

УДК 519.63:532.5

А. Я. Бомба*, д-р техн. наук, професор,

А. П. Сафоник** , канд. техн. наук

*Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МАСООБМІННОГО КОЕФІЦІЄНТА В ЗАДАЧІ ТИПУ КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН

Побудовано математичну модель, що описує закономірності фільтрування й нагромадження домішок у пористій засипці з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії, масообміну) і включає можливість визначення невідомого масообмінного коефіцієнта. Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної збуреної задачі, що, зокрема, забезпечує можливість визначення часу захисної дії фільтра. Наведено результати розрахунків розподілу питомої концентрації й масового об'єму домішок (по довжині фільтруючої пористої засипки) для різних моментів часу.

Ключові слова: *нелінійна задача, фільтрування, обернена задача, сингулярні збурення, асимптотика, ідентифікація невідомого параметра.*

У роботі [10] запропонована математична модель процесу очищення стічної води сорбційним фільтром, що враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу, визначалися експериментальним шляхом. У цій статті, опираючись на праці А. М. Тиринова, А. І. Прилепка, М. І. Іванчова, А. Б. Костина й ін., присвячені питанням коректності розв'язування обернених задач ідентифікації невідомих коефіцієнтів, побудований алгоритм розв'язування відповідної нелінійної оберненої задачі типу конвекція-дифузія-масообмін, з визначенням невідомого коефіцієнта, що характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки домішкових частинок.

Відомі аналітичні рівняння, які описують процес фільтрування [1—10] і процес очищення стічних вод [10; 14], не дозволяють у широкому діапазоні зміни параметрів описувати процес очищення, крім того, не враховують зворотний вплив характеристик процесу на характеристики середовища. Так само недостатньо уваги приділено вивченню масообмінних коефіцієнтів, а експериментальні залежності [13; 14] не дають повної картини. Тому актуальним завданням є побудова нелінійної математичної моделі процесу очищення стічної води сорбцій-

ним фільтром, що включає визначення масообмінного коефіцієнта. Розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних, більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу фільтрування різних технологічних водно-дисперсних систем.

1. Постановка задачі. Розглянемо просторово-одновимірний (з метою спрощення викладів) процес очищення рідини шляхом фільтрування у фільтрі-шарі товщиною L тотожним відрізка $[0, L]$ осі Ox . Припускаємо [10], що частки забруднення домішки можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції) і, при цьому, має місце зворотній вплив відповідних концентрацій на характеристики розглянутого шару. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну й т.п. за аналогією з [9; 10]) опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \varepsilon\alpha(t)\rho(x,t) + D_\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$c|_{x=0} = c_*^*(t), \quad c|_{x=L} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

$$\alpha(t) \int_0^L \rho(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t), \quad (3)$$

де $c(x, t)$ — концентрація домішок у рідкому середовищі в точці x у момент часу t , $\rho(x, t)$ — концентрація домішок, захоплених фільтром, β — коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішок за одиницю часу, $\alpha(t)$ — шуканий коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки частинок, $\mu(t)$ — функція, що характеризує масовий розподіл осаду з часом (знаходиться експериментальним способом [14]), умова перевизначення (3) — призначено для знаходження $\alpha(t)$ ([11; 12]), $c^*(t)$, $c_*^*(t)$, $\rho^*(t)$, $\rho_*^*(t)$ — концентрації домішок та осаджених частинок на вході фільтра та в початковий момент часу відповідно, $\sigma(\rho)$ — пористість фільтруючої засипки (σ_0 — вихідна пористість засипки $\sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x, t)$), $v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } p$ —

