

УДК 532.5

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАКЕ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 5.11.2001

Рассматриваются нелинейные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в динамике относительного движения идеальной однородной несжимаемой жидкости в связи с вариационным методом Бейтмена – Люка – Уизема и имеющих структурное сходство с уравнениями Гамильтона. Анализируются свойства этих систем уравнений и известный способ их приближенного решения путем исключения квазискоростей жидкости и сведения к некоторой системе уравнений второго порядка относительно координат свободной поверхности. Для случая прямоугольного сосуда, частично заполненного жидкостью, развивается альтернативный подход, основанный на идее непосредственного интегрирования точных исходных уравнений методом Рунге – Кутты. Разработан алгоритм численного решения этих уравнений, возможности которого демонстрируются на задаче о нелинейных свободных колебаниях жидкости в наклонном прямоугольном сосуде после его разгона.

Розглядаються нелінійні системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь, що виникають у динаміці відносно руху ідеальної однорідної нестисливої рідини у зв'язку із варіаційним методом Бейтмена – Люка – Уізема та структурно подібні до рівнянь Гамільтона. Анализуються властивості цих систем рівнянь та відомий спосіб їх наближеного розв'язування шляхом виключення квазішвидкостей рідини і зведення до деякої системи рівнянь другого порядку відносно координат вільної поверхні. На випадок прямокутної посудини, частково заповненої рідиною, розвивається альтернативний підхід, що базується на ідеї безпосереднього інтегрування точних вихідних рівнянь методом Рунге – Кутта. Розроблено алгоритм чисельного розв'язування цих рівнянь, можливості якого демонструються на задачі про нелінійні вільні коливання рідини у нахилений прямокутній порожнині після її розгону.

The nonlinear systems of the ordinary integro-differential equations arising in dynamics of the relative motions of an inviscid homogeneous incompressible liquid with respect to the variational method by Bateman – Luke – Whitham and having a structural similarity to the Hamiltonian equations are considered. The properties of this systems of equations and the known method of their solution by means of the elimination of the liquid quasivelocities and the reduction to a certain systems of the second order equations relative to the liquid coordinates are analyzed. In the case of a rectangular tank partially filled with a liquid it is developed the alternative approach that bases on an idea of the direct integration of the exact equations by means of the Runge – Kutta method. It is proposed an algorithm of the numerical solution of the initial exact equations the capabilities of which are demonstrated in the problem of the liquid nonlinear free oscillations in the inclined rectangular tank after its acceleration.

ВВЕДЕНИЕ

Один из основных подходов к решению задач динамики жидкости со свободной поверхностью заключается в переходе от исходных уравнений гидродинамики в частных производных (с соответствующими краевыми и начальными условиями) к эквивалентным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к жидкости в подвижном сосуде (идеальной, несжимаемой, однородной, совершающей безвихревое абсолютное движение) переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям возможен, в частности, на основе вариационных формулировок, предложенных независимо в работах [1, 2] и рассматриваемых ниже. Этому подходу посвящен также ряд исследований, отраженных в [3, 4].

В динамике относительного движения жидкости известны три типа обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно: 1) лагранжевы, 2) гамильтоновы, 3) уравнения вариационного мето-

да в форме Бейтмена – Люка – Уизема [1]. Сегодня трудно отдать предпочтение какой-либо из указанных систем уравнений, так как, с одной стороны, все они очень сложны, а с другой – каждая находит применение при решении отдельных частных вопросов и имеет свои достоинства и недостатки.

Настоящая работа посвящена уравнениям третьего типа, к которым, судя по литературе, в последнее время проявляется определенный интерес. Дж. Майлс был, по-видимому, первым, кто обратил внимание на сильное структурное сходство этих уравнений, имеющих вид

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_n} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial R_n} - \frac{\partial L}{\partial R_n} = 0, \quad (1)$$

(здесь L – интеграл от давления; β_n и R_n – обобщенные координаты и квазискорости жидкости) с уравнениями Гамильтона

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial \beta_n}, \quad \dot{\beta}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}. \quad (2)$$

Ввиду этого сходства и, вместе с тем, определенного различия, уравнения (1) будут в настоящей работе для краткости называться уравнениями *типа* Гамильтона.

В более подробной записи уравнения (1), (2) представлены в [1] соответственно как (с точностью до обозначений)

$$d_{nm}\dot{R}_m + g(t)\beta_n + \frac{1}{2}k_{lm,n}R_l R_m = Q_n, \\ d_{mn}\dot{\beta}_m = k_{mn}R_m, \quad (3)$$

и

$$\dot{p}_n + g(t)\beta_n + \frac{1}{2}h_{lm,n}p_l p_m = Q_n, \\ \dot{\beta}_n = h_{mn}p_m, \quad (4)$$

где по повторяющимся нижним индексам производится суммирование. (Уравнения (3), (4) получены для случая поступательно перемещающегося цилиндрического сосуда.) Отсюда видно, что уравнения типа Гамильтона и уравнения Гамильтона действительно очень похожи, но отличаются коэффициентами при производных, коэффициентами квадратичных форм и частично коэффициентами линейных форм от искомым функций. Очевидно, что в обоих случаях уравнения нелинейны.

Уравнения типа Гамильтона обладают тем преимуществом, что позволяют относительно просто (по крайней мере для сосудов *без крышек*) находить функцию $R_0(t)$, от которой зависит такая важная в приложениях величина, как давление. Кроме того, они являются, в отличие от уравнений в лагранжевой формулировке, уравнениями не второго, а первого порядка, что удобно для их теоретических и численных исследований. Наконец, и это наиболее существенно, в уравнениях типа Гамильтона самым естественным образом учитывается *динамическое* условие на свободной поверхности жидкости, в то время как при выводе уравнений Лагранжа и Гамильтона учет динамического условия в общем случае сопряжен с немалыми трудностями.

Замечание. В случае чисто поступательных движений сосуда динамическое условие на свободной поверхности жидкости можно учесть при выводе уравнений Лагранжа или Гамильтона, просто включив работу сил инерции поступательного движения в выражение для потенциальной энергии, что и сделано в [1, формула (3.4)]. Однако при появлении вращательных составляющих движения сосуда этот метод уже не работает, так как в интеграле Лагранжа – Коши появляются члены, которые нельзя отнести ни к кинетической, ни к

потенциальной энергии. В общем случае совместных поступательных и угловых движений сосуда наиболее полные уравнения Гамильтона динамики жидкости получены И. А. Луковским [3, стр. 72].

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как известно, особый класс представляют системы уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных. Именно к этому классу относятся уравнения (3), в которых элементы матриц при производных являются интегралами, зависящими от искомым функций. Таким образом, строго говоря, мы имеем дело не с дифференциальными, а с интегродифференциальными уравнениями. Заметим, что зависящими от искомым функций интегралами в уравнениях (3) являются не только коэффициенты при производных, но и часть других коэффициентов. В системах уравнений рассматриваемого класса большую роль играют свойства матриц при производных. Следовательно, применительно к уравнениям (3) весьма важным является вопрос о структуре матриц при производных, в частности, об условиях их невырожденности.

Следует отметить, что в [1] предпочтение отдавалось уравнениям Лагранжа и Гамильтона по сравнению с уравнениями типа Гамильтона, о чем свидетельствует приведенный там вывод: "On balance, however, it appears that either the Lagrangian formulation of §3 or the Hamiltonian formulation of §4 offers significant advantages *vis-à-vis* the formulation provided by L_* in the present context"¹ [1, стр. 425]. Но последний подход получил развитие в других работах (например, [3, 5]). В частности, при этом построены более общие уравнения динамики жидкости [3, стр. 78], и установлен факт тесной связи уравнений типа Гамильтона с уравнениями метода теории возмущений [3, стр. 110]. Также выяснено, что в рамках такого подхода можно описать многие известные нелинейные эффекты в жидкости, обнаруженные экспериментально. Все это свидетельствует в пользу уравнений типа Гамильтона.

Существуют, однако, сложности в использовании указанных уравнений, которые побуждают к разработке других методов их решения. Обычно в приложениях используется прием преобразования исходных уравнений (3) к системам уравнений 2-го порядка относительно обобщенных координат β_n путем исключения неизвестных R_n с помощью второй группы уравнений (3). В результате

¹В итоге, однако, оказывается, что либо лагранжева формулировка §3, либо гамильтонова формулировка §4 предлагают существенные преимущества по сравнению с формулировкой, связанной с L_* в данном контексте."

получаются довольно сложные нелинейные системы уравнений, анализ и решение которых крайне затруднительны без применения вычислительных машин. Иными словами, в вычислительном отношении эти преобразования не упрощают анализ. Кроме того, само исключение квазискоростей R_n является сложной задачей, требует громоздких вычислений и выполняется приближенно, так что переход от исходных уравнений к системе уравнений 2-го порядка – это, по существу, замена точных уравнений приближенными, но без получения ощутимых вычислительных выгод. Такой подход применялся для решения задач о колебаниях жидкости в сосудах цилиндрических форм (кругового, кольцевого и эллиптического сечений, а также с дном произвольной формы) [3, стр. 100]. Он же использован и в более поздней работе [5].

