподілом тиску на поверхні, в цьому випадку відсутня. Тоді коефіцієнт повного опору може бути обчислений за формулою

$$C_{dL} = \frac{2D}{\rho U_\infty^2 L^2} = 2\pi \int_0^1 R(x) \tau_w(x) dx. \quad (14)$$

Тут  $D$  – повний опір тіла;  $\rho$  – густина рідини.

Підстановка в (14) рівняння (7) дозволяє легко отримати наступну формулу для  $C_{dL}$  та оцінку цієї величини при чисто ламінарному режимі обтікання:

$$C_{dLi} = 4.172 Re_L^{-1/2} \int_0^1 R^2(x) \left[ \int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{-1/2} dx; \quad (15)$$

$$C_{dLi} \sim 4.2 Re_L^{-1/2} \varepsilon,$$

відповідно при чисто турбулентному режимі з рівнянь (9), (14) випливає:

$$C_{dLt} = 0.166 Re_L^{-1/7} \int_0^1 R^2(x) \left[ \int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{-1/7} dx; \quad (16)$$

$$C_{dLt} \sim 0.17 Re_L^{-1/7} \varepsilon^{12/7}.$$

Як і варто було сподіватись, оцінки (15), (16) свідчать, що розраховані з використанням довжини тіла коефіцієнти опору прямують до нуля при зменшенні  $\varepsilon$ . Тобто, при фіксованій довжині тіла

Табл. 1. Оцінки коефіцієнтів опору за формулами (18), (19)

$Re_V$	$C_{dVl}$	$C_{dVt}$ $\varepsilon = 0.1$	$C_{dVt}$ $\varepsilon = 0.03$	$C_{dVt}$ $\varepsilon = 0.01$
$10^6$	0.0042	0.0079	0.0044	0.0026
$10^7$	0.0013	0.0056	0.0032	0.0019
$10^8$	0.00042	0.0041	0.0023	0.0014

форма мінімального опору має бути максимально тонкою (на зразок голки).

Найбільш потрібною є задача мінімізації опору при фіксованому об'ємі тіла. Для її розв'язання достатньо за аналогією з роботами [1–4, 12] застосувати замість  $C_{dL}$  та  $Re_L$ , в яких використовується довжина тіла, величини  $C_{dV}$  та  $Re_V$ , в яких застосовується корінь кубічний з об'єму. Зв'язки між зазначеними коефіцієнтами опору та числами Рейнольдса визначаються наступними формулами:

$$C_{dV} = \frac{2D}{\rho U_\infty^2 (V')^{2/3}} = C_{dL} V^{-2/3} \sim C_{dL} \varepsilon^{-4/3};$$

$$Re_V = \frac{U_\infty (V')^{1/3}}{\nu} = Re_L V^{1/3} \sim Re_L \varepsilon^{2/3},$$

де  $V'$  – фізичний об'єм тіла; а  $V$  – безрозмірний об'єм, віднесений до кубу довжини тіла. Тоді оцінки (15), (16) набувають вигляду

$$C_{dVl} \sim 4.2 Re_V^{-1/2};$$

$$C_{dVt} \sim 0.17 Re_V^{-1/7} \varepsilon^{10/21}.$$

Формула (18) свідчить, що при ламінарному режимі обтікання форма мінімального опору з фіксованим об'ємом не залежить від параметра тонкості тіла, в той час, як в турбулентному випадку з співвідношення (19) впливає, що оптимальне тіло має бути максимально тонким.

Можливо саме цим фактом пояснюється тонкість фюзеляжів реальних літаків, примежовий шар на яких майже повністю турбулентний. Наприклад, фюзеляж з роботи [1] має  $\varepsilon = 0.0814$ .

В роботі [2] його форму було покращено і досягнуто значення  $C_{dV} = 0.012$  при  $Re_V = 15000000$ . Формула (19) дає в цьому випадку оцінку  $C_{dVt} \sim 0.0049$ , а для іншого тіла  $B$  з цієї ж роботи ( $\varepsilon = 0.1205$ ) значення коефіцієнта опору  $C_{dVt} \sim 0.0059$ , в той час, як розрахована в [2] величина  $C_{dV}$  дорівнює 0.0058. Оцінка (18) для чисто ламінарного обтікання дає з цим числом Рейнольдса значення  $C_{dVl} \sim 0.0011$ .