швидкість фільтрування, $\kappa(\rho)$ — коефіцієнт фільтрування $\kappa(\rho) = \kappa_0 - \varepsilon\gamma\rho(x, t)$ (див. [10]), σ_* , κ_0 , γ , ε — тверді параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\sigma(\rho)$, $\kappa(\rho)$ — м'які параметри, знаходяться експериментальним способом), D_c , D_ρ — коефіцієнт дифузії, де $D_c = b_c\varepsilon$, $D_\rho = b_\rho\varepsilon$, $0 < b_c \leq 1$, $0 < b_\rho \leq 1$, ε — малий параметр, характеризує відповідні збурення, p — тиск. При цьому зазначимо, що в більшє загальному випадку тиск $p = p(x, t)$ варто було б визначати в результаті розв'язання рівняння $\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(\rho) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma(\rho)p}{\partial t}$ (яке виходить на підставі записаного вище рівняння руху і рівняння стану: $\text{div } v = \frac{\partial \sigma(\rho)p}{\partial t}$) при крайових $p(0, t) = p_*(t)$, $p(L, t) = p^*(t)$ ($0 < t < \infty$) і початкових $p(x, 0) = p_*(x)$ ($0 < x < L$) умовах ($p_*(t)$, $p^*(t)$, $p_*(x)$ — задані досить гладкі й погоджені в кутових точках області $G = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < \infty\}$ функції). З метою спрощення викладів у цій роботі розглядаємо випадок, коли $v = \text{const}$. При цьому, у процесі розв'язання задачі, можемо визначати відповідне значення $\text{grad } p$, зокрема — різниця напорів $p^*(t) - p_*(t)$ на вході й виході з фільтра.

2. Асимптотика розв'язку. Розв'язок системи (1) за умов (2) і (3) знаходимо у вигляді асимптотичних рядів (див., напр., [9; 10]):

$$\begin{aligned}
 c(x, t) &= c_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i U_i(\xi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{U}_i(\xi, t) + R_c(x, t, \varepsilon), \\
 \rho(x, t) &= \rho_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} P_i(\mu, t) + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{P}_i(\mu, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon), \\
 \alpha(t) &= \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \alpha_i(t) + R_\alpha(t, \varepsilon),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

де R_c, R_ρ, R_α — залишкові члени, $c_i(x, t)$, $\rho_i(x, t)$, $\alpha_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) — шукані члени асимптоти, $U_i(\xi, t)$, $P_i(\mu, t)$, $\tilde{U}_i(\xi, t)$, $\tilde{P}_i(\mu, t)$

($i = \overline{0, n+1}$) — функції типу пограншару, (відповідно поправки на вході та на виході фільтраційного потоку), $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ — відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно [10], у результаті підстановки (4) в (1)—(3) і здійснення стандартної «процедури прирівнювання», для визначення функцій c_i , ρ_i , α_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_0}{\partial t} + v \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0, \\ c_0|_{x=0} = c_0^*(t), \quad c_0|_{t=0} = 0, \quad \rho_0|_{x=0} = 0, \quad \rho_0|_{t=0} = 0, \\ \alpha_0(t) \int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}}{\partial t} c_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = b_c \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial x^2}, & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - g_i + b_p \frac{\partial^2 \rho_{i-1}}{\partial x^2}, \\ c_i|_{x=0} = 0, \quad c_i|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{x=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \alpha_0(t) \int_0^L \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \alpha_1(t) \int_0^L \rho_{i-1}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \dots + \alpha_i(t) \int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = 0. \end{cases}$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(x, t) = \begin{cases} c_0^* \left(t - \frac{\sigma_0 x}{v} \right) \cdot e^{-\frac{\beta x}{v}}, & t \geq \frac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases}$$

$$\rho_0(x, t) = \beta \int_0^t c_0(x, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \alpha_0(t) = \frac{\mu(t)}{\int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

$$c_i(x, t) = \begin{cases} e^{-\lambda_i(x, t)} \cdot \int_0^x \frac{g_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) \cdot e^{\lambda_i(\tilde{x}, t)}}{v(\tilde{x}, t)} d\tilde{x}, & t \geq f_i(x), \\ 0, & t < f_i(x), \end{cases}$$

$$\rho_i(x, t) = \int_0^t (q_i(x, \tilde{t}) - g_i(x, \tilde{t})) d\tilde{t}, \quad \alpha_i(t) = - \frac{\sum_{k=1}^i \alpha_{i-k}(t) \int_0^L \rho_k(\tilde{x}, t) d\tilde{x}}{\int_0^L \rho_0(\tilde{x}, t) d\tilde{x}},$$