В связи с изложенным возникает альтернативная идея: используя возможности современных компьютеров (большое быстродействие и большой объем памяти), проводить численное интегрирование исходных уравнений типа Гамильтона *непосредственно*, без предварительного преобразования их в систему уравнений 2-го порядка, что в ряде задач динамики системы "тело – жидкость" может дать определенные преимущества. Реализации этой идеи и посвящена настоящая работа, цель которой – разработка алгоритма численного интегрирования точных уравнений типа Гамильтона и расчет с его помощью плоских неустановившихся колебаний жидкости в наклонном прямоугольном сосуде после его разгона. (Строго говоря, "точными" являются системы уравнений бесконечного порядка. В данной работе под "точными" подразумеваются исходные, но усеченные системы.)

Ввиду сложности самих уравнений, для начала выбрана одна из простейших форм сосуда, а именно, прямоугольная. Кроме того, с целью упрощения задачи, мы ограничиваемся случаем свободных, но нелинейных колебаний жидкости. На практике такие колебания могут возникать, например, во время равномерного поступательного движения сосуда сразу после его разгона. Учитывая применение получаемых результатов и к динамике разгоняемых летательных аппаратов с жидкими грузами, рассматриваем во время разгона не строго вертикальный, а несколько наклоненный сосуд.

Заметим, что задача о нелинейных свободных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в *прямоугольном* сосуде относится к числу сложных и до конца не решена. В частности, не доказано существование ее точного решения. Различные при-

ближенные решения строились в работах [1,6], где также имеется библиография работ с более частными результатами по этому вопросу.

1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается прямоугольный недеформируемый сосуд, частично заполненный идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности ρ . С сосудом жестко связана правая декартова система координат $Oxyz$, начало O которой размещено в центре сосуда, а оси x, y, z параллельны его ребрам с длинами $2a, 2b, 2c$ соответственно. Вся система "сосуд-жидкость" находится в поле силы тяжести и движется относительно некоторой инерциальной системы координат $O^*\xi\zeta$, ось $O^*\zeta$ которой направлена по вектору g_0 ускорения силы тяжести в противоположном ему направлении.

Сосуд совершает поступательное движение, которое состоит из двух этапов. На первом этапе он движется равноускоренно (равнозамедленно), причем вектор ускорения w_0 в проекциях на оси $O^*\xi\zeta$ имеет вид

$$w_0 = (0, w, 0) \quad (w = \text{const}).$$

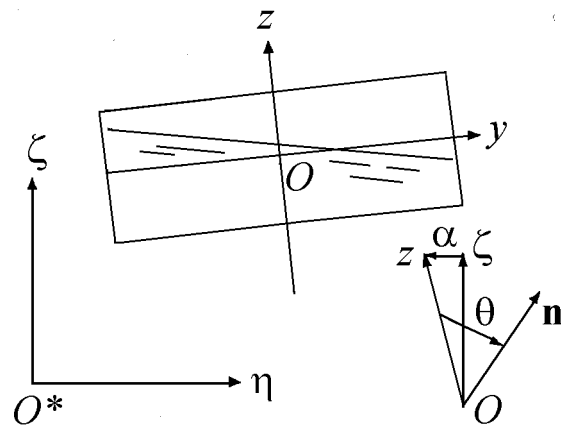


Рис. 1. Схема сосуда с жидкостью и системы координат; вектор n обозначает нормаль к "зеркалу" жидкости, совпадающую с вектором кажущегося ускорения $w_0 - g_0$ (w_0 – вектор ускорения сосуда)

На втором этапе сосуд совершает равномерное движение со скоростью, достигнутой на первом этапе (в частности, покоится). Кроме того, он может быть повернут вокруг оси Ox , совпадающей в любой момент времени t с осью $O^*\xi$, на некоторый угол. Угловое положение сосуда характеризуется углом α отклонения оси Oz от оси $O^*\zeta$ (α считается положительным при повороте сосу-

да против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Ox , рис. 1).

Предполагается, что:

- 1) жидкость совершает плоское движение параллельно плоскости Oyz ,
- 2) поле абсолютной скорости жидкости является потенциальным,
- 3) сосуд открытый,
- 4) свободная поверхность $\Sigma(t)$ может быть представлена явным уравнением

$$z = \zeta(y, t), \quad (5)$$

- 5) в начальный момент времени t_0 жидкость выведена из положения равновесия и покоится относительно сосуда, а ее свободная поверхность задана уравнением

$$z = \zeta_0(y), \quad y \in [-b, b],$$

- 6) дно сосуда ни при каких t не обнажается,
- 7) функция $\zeta(y, t)$ может принимать значения, соизмеримые с глубиной заполнения сосуда H_0 .

Требуется рассчитать свободные колебания жидкости, а именно: для любого момента времени $t \in [t_0, t_1]$ найти относительную скорость $u(y, z, t)$ жидкости; поле давлений $P(y, z, t)$ в жидкости вплоть до границы $S(t)$ жидкой области ($S(t)$ – смоченная часть внутренней поверхности сосуда); форму свободной поверхности $\Sigma(t)$, т.е. функцию $\zeta(y, t)$ из уравнения (5).

Отрезок времени $[t_0, t_1]$ считается конечным.

2. ИСХОДНАЯ НАЧАЛЬНО–КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Исходная начально–краевая задача для рассматриваемой гидродинамической задачи, как известно, имеет вид (случай движения сосуда без ускорения):

$$\Delta\varphi(r, t) = 0, \quad r \in \Omega(t), \quad t \in (t_0, t_1), \quad (6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \quad r \in S(t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \frac{\zeta_t}{\sqrt{1 + \zeta_y^2}}, \quad r \in \Sigma(t), \quad (8)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - g(\alpha) \cdot r = C(t) - \frac{p_0}{\rho}, \quad r \in \Sigma(t), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, t_0) &= \varphi_0(r), \quad \zeta(y, t_0) = \zeta_0(y), \\ (\Delta\varphi_0 &= 0, \quad r \in \Omega(t_0)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega(t)} d\Omega(t) = V = \text{const.} \quad (11)$$

Здесь $\varphi(r, t)$ – потенциал относительной скорости $u(r, t)$ жидкости, так что $u = \nabla\varphi$ (оператор ∇ действует по переменным y, z); $r = (y, z)$ – радиус-вектор произвольной жидкой частицы в системе координат Oyz ; $\Omega(t)$ – занятая жидкостью в момент t плоская область с границей $S(t) + \Sigma(t)$; $\nu(r, t)$ – орт внешней нормали к границе области $\Omega(t)$;

$$g(\alpha) = (-g \sin(\alpha), -g \cos(\alpha))$$

– вектор ускорения g_0 сил тяжести в проекциях на подвижные оси Oyz ; g – величина вектора ускорения сил тяжести; $p_0 = \text{const}$ – постоянное давление на свободной поверхности жидкости; $\varphi_0(r)$ – функция φ в начальный момент времени t_0 ; $V = \text{const}$ – объем жидкости. Нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, оператор Δ действует по y, z , точка “.” обозначает скалярное произведение векторов.

Неизвестными являются функции $\varphi(r, t)$, $\zeta(y, t)$. Остальные параметры $\alpha, p_0, C(t), \rho, \varphi_0(r), \zeta_0(y), V, t_0, t_1$, а также поверхность полости $S(t)$ считаются заданными.

Начально–краевая задача (6) – (11) классифицируется как задача для уравнения в частных производных в изменяющейся со временем неизвестной области, с нелинейностями в граничных условиях и с дополнительным интегральным условием. Ее разрешимость в общем случае не доказана. Дальнейшее ее исследование выполняется с помощью вариационного метода в форме Бейтмена – Люка – Уизема [1, 3].