Табл. 2. Порівняння оцінок (19) з результатами роботи [3]

Тіло	$Re_V$	$\varepsilon$	$C_{dVt}$ , оцінка (19)	$C_{dVt}$ , стаття [3]
I	$5 * 10^6$	0.0954	0.0061	0.024
II	$1 * 10^7$	0.14	0.0067	0.024
III	$1 * 10^8$	0.1173	0.0044	0.016

В роботі [12] проведені виміри опору осесиметричного тіла з  $\varepsilon = 0.111$ . Для числа  $Re_V = 2200000$  експериментальне значення  $C_{dV}$  становить приблизно 0.007, в той час, як оцінки (18), (19) дають величини  $C_{dVl} \sim 0.0028$  та  $C_{dVt} \sim 0.0074$ . Отже, формули (15), (16), (18), (19) дозволяють зробити прозорі, прості та реалістичні оцінки опору тонких осесиметричних тіл.

Числові оцінки за формулами (18), (19) наведені в табл. 1.

Оцінки (18), (19) іноді можуть давати несподівані результати. Зокрема, для дуже малих  $\varepsilon$  коефіцієнт опору при турбулентному режимі обтікання може стати меншим, ніж при ламінарному. Дійсно, з табл. 1 видно, що при ламінарному режимі значенню  $Re_V = 10^6$  відповідає  $C_{dVl} \sim 0.0042$ , а в турбулентному випадку з тим же значенням числа Рейнольдса та  $\varepsilon = 0.01$  отримуємо  $C_{dVt} \sim 0.0026$ . В діапазонах більших чисел Рейнольдса ( $Re_V > 10^7$ ) ламінарний коефіцієнт опору знов стає меншим від турбулентного. Даний факт заслуговує уваги і подальших досліджень.

Було проведено також порівняння оцінок за формулою (19) з результатами роботи [3], в якій запропоновані форми мінімального опору для трьох

випадків чисто турбулентного обтікання. Результати наведені в табл. 2.

З табл. 2 видно, що оцінка (19) дає значення опору майже в чотири рази менші, порівняно з обчисленими в роботі [3]. Оскільки формула (19) дає лише оцінки порядків величин, то співпадіння можна було б вважати задовільним, але насторожує той факт, що досить значна різниця в значеннях має місце для всіх випадків (відповідні тіла мають різні форми, див. [3]). Цей факт спонукав дослідити вплив форми тіла на значення оцінок (18), (19). Цьому питанню присвячений наступний розділ.

### 3. РОЗРАХУНОК ОПОРУ ПАРАБОЛІЧНОГО ТІЛА

Для розрахунків було обране тонке тіло, отримане в результаті обертання параболи з рівнянням

$$R(x) = 4\epsilon x(1-x) \quad (20)$$

довкола осі симетрії. Форма перерізу тіла симетрична також відносно прямої  $x = 0.5$  та  $R(0.5) = \epsilon$ . Насправді, рівняння (20) задає сімейство подібних тіл, залежне від параметра  $\epsilon$ .

Пістановка формули (20) в рівняння (6) після інтегрування дає

$$\delta_t^{**} = 0.664 Re_L^{-1/2} \left[ \frac{x(10 - 15x + 6x^2)}{30(1-x)^2} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Співвідношення (21) так само, як оцінка (10), не містить параметра  $\epsilon$ , тобто на всіх тілах сімейства (20) ламінарний примежовий шар має однакову товщину. Результати розрахунку за формулою (21) представлені на рис.1 (суцільна крива). На цьому ж графіку наведені результати розрахунку за рівнянням (4) товщини втрати імпульсу для ламінарного примежового шару Блазіуса на пластинці однакої довжини (штрихова крива).

