УДК 519.21

О. І. Кійковська, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ЗБІЖНІСТЬ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З ДИФУЗІЙНИМ ЗБУРЕННЯМ

Встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації з дифузійним збуренням у випадку марковських переключень в схемі дифузійної апроксимації. Умови сформульовано в термінах властивостей функції Ляпунова усередненої системи за стаціонарним розподілом рівномірно ергодичного марковського процесу.

Ключові слова: *дифузійний процес, стохастична апроксимація, марковський процес, функція Ляпунова.*

Вступ. Процедура стохастичної апроксимації вперше була побудована в [1] для знаходження точки рівноваги функції регресії за дискретним рекурентним співвідношенням. Неперервний аналог процедури розглянуто в [2], а в [3] досліджено збіжність процедури

$$du(t) = a(t)\,[\,C(u(t))dt + \sigma(t,u(t))d\xi(t)\,],\ u(0) = u,$$

з похибкою вимірювання функції регресії $C(u), u \in R^d$, типу гаусівського білого шуму $\dot{\xi}(t) = d\xi(t)$, через властивості функції Ляпунова. В роботі [4] вперше розглянуто випадок безпосередньої залежності функції регресії від зовнішнього середовища, що описується марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації, та отримано достатні умови збіжності процедури методом малого параметру [5] з використанням модельної теореми Королюка [6].

Постановка задачі. Неперервна процедура стохастичної апроксимації в ергодичному марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації [6] визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^{\varepsilon}(t) =$$

$$= a(t)\left[C(u^{\varepsilon}(t); x(\frac{t}{\varepsilon^2}))dt + \varepsilon^{-1} C_0(u^{\varepsilon}(t); x(\frac{t}{\varepsilon^2}))dt + \sigma(u^{\varepsilon}(t); x(\frac{t}{\varepsilon^2}))dw(t)\right], \quad (1)$$

$$u^{\varepsilon}(0) = u_0,$$

де u — випадкова еволюція, x — марковський процес, w — вінерівський процес, ε – малий параметр серій.

У рівнянні (1) $x(t), t \ge 0,$ — рівномірно ергодичний марковський процес у фазовому вимірному просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$ [5]. Генератор марковського процесу визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)], \tag{2}$$

у банаховому просторі $\boldsymbol{B}(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x), x \in X,$ з нормою

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{x\in X}|\varphi(x)|,$$

де $P(x,B), x\in X, B\in \boldsymbol{X},$ — стохастичне ядро [5], $q(x)=g^{-1}(x),$ $g(x)=E\theta_x, \theta_x$ — час перебування марковського процесу в стані x, тобто $q(x)$ — «інтенсивність» часу перебування в стані x.

Стаціонарний розподіл $\pi(B), B\in\boldsymbol{X},$ марковського процесу $x(t), t\ge 0,$ визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де $\rho(B), B\in\boldsymbol{X},$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n = x(\tau_n), n\ge 0,$ і τ_n — моменти стрибків марковського процесу $x(t), t\ge 0.$

Для генератора $\boldsymbol{Q}$ марковського процесу $x(t), t\ge 0,$ потенціал $\boldsymbol{R}_0$ має представлення

$$\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x),$ — проектор на нуль-простір оператора $\boldsymbol{Q}$: $N_Q = \{\varphi\in\boldsymbol{B}(X) : \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}$ [6].

Функції

$$C(u;x) = \{C_k(u;x), k=1..d\}, C_0(u;x) = \{C_{0k}(u;x), k=1..d\},$$

$\sigma(u;x),$ задовольняють умовам існування глобального розв'язку еволюційного рівняння

$$du_x(t) = C(u_x(t);x)dt + \varepsilon^{-1}C_0(u_x(t);x)dt + \sigma(u_x(t);x)dw(t),$$

де $u_x(t)$ — еволюція при фіксованому значенні марковського процесу $x(t), t\ge 0.$

Усереднена функція регресії визначається співвідношенням:

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x).$$

Збіжність стохастичного процесу.