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$J[\varphi, \zeta] \rightarrow \text{extr}, \quad \int_{\Omega(t)} d\Omega(t) = V. \quad (12)$$

Здесь $J[\varphi, \zeta]$ является интегральным функционалом вида

$$J[\varphi, \zeta] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \varphi_t, \nabla\varphi, \zeta) dt \quad (13)$$

с интегрантом

$$L(t, \varphi_t, \nabla\varphi, \zeta) = \int_{\Omega(t)} (P(r, t, \varphi_t, \nabla\varphi) - p_0) d\Omega(t), \quad (14)$$

$$P(r, t, \varphi_t, \nabla\varphi) = \rho[C(t) - \varphi_t - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g(\alpha) \cdot r]. \quad (15)$$

Запись (12) означает, что необходимо найти пару функций (φ, ζ) , доставляющих экстремум (минимум или максимум) функционалу (13) с одновременным выполнением интегрального условия постоянства объема жидкости. В [3] показано, что вариационная задача (12) – (15) эквивалентна краевой задаче (6) – (11), а краевое условие (8) является естественным для нее. Применяя прямой метод Майлса – Луковского для решения вариационной задачи (12) – (15), введем следующие аппроксимации искомых функций:

$$\zeta(y, t) \simeq \zeta_N(y, t) = \sum_{n=0}^N \beta_n(t) f_n(y), \quad (16)$$

$$\varphi(r, t) \simeq \varphi_M(r, t) = \sum_{m=0}^M R_m(t) \varphi_m(r), \quad (17)$$

где

$$\{f_n(y)\}_{n=0}^N, \quad \{\varphi_m(r)\}_{m=0}^M$$

– системы координатных функций, которые будут выбраны ниже; $\beta_n(t)$ – обобщенные координаты свободной поверхности; $R_m(t)$ – обобщенные квазискорости жидкости (термин “квазискорости” оправдан тем, что величины R_m являются, как видно из уравнения (3), линейными комбинациями обобщенных скоростей β_n); N, M – целые положительные числа. Задача заключается в нахождении функций $\beta_n(t), R_m(t)$. Построим систему соотношений, определяющих эти функции. Подстановка уравнений (16), (17) в (14) с учетом (15) даёт следующее выражение для интегранта:

$$L(t, \varphi_t, \nabla \varphi, \zeta) \simeq L_1(t, \beta, R), \quad (18)$$

где введены обозначения

$$\beta = (\beta_0, \dots, \beta_N), \quad R = (R_0, \dots, R_M),$$

$$L_1(t, \beta, R) = \rho \int_{\Omega(t)} [C(t) - \frac{p_0}{\rho} - \sum_{k=0}^M \frac{dR_k}{dt} \varphi_k - \frac{1}{2} (\sum_{k=0}^M R_k \nabla \varphi_k)^2 + g(\alpha) \cdot r] d\Omega(t). \quad (19)$$

Известно, далее, что система уравнений Эйлера вариационной задачи (12) с интегрантом L может быть представлена в виде уравнений Лагранжа второго рода относительно функции L . Учитывая представление (18), запишем их как

$$\frac{\partial L_1}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{R}_k} - \frac{\partial L_1}{\partial R_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M. \quad (21)$$

Подставим в уравнения (20), (21) выражение (19) и выполним необходимые преобразования. Тогда получим следующую систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $R_k(t), \beta_i(t)$ из аппроксимаций (16), (17):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^M \frac{\partial A_k}{\partial \beta_i} \frac{dR_k}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{k,j=0}^M \frac{\partial A_{kj}}{\partial \beta_i} R_k R_j = \\ & = \sum_{n=2}^3 g_n \frac{\partial l_n}{\partial \beta_i} + [C(t) - \frac{p_0}{\rho}] F_i[D(\zeta)], \\ & i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N \frac{\partial A_k}{\partial \beta_i} \frac{d\beta_i}{dt} - \sum_{j=0}^M A_{kj} R_j = 0, \\ & k = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь g_n ($n = 2, 3$) – проекции вектора g_0 на оси y, z соответственно; l_n ($n = 2, 3$) – статические моменты инерции жидкой массы в момент t , причем

$$l_2 = \rho \int_{\Omega(t)} y d\Omega(t), \quad l_3 = \rho \int_{\Omega(t)} z d\Omega(t). \quad (24)$$

Кроме того, ($k, j = 0, 1, \dots, M$),

$$A_k = \rho \int_{\Omega(t)} \varphi_k(y, z) d\Omega(t); \quad (25)$$

$$A_{kj} = \rho \int_{\Omega(t)} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j d\Omega(t); \quad (26)$$

$$\begin{aligned} F_i[D(\zeta)] &= \rho \int_{D(\zeta)} f_i(y) dD, \\ i &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (27)$$

В формуле (27) область интегрирования $D(\zeta)$ представляет собой проекцию на ось Oy свободной поверхности $\Sigma(t)$. Поскольку сосуд открытый и дно не обнажается, $D(\zeta) = [-b, b]$. Начальные условия общей начально-краевой задачи (6)–(10) естественным образом преобразуются в начальные условия для систем интегродифференциальных уравнений (22), (23). В силу (10) в начальный момент имеем

$$\varphi(r, t_0) = \varphi_0(r).$$

Представляя правую часть этого равенства в виде конечной суммы ряда Фурье по координатным функциям $\{\varphi_m(y, z)\}$, т.е.

$$\varphi_0(y, z) = \sum_{m=0}^M a_m \varphi_m(y, z),$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых формах φ_m в суммах для $\varphi(y, z, t_0)$ и $\varphi_0(y, z)$, приходим к таким начальным условиям:

$$R_m(t_0) = a_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (28)$$

Аналогично,

$$\beta_n(t_0) = b_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (29)$$

где b_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье по координатным функциям $\{f_n(y)\}$ заданной функции ζ_0 , т.е.

$$\zeta_0(y) = \sum_{n=0}^N b_n f_n(y).$$

Итак, исходная начально-краевая задача для уравнения в частных производных (6)–(11) сведена к задаче Коши для системы обыкновенных интегродифференциальных уравнений (22), (23). Эта система уравнений относится к классу нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных. Она является автономной, так как не содержит в явном виде t . Порядок системы равен $N + M + 2$. Теперь для анализа динамики жидкости можно применить один из численных методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, что во многих отношениях выгодней численного решения уравнений в частных производных.

Из формул (24) – (26), видно, что величины l_i , A_k , A_{kj} являются функциями переменных β_0, \dots, β_N и не зависят от R_0, \dots, R_M . Следовательно, коэффициенты при производных, которые являются интегралами по переменной области $\Omega(t)$, также зависят только от неизвестных β_i . Система уравнений (22), (23) совпадает с точностью до обозначений и слагаемого

$$\left[C(t) - \frac{p_0}{\rho}\right] F_i [D(\zeta)]$$

с системой уравнений (7.8), (7.9) работы [3, стр. 57] для цилиндрического сосуда, если в первой положить угол поворота сосуда $\alpha = 0$. Кроме того, можно показать [7, стр. 81], что для прямоугольного сосуда

$$\frac{d}{dt} A_k = \sum_{i=0}^N \frac{\partial A_k}{\partial \beta_i} \frac{d\beta_i}{dt}.$$

Сложность систем уравнений (22), (23) очевидна. Один из методов ее приближенного решения заключается в замене с помощью уравнений (22) параметров R_k их линейными формами от $d\beta_i/dt$ и последующего сведения всей системы к системе уравнений 2-го порядка относительно функций β_i [3, стр. 58]. Однако, как показывают исследования, этот метод сопряжен с громоздкими выкладками при получении конкретных выражений упомянутых линейных форм для R_k и нахождении их производных dR_k/dt для перехода от (23) к уравнениям 2-го порядка относительно β_i . О характере возникающих при этом трудностей можно судить по результатам решения задачи для кольцевого цилиндра, когда в аппроксимациях свободной поверхности ζ и потенциала φ удерживалось по пять слагаемых [3, стр. 104]. Альтернативный метод заключается в численном интегрировании системы уравнений (22), (23) без предварительного сведения ее к системе уравнений 2-го порядка. Разработка этого метода и алгоритма его численной реализации на компьютерах (в случае прямоугольного сосуда) осуществляется ниже.

4. КООРДИНАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Определимся с координатными функциями $f_i(y)$ и $\varphi_k(y, z)$ в аппроксимациях (16), (17). В качестве таковых выберем решения линейной задачи о свободных колебаниях жидкости в строго вертикальном баке ($\alpha = 0$), т. е. следующей спектральной задачи с параметром в граничном условии:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_k &= 0 \quad \text{в } \Omega_0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \Big|_{z=-c} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \Big|_{z=h_0} &= \frac{\sigma_k^2}{g} \varphi_k, \end{aligned}$$

где Ω_0 ; h_0 – соответственно область $\Omega(t)$ и z -координата "зеркала" жидкости в неподвижном сосуде при $\alpha = 0$, σ_k – k -я собственная частота колебаний жидкости.

Решение этой задачи, как известно, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi_k(y, z) &= \cos(k\alpha y) \operatorname{ch} [k\alpha(z+c)], \quad k = 0, 2, 4, \dots, \\ \varphi_k(y, z) &= \sin(k\alpha y) \operatorname{ch} [k\alpha(z+c)], \quad k = 1, 3, 5, \dots, \\ \sigma_k &= \sqrt{kg\alpha \operatorname{th} [k\alpha(h_0+c)]}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{2b}. \quad (30)$$

При таком выборе координатных функций волновой потенциал φ представляется в виде

$$\varphi(y, z, t) \simeq \sum_{k=0}^M (-1)^{E((k+1)/2)} R_k(t) \cos[k(\alpha y + \frac{\pi}{2})] \operatorname{ch}[k\alpha(z+c)], \quad (31)$$

где $E((k+1)/2)$ – целая часть числа $(k+1)/2$. Непосредственно можно убедиться, что в исходной задаче (6)–(11) за счет выбора координатных функций в аппроксимации (31) потенциала φ оказываются удовлетворенными уравнение Лапласа, кинематические условия на границе $S(t)$ полости и условие гармоничности начального потенциала. Остальные соотношения (кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности, условие постоянства объема) должны быть удовлетворены за счет функций $R_k(t)$ и $\zeta(y, t)$ (последняя определяется выбором $\beta_i(t)$, $f_i(y)$).