Порівняння показує, що в серединній частині товщина ламінарного примежового шару на тонких осесиметричних тілах (20) мало відрізняється від плоского. Виняток становить лише коротка область поблизу задньої кромки (де за формулою (21) товщина осесиметричного шару прямує до нескінченності). Слід відзначити також, що в області до міделя тіла ( $x = 0.5$ ) осесиметричний примежовий шар має меншу товщину, ніж плоский. Але після міделя його товщина зростає швидше, і стає більшою товщини шару на пластинці однакої довжини.

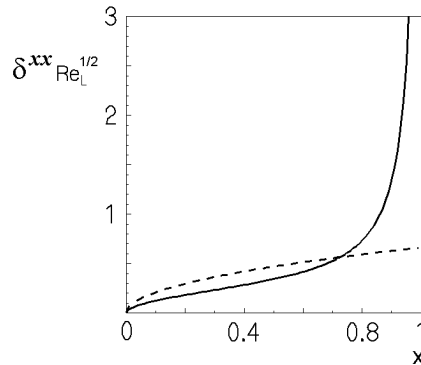


Рис. 1. Товщини втрати імпульсу для ламінарних примежових шарів на тонкому осесиметричному тілі (20) та пластинці

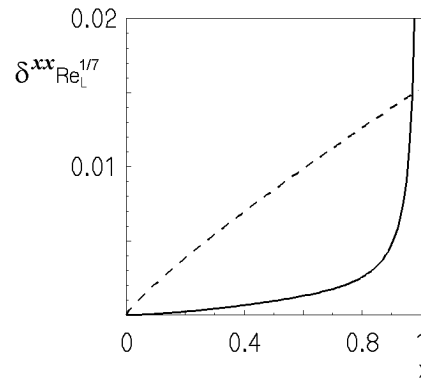


Рис. 2. Товщини втрати імпульсу для турбулентних примежових шарів на тонкому осесиметричному тілі (20) з  $\epsilon = 0.1$  та пластинці

Для розрахунку товщини турбулентного примежового шару достатньо підставити (20) в рівняння (8). Після інтегрування можна отримати:

$$\delta_t^{**} = 0.00383 \epsilon^{5/7} Re_L^{-1/7} \frac{x^{11/7}}{1-x} \left[ \frac{8(10 - 15x + 6x^2)}{15} \right]^{6/7}. \quad (22)$$

Так само, як оцінка (11), формула (22) містить множник  $\epsilon^{5/7}$ , тому турбулентний примежовий шар буде різним на різних тілах сімейства (20), і його товщина зменшується при спаданні параметра  $\epsilon$ . Результати розрахунку за формулою (22) для  $\epsilon = 0.1$  представлені на рис. 2 суцільною кривою. Для порівняння наведені результати обчислень за формулою (5) товщини втрати імпульсу турбулентного примежового шару на пластинці однакої довжини (штрихова крива).

З рис. 2 видно, що турбулентний примежовий шар на тонкому осесиметричному тілі має набага-

то меншу товщину, ніж на пластині рівної довжини (за винятком малого околу хвоста тіла).

Для розрахунку коефіцієнту опору при чисто ламінарному обтіканні достатньо підставити (20) в рівняння (15). Після інтегрування можна отримати:

$$C_{dLl} = 4.172Re_L^{-1/2}\varepsilon\frac{8}{\sqrt{30}}. \quad (23)$$

Рівняння (23) відрізняється від оцінки (15) множником  $8/\sqrt{30}$  зі значенням 1.4606.

Відповідно в чисто турбулентному випадку з рівнянь (20), (16) випливає:

$$C_{dLt} = 0.166Re_L^{-1/7}\varepsilon^{12/7}\frac{7}{6}\left[\frac{8}{15}\right]^{6/7}. \quad (24)$$

Рівняння (24) відрізняється від оцінки (16) лише сталим множником зі значенням 0.6807.

Аналогічно можна обчислити величини  $C_{dVl}$ ,  $C_{dVt}$ , скориставшись (23), (24), (17) та значенням об'єму тіл (20)  $V = 8\pi\varepsilon^2/15$ :

$$C_{dVl} = 4.172Re_L^{-1/2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}; \quad (25)$$

$$C_{dVt} = 0.166Re_L^{-1/7}\varepsilon^{10/21}\pi^{-13/21}\frac{7}{6}\left[\frac{8}{15}\right]^{5/21}. \quad (26)$$

Рівняння (25) відрізняється від оцінки (18) лише сталим множником зі значенням 1.128, відповідно (26) від (19) множником 0.4945.