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$ усередненої системи

$$du(t) = C(u(t))dt, \tag{3}$$

що забезпечує умову експоненційної стійкості цієї системи:

C1 : $C(u)V'(u) \le -cV(u), c > 0;$

та задовольняє додатковим умовам:

C2 : $\left|B(u)V''(u)\right| \le c_1(1+V(u)), c_1 > 0;$

C3 : $\left|C_0(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[\tilde{C}(u;x)V'(u)\right]'\right| \le c_2(1+V(u)), c_2 > 0;$

C4 : $\left|C_0(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[\tilde{B}(u;x)V''(u)\right]'\right| \le c_3(1+V(u)), c_3 > 0;$

C5 : $\left|C(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[C(u;x)V'(u)\right]'\right| \le c_4(1+V(u)), c_4 > 0;$

C6 : $\left|\sigma^2(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[C(u;x)V'(u)\right]''\right| \le c_5(1+V(u)), c_5 > 0;$

C7 : $\left|C(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[\tilde{C}(u;x)V'(u)\right]''\right| \le c_6(1+V(u)), c_6 > 0;$

C8 : $\left|\sigma^2(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[\tilde{C}(u;x)V'(u)\right]''\right| \le c_7(1+V(u)), c_7 > 0;$

C9 : $\left|C(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[\tilde{B}(u;x)V''(u)\right]'\right| \le c_8(1+V(u)), c_8 > 0;$

C10 : $\left|\sigma^2(u;x)\boldsymbol{R}_0\left[\tilde{B}(u;x)V''(u)\right]''\right| \le c_9(1+V(u)), c_9 > 0,$

де

$$\tilde{C}(u;x) = C(u;x) - C(u), \quad \tilde{B}(u;x) = B(u;x) - B(u),$$

$$B(u;x) = 2C_0(u;x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u;x) + \sigma^2(u;x),$$

$$B(u) = 2\int_X \pi(dx)C_0(u;x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u;x) + \int_X \pi(dx)\sigma^2(u;x).$$

Крім того, функції $C(u;x), C_0(u;x), \sigma(u;x) \in C^2(R^d)$ рівномірно обмежені по $x \in X$, а $C_0(u;x)$ задовольняє умові балансу

$$\Pi C_0(u;x) = \int_X \pi(dx)C_0(u;x) = 0. \tag{4}$$

Нормуюча функція $a(t) > 0$ задовольняє умовам:

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt = 0.$$

Тоді для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u_0 \in R^d$, розв'язок рівняння (1) при будь-якому малому $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^*, що однозначно визначається рівнянням $C(u^*) = 0$:

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = u*\right\} = 1\,.$$

Зауваження 1. Добутки $\tilde{B}(u;x)V''(u)$ мають представлення [6, с. 10]

$$\tilde{B}(u;x)V''(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}_{ij}(u;x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}V(u).$$

Зауваження 2. У випадку, коли функції $C_0(u;x), C(u;x)$ — лінійні, а $V(u)$ — квадратична, виконуються умови C2—C10 теореми.

Властивості генератора.

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), t \ge 0, \tag{5}$$

у банаховому просторі $\boldsymbol{B}(R^d, X)$ дійснозначних функцій $\varphi(u;x) \in$ $\in C^{2,0}(R^d, X)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x) + \boldsymbol{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x), \tag{6}$$

де

$$V_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = \varepsilon^{-1}Q_1(x)\varphi(u;x) + Q_2(x)\varphi(u;x), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u;x) = a(t)C_0(u;x)\varphi'(u;x),$$

$$\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi(u;x) = a(t)C(u;x)\varphi'(u;x) + \frac{1}{2}a^2(t)\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x).$$

Доведення. Генератор марковського процесу (5) на тест-функціях $\varphi(u;x)$, визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta); x_{t+\Delta}^\varepsilon)\big| u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] - \varphi(u;x)]. \tag{8}$$

Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta); x_{t+\Delta}^\varepsilon)\big| u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] = E_{u,x}\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta); x_{t+\Delta}^\varepsilon) =$$

$$= E_{u,x}\varphi(u + \Delta u; x_{t+\Delta}^\varepsilon).$$

Для цього приведемо інтегральне представлення рівняння (1)

$$u^{\varepsilon}(t)=u^{\varepsilon}(0)+\int_0^t a(s)C(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds+\varepsilon^{-1}\int_0^t a(s)C_0(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds+$$

$$+\int_0^t a(s)\sigma(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})dw(s).$$

Нехай $\mu_{\Delta}:=\int_t^{t+\Delta} a(s)\sigma(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})dw(s)$, тоді приріст Δu можна представити у вигляді

$$\Delta u=\int_t^{t+\Delta} a(s)C(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} a(s)C_0(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds+\mu_{\Delta}.$$

Одержимо наступний вигляд умовного математичного сподівання [6]

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]I(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta)+$$

$$+E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]I(\theta_x\le\varepsilon^{-2}\Delta)+o(\Delta).$$

Оскільки індикатор часу перебування в стані x має представлення

$$I(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta)=e^{-\varepsilon^2 q(x)\Delta}=1-\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta),$$

$$I(\theta_x\le\varepsilon^{-2}\Delta)=1-e^{-\varepsilon^2 q(x)\Delta}=\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta),$$

то для умовного математичного сподівання маємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]+$$
$$+\varepsilon^{-2}q(x)\{E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]-E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]\}\Delta+o(\Delta). \tag{9}$$

Для другого доданку (9), використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]\Delta=\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]\Delta+$$
$$+\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\Delta u]\Delta+o(\Delta). \tag{10}$$

Обчислимо другий доданок у (10), враховуючи вигляд

$$\Delta u=a(t)C(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+\mu_{\Delta}+o(\Delta):$$

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\Delta u]\Delta=\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\{a(t)C(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+$$

$$+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+\mu_{\Delta}+o(\Delta)\}]\Delta=o(\Delta).$$

Отже,

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]\Delta=\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]\Delta+o(\Delta).$$

Врахувавши формулу Тейлора, формулу генератора марковського процесу (2), та рівняння (9) отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]+\varepsilon^{-2}q(x)\{E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]-$$
$$-E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]\}\Delta+o(\Delta)=E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]+$$
$$+\varepsilon^{-2}q(x)\{E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]-E_{u,x}[\varphi(u;x)+\varphi'(u;x)\Delta u+o(\Delta u)]\}\Delta+o(\Delta).$$

Оскільки $\varepsilon^{-2}q(x)\{-E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u+o(\Delta u)]\}\Delta=o(\Delta)$, то з останнього маємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)\Delta+E_{u,x}[\varphi(u+a(t)C(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+$$
$$+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+\mu_{\Delta}+o(\Delta);x)]+o(\Delta).$$

Додавши та віднявши у математичному сподіванні вираз $\varphi(z;x)$, де $z=u+a(t)C(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\Delta$ отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=$$
$$=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)\Delta+E_{u,x}[\varphi(z+\mu_{\Delta}+o(\Delta);x)-\varphi(z;x)+\varphi(z;x)]+o(\Delta).$$

Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)\Delta+E_{u,x}\varphi'(z;x)E\mu_{\Delta}+$$
$$+\frac{1}{2}E_{u,x}\varphi''(z;x)E\mu_{\Delta}^2+E_{u,x}\varphi(z;x)+o(\mu_{\Delta}^2)+o(\Delta).$$

Оскільки $E\mu_{\Delta}=0, E\mu_{\Delta}^2=\int\limits_t^{t+\Delta}\sigma^2(u(s);x(s))ds=\sigma^2(u(t);x(t))\Delta$, [7, розділ 1, с. 42], отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^{\varepsilon})=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)\Delta+\frac{1}{2}E_{u,x}\varphi''(z;x)a^2(t)\sigma^2(u(t);x)\Delta+$$
$$+E_{u,x}\varphi(z;x)+o(\Delta).$$

Отже, з (8) маємо

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}\{E_{u,x}[\varphi(z;x)-\varphi(u;x)]+\frac{1}{2}a^2(t)E_{u,x}\varphi''(z;x)\sigma^2(u(t);x)\Delta+$$
$$+\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)\Delta+o(\Delta)\}=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}\{E_{u,x}[a(t)C(u^{\varepsilon}(t);x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\varphi'(u;x)\Delta+$$
$$+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon})\varphi'(u;x)\Delta+o(\Delta)]+$$
$$+\frac{1}{2}a^2(t)E\sigma^2(u(t);x)\varphi''(z;x)\Delta+\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)\Delta\}.$$

Враховуючи формулу Тейлора та те, що $z\to u$, при $\Delta\to0$, отримаємо генератор (6).