Обратимся к координатным функциям $f_i(y)$. Выберем их следующим образом:

$$\{f_i(y)\}_{i=0}^N = \{1, \sin(\alpha y), \cos(2\alpha y), \sin(3\alpha y), \dots\}. \quad (32)$$

Тогда, в силу уравнения (16), свободная поверхность $\Sigma(t)$ представится в виде

$$z \simeq \sum_{i=0}^N (-1)^{E((i+1)/2)} \beta_i(t) \cos[i(\alpha y + \frac{\pi}{2})]. \quad (33)$$

Аппроксимация свободной поверхности выражением (33) обеспечивает выполнение условий постоянства объема жидкости. Действительно, область интегрирования $\Omega(t)$ в условии (11) определяется как плоское множество вида

$$\Omega(t) = \{(y, z) : |y| < b; -c < z < \zeta(y, t)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} d\Omega(t) &= \int_{-b}^b \int_{-c}^{\zeta(y,t)} dz dy = \\ &= \int_{-b}^b [\zeta(y, t) + c] dy. \end{aligned}$$

В то же время, объём жидкости, очевидно, равен

$$V = 2b(c + h_0).$$

С учетом этих выражений условие (11) будет иметь вид

$$\int_{-b}^b [\zeta(y, t) + c] dy = 2b[c + h_0].$$

Подстановка в него формул (33) дает равенство

$$\int_{-b}^b [\beta_0(t) + c] dy = 2b[c + h_0],$$

которое будет справедливо при

$$\beta_0(t) \equiv h_0. \quad (34)$$

Таким образом, условие постоянства объема жидкости оказывается выполненным и сразу дает значение искомой функции $\beta_0(t)$. Позже выяснится, что в решениях уравнений колебаний жидкости (22), (23) функция $\beta_0(t)$ должна быть именно такой.

Заметим, что в [1, стр. 422] было $\beta_0(t) \equiv 0$. Это связано с выбором начала системы координат $Oxyz$ на поверхности невозмущенной жидкости при условии $h_0 = 0$.

5. СТРУКТУРА ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА

Оказывается, точные уравнения (22), (23) в случае прямоугольного сосуда имеют достаточно простую для программирования структуру даже без традиционных упрощений, связанных с удержанием в них лишь членов определенного порядка малости. Покажем это. Представим их в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} A^T(\beta) \frac{dR}{dt} &= K(\beta) \cdot g(\alpha) + [C(t) - \frac{p_0}{\rho}] F(\beta) - \\ &- \frac{1}{2} \nabla_{\beta} [R^T \cdot B(\beta) \cdot R], \end{aligned} \quad (35)$$

$$A(\beta) \frac{d\beta}{dt} = B(\beta) \cdot R. \quad (36)$$

Здесь введены следующие матрицы (верхний индекс T обозначает транспонирование матрицы): $A(\beta)$ – $(M+1) \times (N+1)$ -матрица с элементами

$$a_{ki}(\beta) = \frac{\partial A_k(\beta)}{\partial \beta_i}, \quad k = 0, \dots, M, \quad i = 0, \dots, N; \quad (37)$$

$B(\beta)$ – $(M+1) \times (M+1)$ -матрица с элементами

$$b_{ki}(\beta) = A_{ki}(\beta), \quad k, i = 0, \dots, M; \quad (38)$$

∇_{β} – оператор градиента по переменным $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$; $K(\beta)$ – транспонированная $2 \times (N+1)$ -матрица Якоби отображения $l(\beta)$, т.е.

$$K_{((N+1) \times 2)}(\beta) = \left[\frac{\partial(l_2, l_3)}{\partial(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)} \right]^T; \quad (39)$$

$$F(\beta) = [F_0(\beta), F_1(\beta), \dots, F_N(\beta)]^T$$

– вектор-столбец с компонентами $F_i(\beta) = F_i[D(\zeta)]$ (27); $\nabla_\beta(R^T \cdot B(\beta) \cdot R)$ – градиент квадратичной формы от переменных R_0, R_1, \dots, R_M с матрицей $B(\beta)$. Уравнения (35), (36) сравнительно просто зависят от искомого функций $R_k(t)$ и довольно сложным образом включают искомые функции $\beta_i(t)$, которые входят и в подынтегральные функции, и в пределы интегрирования. Выполняя дальнейшие преобразования систем (35), (36), поменяем местами составляющие ее матричные уравнения и представим матричное произведение $K(\beta) \cdot g(\alpha)$ в виде сумм:

$$K(\beta) \cdot g(\alpha) = -g \cos(\alpha) K_0 \cdot \beta - g \sin(\alpha) K_1, \quad (40)$$

где K_0 и K_1 – соответственно квадратная матрица и вектор-столбец размера $(N + 1)$, которые будут описаны ниже. В результате система уравнений (35), (36) преобразуется к следующему достаточно удобному для программирования виду:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & A(\beta) \\ A^T(\beta) & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} R \\ \beta \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} B(\beta) & 0 \\ 0 & -g \cos(\alpha) K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \beta \end{bmatrix} - \\ & - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ S(\beta, R) \end{bmatrix} - g \sin(\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ (C(t) - p_0/\rho) F(\beta) \end{bmatrix}. \quad (41) \end{aligned}$$

Здесь для компактности записи введен вектор квадратичных форм по переменным R_k , определяемый формулой

$$S(\beta, R) = \nabla_\beta(R^T \cdot B(\beta) \cdot R).$$

Этот вектор имеет размерность $N + 1$, а каждая его компонента является квадратичной формой по R_k с матрицей, обозначаемой в дальнейшем через $S^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, N$. Теперь уравнения колебаний жидкости (41) можно классифицировать как квазилинейные автономные интегродифференциальные уравнения первого порядка, правые части которых содержат линейные по R_k , β_i и квадратичные по R_k формы с коэффициентами, зависящими от β_i . Эти коэффициенты определяются следующими формулами: матрица $A = (a_{ki})$ –

$$\begin{aligned} a_{ki} &= \rho \int_{-b}^b f_i(y) \varphi_k(y, \zeta(y, \beta)) dy, \\ k &= 0, 1, \dots, M, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (42) \end{aligned}$$

матрица $B = (b_{kj})$ –

$$\begin{aligned} b_{kj} &= \rho \int_{-b}^b \int_{-c}^{\zeta(y, \beta)} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j dz dy, \\ k, j &= 0, 1, \dots, M; \quad (43) \end{aligned}$$

матрица $K_0 = (k_{ij})$ –

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \rho \int_{-b}^b f_i(y) f_j(y) dy, \\ i, j &= 0, 1, \dots, N; \quad (44) \end{aligned}$$

матрицы $S^{(i)} = (s_{kj}^{(i)})$ вектора квадратичных форм $S(\beta, R)$ –

$$\begin{aligned} s_{kj}^{(i)} &= \rho \int_{-b}^b f_i(y) [\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j]_{z=\zeta(y, \beta)} dy, \\ k, j &= 0, 1, \dots, M, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (45) \end{aligned}$$

вектор $K_1 = (k_i^{(1)})$ –

$$\begin{aligned} k_i^{(1)} &= \rho \int_{-b}^b f_i(y) f_1(y) dy, \\ i &= 0, 1, \dots, N; \quad (46) \end{aligned}$$

вектор $F(\beta) = (F_i)$ –

$$\begin{aligned} F_i &= \rho \int_{-b}^b f_i(y) dy, \\ i &= 0, 1, \dots, N. \quad (47) \end{aligned}$$

В соотношениях (42) – (47) координатные функции $\varphi_k(y, z)$, $f_i(y)$ определяются формулами (30), (32). Уравнения (41) обладают определенной симметрией. Из формул (43), (44) для элементов матриц $B(\beta)$, K_0 следует, что матрица

$$\begin{bmatrix} B(\beta) & 0 \\ 0 & -g \cos(\alpha) K_0 \end{bmatrix}$$

является симметрической. Симметрична также и матрица при производных

$$\begin{bmatrix} 0 & A(\beta) \\ A^T(\beta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Симметричность этой матрицы сохраняется даже при $N \neq M$. Из ортогональности систем координатных функций $\{f_i\}$ на отрезке $[-b, b]$ следует, что матрица K_0 будет диагональной вида

$$K_0 = \rho b \cdot \text{diag}(2, 1, \dots, 1), \quad \dim(K_0) = N + 1.$$

Пользуясь тем же свойством ортогональности функций $\{f_i\}$ и формулами (46), находим вид вектора K_1 , а именно:

$$K_1 = \rho b \cdot (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad \dim(K_1) = N + 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что поворот сосуда на угол α приводит, кроме умножения матрицы K_0 на $\cos(\alpha)$, лишь к появлению в одном из уравнений движения жидкости постоянного слагаемого, зависящего только от параметра b сосуда и синуса угла поворота α . (Плотность ρ жидкости, очевидно, не будет входить в уравнения (41).) Столь же простым и не зависящим от β оказывается в общем случае и вектор $F(\beta)$. Именно, в силу формул (47), получаем:

$$F(\beta) = \rho \cdot (2b, 0, \dots, 0)^T, \quad \dim(F) = N + 1.$$

Установленная симметрия нелинейных уравнений аналогична известной симметрии уравнений колебаний линейных "твердых" систем с конечным числом степеней свободы. Однако в случае "жидкой" колебательной системы появляется специфика, связанная, как видно из уравнения (41), с зависимостью от β_i (т. е. от свободной поверхности $\zeta(y, \beta)$) элементов указанных симметрических матриц и с квадратичной формой $S(\beta, R)$. Уравнения (41) кладутся в основу предлагаемого метода численного анализа нелинейных свободных колебаний жидкости в наклоненном прямоугольном сосуде.