Отже, формули (23)–(26) свідчать, що врахування форми тонкого осесиметричного тіла мало впливає на оцінки (15), (16), (18), (19). Тому факт значних розбіжностей оцінок (19) з результатами роботи [3] заслуговує на подальші дослідження.

#### 4. ВИСНОВКИ

Слід ще раз підкреслити, що отримані формули справедливі лише при безвідривному режимі обтікання, який є необхідним для оптимальних форм. Крім того, вони свідчать про значний виграш в опорі, якщо примежовий шар залишається ламінарним на максимально великій частині поверхні тіл. Тому задачу мінімізації опору неможливо розв'язати без врахування цих факторів, що збільшує цінність формул (12), (13), (15), (20),

які дозволяють робити прості та ефективні оцінки для різних режимів обтікання та значень параметра тонкості і можуть використовуватись при конструюванні реальних об'єктів.

Представляє інтерес вивчення впливу градієнтів тиску на отримані формули для характеристик примежового шару та коефіцієнтів опору.

1. *Dodbele S.S., Van Dam C.P., Vijgen P.M., Holms B.J.* Shaping of Airplane Fuselages for Minimum Drag // *Journal of Aircraft.*– 1987.– v.24, N 5.– P. 298-304.
2. *Zedan M.F., Seif A.A. and Al-Moufadi S.* Drag Reduction of Fuselages Through Shaping by the Inverse Method // *Journal of Aircraft.*– 1994.– v. 31, No. 2.– P. 279-287.
3. *Lutz T., Schweyer H., Wagner S. and Bannasch R.* Shape Optimization of Axisymmetric Bodies in Incompressible Flow // 2nd International Airship Conference.– Stuttgart/Friedrichshafen.– 3-4 July 1996.– P. 1.
4. *Lutz Th., Wagner S* Drag Reduction and Shape Optimization of Airship Bodies // *Journal of Aircraft.*– 1998.– v. 35, N 3.– P. 345-351.
5. *Нестерук И. Г.* Некоторые задачи динамики тонких осесимметричных кавитаторов // *Труды семинара по краевым задачам. – Изво Казанского ун-та.*– 1990.– Вып. 24.– С. 187-197.
6. *Нестерук И. Г.* Про форму тіл мінімального опору // *Доповіді АН УРСР.*– 1989.– Сер. А, N 4.– С. 57-60.
7. *Nesteruk I.* Experimental investigations of axisymmetric bodies with negative pressure gradients // *The Aeronautical Journal.*– September 2000.– v. 104, N 1039.– P. 439-443.
8. *Бурга О.А., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д.* Дозвокові осесиметричні форми із стрибком тиску на поверхні // *Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".*– 2001.– N 1(15).– С. 90-99.
9. *Нестерук І.Г.* Проблеми зменшення гідродинамічного опору осесиметричних та плоских дозвукових форм // *Вестник Национального технического университета "Харьковский политехнический институт".*– 2001.– Вып. 129, часть 2.– С. 257-270.
10. *Нестерук І.Г.* Особливості використання тонких осесиметричних форм для зменшення гідродинамічного опору // *Прикладна гідромеханіка.*– 2001.– Т. 3 (75), N 3.– С. 53-58.
11. *Лойцянский Л. Г.* *Механика жидкости и газа.*– М.: Наука, 1978.– 736 с.
12. *Hansen R.J., Hoyt J.G.* Laminar-To-Turbulent Transition on a Body of Revolution with an Extended Favorable Pressure Gradient Forebody // *Journal of Fluids Engineering.*– June 1984.– v. 106.– P. 202-210.
13. *Cole J. D.* *Perturbation Methods in Applied Mathematics.*– Blaisdell Publishing Company: Waltham, Massachusetts; Toronto; London, 1968.– 267 p.