Лема 1 доведена.

Лема 2. Граничний генератор $\boldsymbol{L}_t$ на збуреній тест-функції $\varphi^{\varepsilon}(u;x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u;x) + \varepsilon^2\varphi_2(u;x), \varphi(u) \in C^4(R^d)$, визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення [6]

$$L_t^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = L_t\varphi(u) + \varepsilon\theta_t^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u), \qquad (11)$$

де

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(u) = a(t)\boldsymbol{C}\varphi(u) + \frac{1}{2}a^2(t)\boldsymbol{B}(u)\varphi(u),$$

$$\boldsymbol{C}\varphi(u) = C(u)\varphi'(u),$$

$$\boldsymbol{B}(u)\varphi(u) = B(u)\varphi''(u),$$

$$B(u) = 2\int_X \pi(dx)C_0(u;x)\boldsymbol{R}_0 C_0(u;x) + \int_X \pi(dx)\sigma^2(u;x),$$

$$\begin{gathered}\theta_t^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u) = \boldsymbol{Q}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)\varphi(u) + \\ +\boldsymbol{Q}_2(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u) + \varepsilon\boldsymbol{Q}_2(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)\varphi(u),\end{gathered} \qquad (12)$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)\varphi(u) = [\boldsymbol{L}_t(x) - \boldsymbol{L}_t]\varphi(u),$$

$$\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(u) = \boldsymbol{Q}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u) + \boldsymbol{Q}_2(x)\varphi(u).$$

Доведення. Генератор $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(u;x)$, визначається наступним чином

$$\begin{gathered}\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u) + \varepsilon^{-1}[\boldsymbol{Q}\varphi_1(u;x) + \boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u)] + \boldsymbol{Q}\varphi_2(u;x) + \\ +\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi_1(u;x) + \boldsymbol{Q}_2(x)\varphi(u) + \varepsilon[\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi_2(u;x) + \boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_1(u;x) + \varepsilon\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_2(u;x)].\end{gathered}$$

З того, що $\varphi(u) \in N_Q$ слідує рівність $\boldsymbol{Q}\varphi(u) = 0$. З умови розв'язності проблеми сингулярного збурення $\boldsymbol{Q}\varphi_1(u;x) + \boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u) = 0$ та умови балансу (4) отримуємо представлення

$$\varphi_1(u;x) = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u).$$

Згідно з розв'язком проблеми сингулярного збурення [6, с. 141] маємо

$$\boldsymbol{Q}\varphi_2(u;x) + \boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = \boldsymbol{L}_t\varphi(u),$$

де граничний генеретор $\boldsymbol{L}_t\varphi(u)$ обчислюється за співвідношенням [5, с. 143]

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(u) = \int_X \pi(dx)\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(u).$$

Отже, в позначеннях Леми 2 маємо

$$\varphi_2(u;x) = \boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)\varphi(u).$$

Беручи до уваги вигляд збурень φ_1 та φ_2, одержуємо вигляд граничного генератора та залишкового члена в (11).

Лема 2 доведена.

Наслідок 1. Якщо функція Ляпунова $V(u)$ системи (3) задовольняє умови Леми 2, то для збуреної функції Ляпунова $V^{\varepsilon}(u;x) = = V(u)+\varepsilon V_1(u;x)+\varepsilon^2 V_2(u;x), V(u)\in C^4(R^d)$, має місце представлення

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u;x) = \boldsymbol{L}_t V(u) + \varepsilon\theta_t^{\varepsilon}(u;x)V(u),$$

в позначеннях Леми 2.