6. ОБРАТИМОСТЬ МАТРИЦЫ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Обратимость матрицы при производных имеет большое значение при построении методов численного интегрирования общих нелинейных уравнений (41). Вопрос об обратимости (невырожденности) в данном случае довольно сложен, поскольку связан с оценкой интегралов, зависящих от неизвестных функций $\beta_i(t)$ и представляющих собой элементы матрицы при производных. Оказывается, однако, что при некоторых условиях эта матрица может быть тождественно (по t) невырожденной.

Чтобы показать это, положим

$$c + h_0 + \sum_{i=0}^N \beta_i(t) f_i(y) \simeq c + h_0,$$

т. е. допустим, что возвышения взволнованной свободной поверхности над плоскостью невозмущенной свободной поверхности малы по сравнению с глубиной жидкости в сосуде (точнее, по

сравнению с $|h_0|$). Кроме того, пренебрежем квадратичными формами $S(\beta, R)$, что равносильно малости квадрата скорости $\nabla\varphi$ жидкости. Также будем полагать, что число координатных функций φ_k равно числу координатных функций f_i , т.е. $N = M$. Тогда матрицы A, B уравнения (41) приобретут вид (простые, но обширные выкладки опускаем):

$$A = \rho b \cdot \text{diag}(2, a_{11}^*, \dots, a_{MM}^*),$$

$$a_{kk}^* = \text{ch}(k\alpha H_0), \quad k = 1, \dots, M. \quad (48)$$

$$B = \frac{1}{2} \rho b \alpha \cdot \text{diag}(0, b_{11}^*, \dots, b_{MM}^*),$$

$$b_{kk}^* = k \text{sh}(2k\alpha H_0), \quad k = 1, \dots, M, \quad (49)$$

где $H_0 = c + h_0$ – глубина жидкости в сосуде. Учитывая, что при сделанных предположениях матрица K_0 сохраняет вид (44), а также полагая угол α равным нулю и используя выражения (48), (49), получим из уравнения (41) следующую систему уравнений относительно координат β_i и квазискоростей R_k :

$$\frac{d\beta_k}{dt} = k\alpha \text{sh}(k\alpha H_0) R_k, \quad \text{ch}(k\alpha H_0) \frac{dR_k}{dt} = -g\beta_k,$$

$$k = 1, \dots, M. \quad (50)$$

Отсюда следует, что при рассматриваемых условиях система уравнений (41) имеет тождественно невырожденную матрицу при производных.

Заметим, что исключая из уравнений (50) сначала R_k , а затем β_k , получаем уравнения

$$\frac{d^2\beta_k}{dt^2} + g\lambda_k\beta_k = 0, \quad \frac{d^2R_k}{dt^2} + g\lambda_k R_k = 0,$$

$$\lambda_k = k\alpha \text{th}(k\alpha H),$$

которые с точностью до обозначений β_k, R_k совпадают с уравнениями главных колебаний жидкости, полученными Н.Н.Моисеевым в [8, стр. 64].

Таким образом, общие нелинейные уравнения (41) при рассмотренных условиях превращаются в классические уравнения малых колебаний жидкости с тождественно (по t) невырожденной матрицей при производных. По непрерывности матрица при производных должна оставаться невырожденной и при нелинейных колебаниях жидкости (по крайней мере, достаточно малых). В общем же случае вопрос о том, вырождается ли матрица при производных и в какие моменты времени, требует отдельного изучения.

7. ФУНКЦИИ $\beta_0(t)$, $R_0(t)$, $C(t)$ И ДАВЛЕНИЕ

Уравнения (41) довольно сложны, и тем не менее компоненты $\beta_0(t)$ и $R_0(t)$ их решений получаются сразу. Действительно, в силу формул (42), (43) для элементов матриц $A(\beta)$ и $B(\beta)$, первое из уравнений (41) имеет вид

$$2b\rho \frac{d\beta_0}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$\beta_0(t) \equiv \text{const}$$

при любых движениях полости.

Замечание. Этот вывод справедлив лишь в случае открытого сосуда. Если же имеется крышка и свободная поверхность касается крышки, то $\beta_0(t)$ не будет постоянной величиной.

Точное значение константы определяется из условия (34) постоянства объема жидкости, так что

$$\beta_0(t) \equiv h_0.$$

Обратимся к первому из группы уравнений (41) с матрицей A^T . Поскольку только элемент a_{11} в первой строке матрицы A отличен от нуля, в транспонированной матрице A^T все элементы первого столбца, кроме a_{11} , будут равны нулю. Следовательно, учитывая приведенные выше выражения для элементов остальных матриц, рассматриваемое уравнение можно записать как

$$2b\rho \frac{dR_0}{dt} = -2b\rho h_0 g \cos(\alpha) + 2b\rho [C(t) - \frac{p_0}{\rho}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_0} [R^T \cdot B(\beta) \cdot R]. \quad (51)$$

В силу того, что первая строка и первый столбец матрицы $B(\beta)$ состоят из нулей, квадратичная форма $R^T \cdot B(\beta) \cdot R$ не зависит от R_0 , а значит не зависит от R_0 и правая часть уравнения (51). По этой же причине остальные уравнения системы (41) также не содержат R_0 . Следовательно, из всех уравнений системы только одно зависит от функции R_0 , которая входит в его левую часть под знаком производной. Сама функция $R_0(t)$ может быть, при необходимости, определена интегрированием по t уравнения (51) после подстановки в него функций $R_k(t)$, $\beta_i(t)$ с отличными от нуля индексами.

Положим в уравнении (51) (случай движения сосуда без ускорения)

$$C(t) = \frac{p_0}{\rho} + g \cos(\alpha) h_0. \quad (52)$$

Эта формула для $C(t)$ получается из интеграла Лагранжа-Коши при $\varphi(y, z, t) \equiv 0$, т.е. при равновесии жидкости. Тогда

$$\frac{dR_0}{dt} = -\frac{1}{4b\rho} \frac{\partial}{\partial \beta_0} [R^T \cdot B(\beta) \cdot R]. \quad (53)$$

Функция $R_0(t)$ не влияет на поле скоростей жидкости, поскольку оно определяется как градиент $\nabla\varphi(y, z, t)$ потенциала по пространственным переменным. Однако ее нельзя игнорировать, поскольку от нее зависит давление $P(r, t, \varphi)$, которое, как видно из уравнения (15), содержит производную $\varphi_t(y, z, t)$, а значит и dR_0/dt . Остановимся на этом подробнее и получим выражение для давления через функции $\beta_i(t)$, $R_k(t)$.

Если потенциал φ аппроксимируется выражением (17), формула (15) для давления приобретает вид

$$P(r, t, \varphi_t, \nabla\varphi) \simeq \rho [C(t) - \sum_{k=0}^M \frac{dR_k}{dt} \varphi_k - \frac{1}{2} (\sum_{k=0}^M R_k \nabla\varphi_k)^2 + g(\alpha) \cdot r].$$

Подставив сюда найденные выражения (52) и (53) для $C(t)$ и dR_0/dt , получим следующую расчетную формулу для давления:

$$P \simeq P_0(y, z, h_0, \alpha) + P_1(\tilde{R}, \beta) + P_2(y, z, \tilde{R}, \beta), \quad (54)$$

где

$$P_0(y, z, h_0, \alpha) = p_0 + \rho g [(h_0 - z) \cos(\alpha) - y \sin(\alpha)],$$

$$P_1(\tilde{R}, \beta) = \frac{1}{4b} R^T \cdot S^{(0)} \cdot R,$$

$$P_2(y, z, \tilde{R}, \beta) = -\rho [\sum_{k=1}^M \frac{dR_k}{dt} \varphi_k + \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^M R_k \nabla\varphi_k)^2].$$

В этих соотношениях вектор $\tilde{R} = (R_1, \dots, R_M)$, матрица $S^{(0)}$ определяется по формулам (45), а суммирование в квадратичной форме по R_k начинается с единицы, поскольку $\nabla\varphi_0 = 0$.

В формуле (54) функция P_0 определяет статическую составляющую давления в наклонном сосуде; P_1 – составляющую давления, обусловленную производной по t от R_0 ; P_2 – гидродинамическую составляющую, обусловленную производными по t от R_k и самими R_k при $k \neq 0$.

Заметим, что P_1 через $S^{(0)}$ зависит от ρ , а функция P_2 зависит от β через производные dR_k/dt .

Когда свободная поверхность $z = \zeta(y, \beta)$ является равновесной, давление равно просто P_0 .

Если в выражении (54) положить $p_0 = 0$, $h_0 = 0$, $\alpha = 0$, получится (с точностью до обозначений) формула для давления при неподвижном сосуде из работы [1, стр. 425, формула (5.1)]. Пространственно-независимая составляющая давления, на которую указано в этой работе, здесь конкретизируется слагаемым P_1 .

Как видно из выражения для P_1 и формул (45), эта составляющая давления является квадратичной формой от R_k , $k \neq 0$ и зависит от обобщенных координат жидкости β_i . Таким образом, связь давления P с изменяющейся свободной поверхностью (с вектором β) осуществляется через P_1 и первую сумму из P_2 . Другими словами, в формуле (15) для давления за свободную поверхность непосредственно "отвечает" частная производная φ_i . (О составляющей $\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2$ этого сказать нельзя, так как она зависит только от R_k .)

В точках свободной поверхности $z = \zeta(y, \beta)$ должно иметь место тождество по y вида

$$P_0(y, \zeta(y, \beta), h_0, \alpha) + P_1(\tilde{R}, \beta) + P_2(y, \zeta(y, \beta), \tilde{R}, \beta) \equiv p_0,$$

что можно использовать для контроля точности аппроксимаций $\zeta_N(y, t)$ и $\varphi_M(r, t)$, даваемых формулами (16), (17).

8. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА

Практическое решение уравнений типа Гамильтона (41) требует применения ЭВМ, что, в свою очередь, приводит к необходимости разработки соответствующих алгоритмов и программ.

Интегральные коэффициенты уравнений (41) зависят только от β_i и являются достаточно гладкими функциями этих параметров. Поэтому интегро-дифференциальные уравнения (41) можно рассматривать просто как дифференциальные. Заметим, что стандартных программ решения систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, не существует.

Не касаясь вопроса о выборе подходящего языка программирования, рассмотрим в основных чертах алгоритм численного решения этих уравнений на основе метода Рунге – Кутты. Хотя этот метод очень трудоемкий и в практических расчетах ему предпочитают разностные методы, целесообразно начать именно с него, потому что, во-первых, о его возможностях применительно к рассматриваемым гидродинамическим уравнениям (типа Гамильтона) в литературе почти ничего не сообщалось и, во-вторых, он обычно используется и в

разностных методах для решения проблемы начала счета, а именно, для предварительных вычислений решений в нескольких узлах.

Для определенности рассмотрим метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности, согласно которому решение задачи Коши для системы уравнений в нормальной форме, т.е. задачи

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (55)$$

вычисляется на каждом шаге h по формулам

$$x_i(t+h) = x_i(t) + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2(k_2^{(i)} + k_3^{(i)}) + k_4^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf_i(t, x_1, \dots, x_n), \\ k_2^{(i)} &= hf_i(t+h/2, x_1+k_1^{(1)}/2, \dots, x_n+k_1^{(n)}/2), \\ k_3^{(i)} &= hf_i(t+h/2, x_1+k_2^{(1)}/2, \dots, x_n+k_2^{(n)}/2), \\ k_4^{(i)} &= hf_i(t+h, x_1+k_3^{(1)}, \dots, x_n+k_3^{(n)}). \end{aligned}$$

8.1. Приведение уравнений к нормальной форме Коши

С целью перехода от исходной системы уравнений (41) к стандартной системе (55) положим

$$(x_1, x_2, \dots, x_{M+2}, x_{M+3}, \dots, x_{M+N+3}) = (t, R_0, \dots, R_M, \beta_0, \dots, \beta_N). \quad (57)$$

Тогда, при условии невырожденности матрицы $A(\beta)$, система (41) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_{M+3} \\ \dots \\ \dot{x}_{M+N+3} \end{bmatrix} &= (A(\beta))^{-1} B(\beta) \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_{M+2} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{M+2} \end{bmatrix} &= (A^T(\beta))^{-1} [-g \cos(\alpha) K_0 \begin{bmatrix} x_{M+3} \\ \dots \\ x_{M+N+3} \end{bmatrix} - \\ &- g \sin(\alpha) K_1 - \frac{1}{2} S(\beta, R) + (C(t) - \frac{p_0}{\rho}) F(\beta)]. \quad (58) \end{aligned}$$

Здесь справа векторы β и R выражаются через x_i в соответствии с соотношением (57).

Система уравнений (58) имеет стандартную форму Коши. Ее порядок $n = N + M + 3$. Поскольку для обратимости матрица A должна быть, как минимум, квадратной, следует брать $N = M$.

Из формул (42) для элементов a_{ki} матрицы A видно, что эти элементы являются зависящими от параметров

$$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) = (x_2, x_3, \dots, x_{N+2})$$

интегралами. Уже при небольших значениях N , M аналитические выражения для элементов обратных матриц A^{-1} и $(A^T)^{-1}$ получаются очень громоздкими, поэтому нет смысла выписывать их и зависящие от них функции $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ в аналитическом виде. Вместо этого будем в каждой точке t , диктуемой формулами (56) метода Рунге – Кутта, выполнять обращение матриц A и A^T численно, а затем вычислять правые части в системе (58). На каждом шаге количество таких обращений, как и количество вычислений правой части, равно четырем.

8.2. Интегральные коэффициенты уравнений

Особенность рассматриваемой системы уравнений (58) заключается еще и в том, что при каждом значении t , диктуемом методом Рунге – Кутта, необходимо вычислять интегральные коэффициенты этих уравнений, т.е. элементы матриц A , B , K_0 , K_1 , $S^{(i)}$ и F .

Как видно из формул (42) – (47), имеются три типа интегральных коэффициентов (в случае прямоугольной полости): 1) однократные интегралы с фиксированными пределами интегрирования, не зависящие от параметров β_i (матрицы K_0 , K_1 , F); 2) однократные интегралы с фиксированными пределами интегрирования, зависящие от параметров β_i (матрицы A , $S^{(i)}$); 3) двукратные интегралы с переменными верхними пределами, зависящими от β_i (матрица B).

Хотя параметры β_i являются функциями переменной t , при каждом значении этой переменной, диктуемом методом Рунге – Кутта, они оказываются фиксированными, так что все интегралы оказываются с фиксированными пределами интегрирования и с вполне определенными подынтегральными функциями. Это дает возможность вычислять все интегральные коэффициенты с помощью стандартных программ вычисления определенных интегралов (однократных и двукратных), имеющих во многих современных компьютерных библиотеках.

8.3. Описание алгоритма

Для описания алгоритма воспользуемся его определением как тройки $(T_{N,h}, L, T_x)$, где $T_{N,h}$ –

таблица входных параметров (индексы N, h напоминают, что в число входных включаются параметры дискретизации $N = M$ и h); T_x – таблица выходных параметров x_i ; L – блок управления работой алгоритма, осуществляющий отображение множества $T_{N,h}$ на множество T_x [9, стр. 281].

Вход алгоритма (таблица $T_{N,h}$).

1. Параметры системы $b, c, h_0, \alpha, g, \rho, p_0, C(t)$.
2. Системы координатных функций $\{f_i(y)\}$, $\{\varphi_k(y, z)\}$.
3. Числа N, M слагаемых в аппроксимирующих тригонометрических многочленах.

Сколько-нибудь общих рекомендаций по выбору чисел N, M не имеется, однако в осуществленных численных экспериментах вполне приемлемые результаты получались при $N = M = 7$.

4. Временной отрезок $[t_0, t_1]$.

Поскольку система уравнений автономна, выбор начального момента t_0 не имеет значения. В дальнейшем полагается $t_0 = 0$. Выбор t_1 зависит от конкретной задачи.

5. Начальные функции $\zeta_0(y)$, $\varphi_0(y, z)$.
6. Сетка с узлами τ_k на интервале времени $[0, t_1]$.

Определяет шаг счета по методу Рунге – Кутта. Равномерная сетка задается постоянным шагом счета h .

7. Сетка на отрезке $-b \leq y \leq b$ с узлами y_i .

Используется для вычисления интегральных коэффициентов, являющихся однократными интегралами по переменной y . Диктуется соответствующим методом вычисления однократных определенных интегралов.

8. Сетка в плоской области $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$ с узлами $\{(y_i, z_j)\}$.

Используется для вычисления интегральных коэффициентов, являющихся двукратными интегралами по пространственным переменным y, z . Определяется конкретным методом вычисления двукратных интегралов в фиксированных областях.

Блок управления L .

Блок управления во многом зависит от языка программирования, но в любом случае должен состоять из программных единиц, обеспечивающих следующие операции.

1. Вычисление начальных данных $R_k(t_0)$, $\beta_i(t_0)$.

Они определяются как коэффициенты Фурье функций $\zeta_0(y)$, $\varphi_0(y, z)$ в соответствии с формулами (28), (29).

2. Вычисление правых частей уравнений (58).

Эта программная единица должна обеспечить выполнение операций линейной алгебры над матрицами и векторами (в частности, транспонирование и обращение матриц). Кроме того, она

вызывает программы вычисления однократных и двукратных (определенных) интегралов.

3. Прогон по методу Рунге – Кутты.