Доведення теореми. Перш за все вкажемо на існування граничного процесу $u(t)$ для випадкової еволюції $u^{\varepsilon}(t)$, що слідує з модельної теореми Королюка [6, теорема 6.3, с. 197], та властивостей мартингала

$$\mu_t^{\varepsilon} = V^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t);x_t^{\varepsilon}) - \int_0^t \boldsymbol{L}_s^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(s);x_s^{\varepsilon})ds.$$

При цьому граничний процес $u(t)$ задається генератором $\boldsymbol{L}_t$, тобто $u(t)$ визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du(t) = a(t)[C(u(t))dt + \sigma(u(t))dw(t)],$$

По-друге зауважимо, що з вигляду генератора $\boldsymbol{L}_t V(u)$ та умов $C1$ та $C2$ теореми маємо оцінку

$$\boldsymbol{L}_t V(u) \le -a(t)cV(u) + \frac{1}{2}a^2(t)c_1(1+V(u)). \tag{13}$$

Для встановлення оцінки залишкового члена $\theta_t^{\varepsilon}(u;x)V(u)$ обчислимо праву частину (12) на функціях Ляпунова $V(u)$.

Для оцінки першого доданку $\boldsymbol{Q}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u)$ розглянемо представлення:

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u) = a(t)\tilde{C}(u;x)V'(u) + \frac{1}{2}a^2(t)\tilde{B}(u;x)V''(u).$$

З умов теореми С3 і С4 маємо

$$|\boldsymbol{Q}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u)| \le (c_2+c_3)(1+V(u)). \tag{14}$$

Для другого доданку з умов *C5* та *C6* теореми отримуємо:

$$|\boldsymbol{Q}_2(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)V(u)| \le (c_4+c_5)(1+V(u)). \tag{15}$$

А для останнього доданку залишкового члена за умов *C7—C10* теореми маємо:

$$|\boldsymbol{Q}_2(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u)| \le (c_6+c_7+c_8+c_9)(1+V(u)). \tag{16}$$

Використовуючи (13)—(16) маємо

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u;x) \le -ca(t)V(u) + c^*(1+V(u)).$$

Тепер скористаємось теоремою Невельсона—Хасьмінського [3, теорема 8.1, с. 100], що і доводить твердження теореми.

Висновки. Встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації з дифузійним збуренням до точки рівноваги функції регресії в терміні властивості функції Ляпунова. Отримані результати дозволяють дослідити збіжність процедури стохастичної оптимізації та її модифікацій [8] з врахуванням марковських впливів на функцію регресії.

Список використаних джерел:

1. Robbins H. A stochastic approximation method / H. Robbins, S. Monro // Ann. Math. Statist. — 1951. — Vol. 22, № 1. — P. 400–407.
2. Driml M. Stochastic approximation for continuous random processes / M. Driml , J. Nedoma // Trans. of the second Prague conference on information theory. — 1960. — P. 145–148.
3. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
4. Чабанюк Я. М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса / Я. М. Чабанюк // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — №3. — С. 133–139.
5. Королюк В. С. Стохастичні моделі систем / В. С. Королюк. — К. : Либідь. — 1993. — 136 с.
6. Korolyuk V. S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. S. Korolyuk, N. Limnios. — World Scientific, Singapore, 2005. — 330 p.
7. Вентцель Е. С. Флуктуации в динамических системах под влиянием случайных возмущений / Е. С. Вентцель, М. И. Фрейдлин. — М. : Наука, 1979. — 424 с.
8. Ljung L. Stochastic approximation and optimization of random systems / L. Ljung, G. Pflug, H. Walk. — Basel, 1992. — 115 p.

It was obtained sufficient conditions of convergence of stochastic approximation procedure with diffusion perturbation in the case of Markov switching in scheme of series. Conditions are formulated in terms of Lyapunov functions for the averaged system by stationary distribution of uniformly ergodic Markov process.

Key words: *diffusion process, stochastic approximation, Markov process, Lyapunov function.*

Отримано: 11.04.2012