Вычисление текущего значения $t = \tau_k$, параметров k_i^j и значений x_i искомым функциям на каждом шаге в соответствии с формулами (56).

4. Организация массивов для сохранения результатов счета и обмена с внешними носителями информации.

Выход алгоритма (таблица T_x).

На выходе рассматриваемого алгоритма получают значения массива $\{x_i\}$ (т.е. переменной t и векторов R, β) в точках $t = \tau_k$. С помощью этих массивов могут быть также вычислены по приведенным выше формулам гидродинамические характеристики, отмеченные в постановке задачи (давление, поле скоростей и свободная поверхность).

Описанный алгоритм вполне реализуем с помощью стандартных программ из библиотек современных компьютерных математических систем.

9. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ РАЗГОНА СОСУДА

Применим предлагаемый алгоритм к нелинейной задаче о неустановившихся волновых движениях жидкости после разгона сосуда. Аналогичная задача о нелинейных, но установившихся волнах (в неподвижном прямоугольном сосуде бесконечной длины с горизонтальным дном) решалась другим методом в [10, стр. 175].

Уточним постановку задачи. Прямоугольный сосуд с жидкостью, предварительно повернутый на некоторый угол α , совершает равноускоренное движение по горизонтали с постоянным ускорением $w > 0$, т.е. $w_0 = we_2$, где e_2 – орт оси $O^* \eta$. Под действием сил инерции поступательного движения "зеркало" жидкости отклонится от горизонтальной плоскости на некоторый угол. По достижении сосудом требуемой скорости v_0 ускорение w прак-

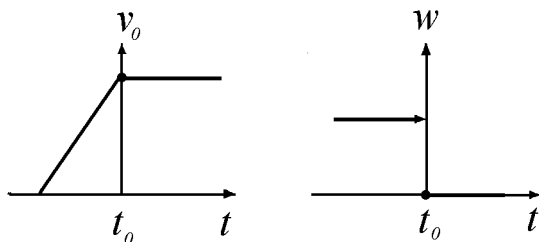


Рис. 2. Закон движения сосуда. В момент скачка ускорения начинается этап равномерного движения

С этого момента жидкость начинает совершать некоторые волновые движения под действием сил тяжести. Необходимо описать форму свободной поверхности жидкости в начальные моменты этапа равномерного движения сосуда.

Прежде всего найдем начальные значения функций $\beta_i(t)$ и $R_k(t)$.

Считаем, что в момент времени $t = t_0$ свободная поверхность имеет ту же форму, что и на этапе равноускоренного движения, т.е. представляется уравнением [7, стр. 76, формула (3.6)]

$$z = h_0 - \operatorname{tg}(\vartheta)y, \quad \operatorname{tg}(\vartheta) = \frac{g \sin(\alpha) + w \cos(\alpha)}{g \cos(\alpha) - w \sin(\alpha)}.$$

Здесь ϑ является углом отклонения от оси Oz внешней нормали к "зеркалу" жидкости, причем $\vartheta > 0$, если отклонение происходит по ходу часовой стрелки в плоскости Oyz (см. рис. 1). Полагая, таким образом,

$$\zeta_0(y) = h_0 - \operatorname{tg}(\vartheta)y \simeq \sum_{n=0}^N b_n f_n(y).$$

Далее, разлагая функцию $z = y$ в ряд Фурье на отрезке $[-b, b]$ по системе функций $f_n(y)$ (32), получаем

$$y = \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin[(2n+1)\pi y]}{(2n+1)^2}.$$

Подстановка в $\zeta_0(y)$ ряда Фурье для y и сопоставление коэффициентов при одинаковых гармониках показывают, что в представлении начальной свободной поверхности из всех b_n с четными n отличны от нуля только b_0 , а b_n с нечетными n все отличны от нуля. Таким образом, получаются следующие начальные условия для величин $\beta_i(t)$:

$$\beta_0(t_0) = h_0, \quad \beta_{2n}(t_0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\beta_{2n+1}(t_0) = \frac{8bt \operatorname{tg}(\vartheta)}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Для определения $R_k(t_0)$ заметим, что до момента t_0 жидкость покоилась относительно сосуда, т.е.

$$u(y, z, t) = \nabla \varphi(y, z, t) = \sum_{k=0}^M R_k(t) \nabla \varphi_k(y, z) \equiv 0,$$

где $u(y, z, t)$ – вектор относительной скорости жидкости. Полагая, что эти же соотношения выполняются и в момент $t = t_0$, находим следующие начальные условия для функций $R_k(t)$:

$$R_k(t_0) = 0, \quad k = 0, \dots, M.$$

Дальнейшее решение задачи сводится к численному интегрированию уравнений (41) по описанному выше алгоритму. Алгоритм реализован на языке Фортран.

Расчеты выполнены для системы со следующими параметрами: габариты сосуда –

$$b = 21\text{м}, \quad c = 8.5\text{м},$$

уровень заполнения и плотность жидкости –

$$h_0 = 4.25\text{м}, \quad \rho = 1000\text{кг} \cdot \text{м}^{-3},$$

ускорение силы тяжести и давление на свободной поверхности –

$$g = 9.81\text{м} \cdot \text{с}^{-2}, \quad p_0 = 10^5\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Числа $N = M = 7$, отрезок $[t_0, t_1] = [0.0, 10.0]$, шаг счета $dt = 0.2\text{с}$.

Заметим, что первые три собственные частоты колебаний жидкости в вертикальном ($\alpha = 0$) неподвижном сосуде при заданных габаритах и уровне заполнения имеют следующие значения (в рад $\cdot \text{с}^{-1}$):

$$\omega_1 = 0.738, \quad \omega_2 = 1.185, \quad \omega_3 = 1.479.$$

Они рассчитаны по формуле

$$\omega_n = \sqrt{gn\alpha \tanh[n\alpha(h_0 + c)]}.$$

Соответствующие периоды (в секундах)

$$T_1 = 8.5, \quad T_2 = 5.3, \quad T_3 = 4.2$$

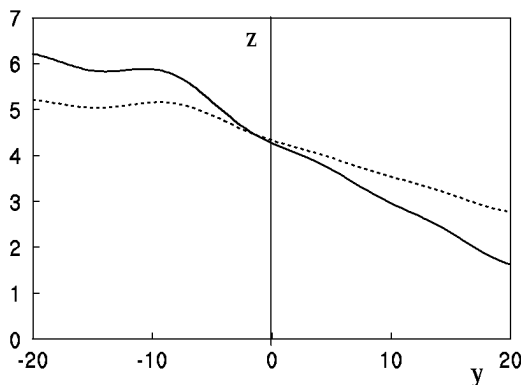


Рис. 3. Результаты расчета появления одиночной волны. Угол $\alpha = 5^\circ$. Начало (0,0) системы координат расположено в геометрическом центре бака. Сплошная линия соответствует $w = 0.5 \text{ мс}^{-2}$, $t = 0.6 \text{ с}$, штриховая – $w = 0.05 \text{ мс}^{-2}$, $t = 1.0 \text{ с}$

Из результатов расчетов (рис. 3) видно, что на первоначально плоской свободной поверхности через некоторое время появляется характерный гребень (одиночная волна), причем форма свободной поверхности, которая при ускорении $w = 0.05 \text{ мс}^{-2}$ наблюдается в момент $t = 1.0 \text{ с}$, при большем ускорении $w = 0.5 \text{ мс}^{-2}$ наблюдается уже в момент $t = 0.6 \text{ с}$.

Дальнейший процесс развития волн изображен на рис. 4. Из рис. 4, а, в частности, видно, что большим ускорениям w соответствуют большие углы первоначального отклонения "зеркала" жидкости от горизонта (при $w = 0.5 \text{ мс}^{-2}$ угол $\vartheta = 7.9^\circ$ и угол отклонения "зеркала" от горизонта $\vartheta - \alpha = 2.9^\circ$, а при $w = 0.05 \text{ мс}^{-2}$ $\vartheta = 5.3^\circ$ и соответственно $\vartheta - \alpha = 0.3^\circ$). Как следствие, в первом случае жидкость оказывается поднятой на большую высоту, а значит обладает большей потенциальной энергией, которая при колебаниях переходит в большую кинетическую энергию, что приводит к волновым движениям с большим размахом (большими амплитудами). Этим объясняется также и более быстрое образование гребня, отмеченное на рис. 3.

Результаты, представленные на рис. 4 сплошными линиями можно интерпретировать следующим образом. Одиночная волна после своего образования движется от задней стенки к передней и на 2-й секунде оказывается в некоторой окрестности точки $y = 0$ (рис. 4, б). Приблизительно через 4 секунды она достигает передней стенки (рис. 4, в), отражается от нее и уже на 6-й секунде (рис. 4, д) проходит середину сосуда в сторону задней стенки, причем за ней появляется второй гребень и на профиле волны отчетливо просматриваются два гребня и одна впадина. Около 8-й секунды первоначальная одиночная волна достигает задней стенки, а профиль волны состоит уже из двух гребней и двух впадин (рис. 4, е). На 10-й секунде профиль волны снова видоизменяется и имеет теперь два гребня и три впадины (рис. 4, ф), что, по-видимому, является результатом взаимодействия набегающих и отраженных волн. Штриховые линии отражают аналогичные, но происходящие с некоторым отставанием и менее интенсивные процессы.

Таким образом, первоначальная одиночная волна проходит расстояние от задней стенки сосуда до передней приблизительно за 4 с, что соответствует периоду свободных колебаний жидкости по третьей форме $T_3 = 4.2 \text{ с}$, который, в свою очередь, близок к полупериоду $T_1/2$ свободных колебаний жидкости по первой форме. Иначе говоря, в рассматриваемом случае имеет место резонансное

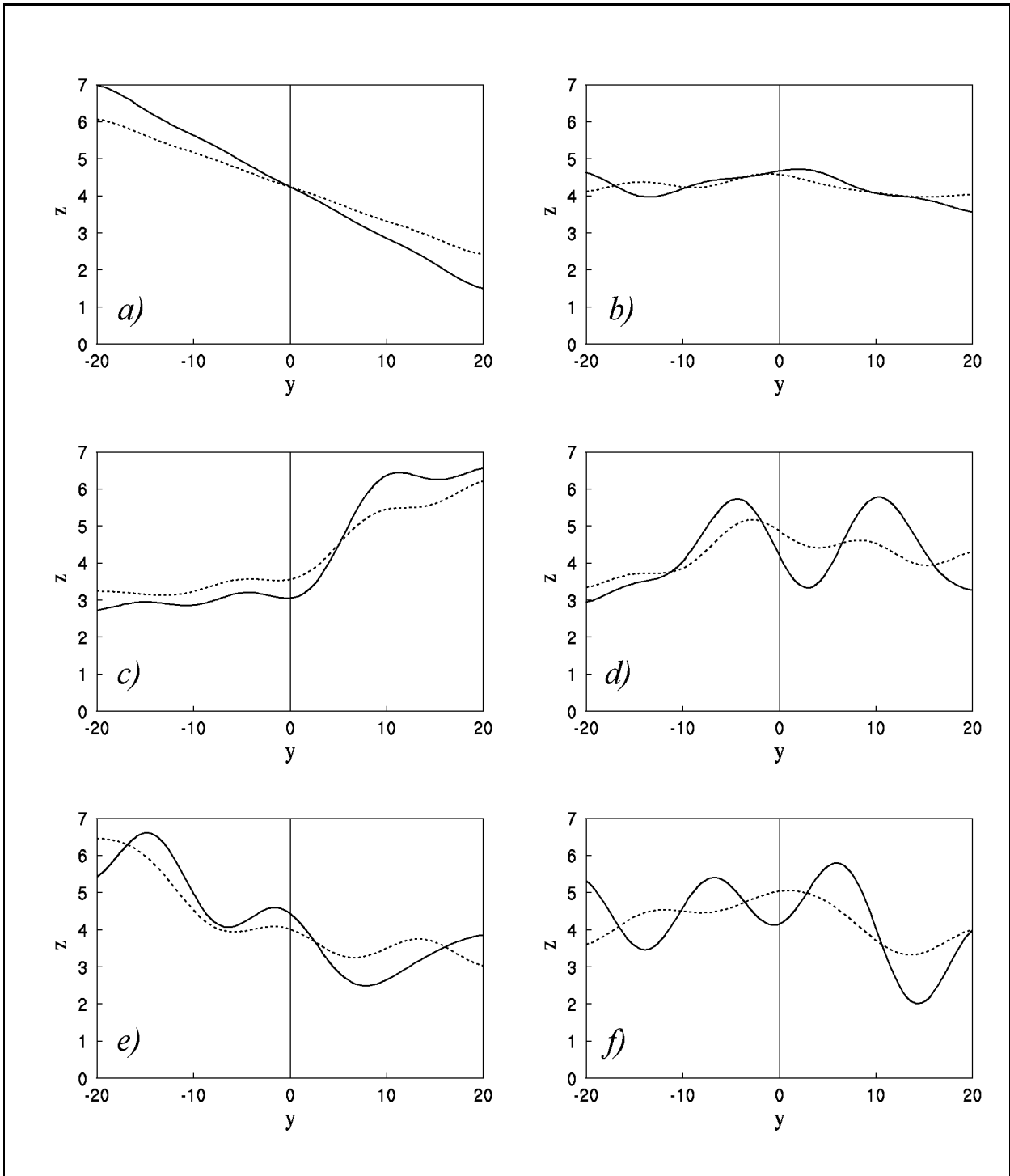


Рис. 4. Развитие волн в прямоугольном сосуде после его разгона, $\alpha = 5^\circ$. Начало $(0,0)$ системы координат расположено в геометрическом центре бака. Сплошная линия соответствует ускорению $w = 0.5 \text{ м/с}^2$, штриховая – ускорению $w = 0.05 \text{ м/с}^2$:
 а - $t = 0 \text{ с}$; б - $t = 2 \text{ с}$; в - $t = 4 \text{ с}$; д - $t = 6 \text{ с}$; е - $t = 8 \text{ с}$; ф - $t = 10 \text{ с}$

соотношение $\omega_3 \approx 2\omega_1$, что наводит на мысль о резонансном взаимодействии первой и третьей форм при свободных колебаниях жидкости, вызванных отклонением ее "зеркала" от плоскости горизонта. Здесь возникает ряд вопросов (в частности: какова будет скорость одиночной волны при других резонансных соотношениях, например, при $\omega_4 \approx 2\omega_1$; как влияет на процесс волнообразования угол α ; зависит ли скорость одиночной волны от ее амплитуды; и т. д.), которые, однако, требуют отдельного рассмотрения.

Эффект образования одиночной (точнее, уединенной) волны в прямоугольном сосуде (непроточном канале) наблюдался, правда, в нескольких условиях и в экспериментах [11]. В указанной работе отмечается (стр.267) существование на свободной поверхности стратифицированной жидкости уединенной волны, которая возникает и движется параллельно одиночной внутренней волне, генерируемой на границе раздела несмешивающихся жидкостей устройством типа поршня. Поведение этой волны *после отражения* от стенок не описано, более того, говорится, что для гашения "нежелательных возмущений свободной поверхности" использовалась наклонная пластина. Поэтому, строго говоря, полученные в настоящей работе расчетные данные требуют более полных экспериментальных подтверждений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения типа Гамильтона проанализированы в том частном случае, когда сосуд прямоугольный (открытый) и движется равномерно, а жидкость совершает свободные колебания (плоские, нелинейные, без обнажения дна сосуда). Волны на свободной поверхности вызываются ее начальным отклонением от положения равновесия на этапе разгона сосуда.

Построенные в работе уравнения, в отличие от известных, содержат в качестве искомым функций обобщенную координату β_0 и квазискорость R_0 , а также произвольную функцию $C(t)$ из интеграла Лагранжа – Коши, формула для которой выведена из физических соображений.

Как и следовало ожидать, в рассматриваемом случае матрица коэффициентов при производных является (2×2) -блочной матрицей с нулевыми блоками на диагонали и, что важно для вычислений, симметрической. В дополнение к этому показано, что существует область значений обобщенных координат, для которых матрица коэффициентов при производных является невырожденной во все моменты времени. Последнее обстоятельство

позволяет приводить уравнения типа Гамильтона к нормальной форме Коши, что открывает путь к применению стандартных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработан алгоритм численного интегрирования построенных уравнений типа Гамильтона на основе метода Рунге – Кутты. Компьютерная программа написана на языке фортран. Выполнено численное решение задачи о неустановившихся волнах в жидкости, развивающихся в первые моменты после разгона сосуда (наклоненного). В рассмотренном диапазоне параметров задачи предложенный алгоритм дает приемлемые результаты, несмотря на чрезвычайно большое количество операций, выполняемых при интегрировании функций и обращении матриц на каждом шаге метода Рунге – Кутты.

Полученные расчетные данные отчасти подтверждаются имеющимися экспериментальными данными, но требуют дополнительной экспериментальной проверки.

1. Miles J.W. Nonlinear surface waves in closed basins // J.Fluid Mech.– 1976.– 75, part 3.– P. 419–448.
2. Луковский И. А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: ЦНТИ "Волна", 1976. – С. 260–264.
3. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – К.: Наук.думка, 1990. – 295 с.
4. Луковский И. А. К вопросу о составлении конечномерных моделей в динамике ограниченного объема жидкости на основе вариационных принципов // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. – К.: Ин-т математики НАН України, 1990. – С. 5–15.
5. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // J.Fluid Mech.– 2000.– 407.– P. 201–234.
6. Моисеев Н.Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости // Прикладная математика и механика.– 1958.– 22.– С. 612–621.
7. Луковский И. А., Золотенко Г. Ф. Численное моделирование колебаний жидкости в закрытом подвижном прямоугольном сосуде // Гидромеханика.– 1998.– 72.– С. 72–87.
8. Моисеев Н.Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность // Математический сборник.– 1952.– 32, N 1.– С. 612–621.
9. Бабенко К. И. Основы численного анализа.– М.: Наука, 1986.– 744 с.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.– М.: Наука, 1977.– 407 с.
11. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.– Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1985.– 318 с.