де

$$g_i(x, t) = \sum_{j=1}^i \rho_{j-1} \left(\alpha_0 + I(i, j) \sum_{j=2}^i (\alpha_* \rho_{i-2}) \right) + b_* \frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial x^2},$$

$$q_i(x, t) = \sum_{j=1}^i c_j \left(I(i, j) \sum_{j=1}^i (\beta_* \rho_{i-1}) \right),$$

$$\lambda_i(x, t) = \frac{1}{v} \int_0^x \psi_i(\tilde{x}, f_i(\tilde{x}) + x - f_i(x)) d\tilde{x},$$

$$\psi_i(x, t) = v_x + \sigma_* \frac{\partial \rho_{i-1}(x, t)}{\partial t} + \beta_*, \quad I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$$

Наближені значення функцій $f_i(x)$ знаходяться шляхом інтерполювання масиву (x_j, t_j) , $j = \overline{1, n}$, де $x_j = \Delta x \cdot j$, $t_1 = t_0 + \frac{\Delta x}{v(x_0, t_0)} \sigma_0$,

$$t_{j+1} = t_j + \frac{\Delta x}{v(x_j, t_j)} \sigma_* \rho_{i-1}(x_j, t_j).$$

$$\text{Функції } \underline{U} = \sum_{i=0}^{n+1} \underline{U}_i \varepsilon^i, \quad \tilde{U} = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{U}_i \varepsilon^i, \quad \underline{P} = \sum_{i=0}^{n+1} \underline{P}_i \varepsilon^{i/2}, \quad \tilde{P} = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{P}_i \varepsilon^{i/2}$$

призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c(x, t) = \sum_{i=0}^m c_i \varepsilon^i$, $\rho(x, t) = \sum_{i=0}^m \rho_i \varepsilon^i$ в околах точок $x = 0$, $x = L$ (входу та виходу фільтраційної течії), тобто забезпечують виконання умов:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c + \underline{U}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(c + \tilde{U}) = O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho + \underline{P}) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \tilde{P}) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Дані функції знаходяться аналогічно до [10]. Оцінка залишкових членів приводить до задачі, аналогічно до [10].

3. Результати числових розрахунків. Наведемо результати розрахунків за формулами (4) при $c_*^*(t) = 170$ мг/л, $L = 0.8$ м, $\beta_0 = 0.3$ м²/с, $v = 10$ м/год, $\sigma_0 = 0.5$, $\alpha_* = 1$, $\beta_* = 1$, $\sigma_* = 1$.

У результаті інтерполяції експериментальних даних [14] нами отримано масовий розподіл $\mu(t)$ осаду з часом (див. рис. 1а). Тимчасову залежність відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ зображено на рисунку 1б. Зростання масообмінного коефіцієнта з ча-

сом пояснюється тим, що (для даного випадку при отриманому експериментально значенні $\mu(t)$) у процесі осадження часток гранули пористої засипки максимально насичуються домішковими частинками й під дією гідравлічного напору ймовірність відриву частинок від гранул зростає до часу τ_3 ефективної роботи фільтра.

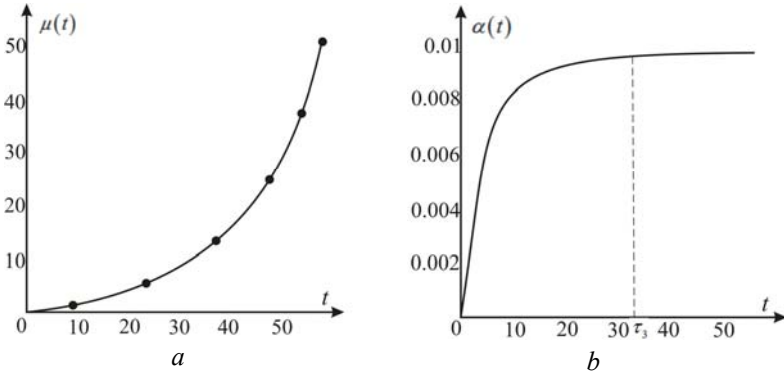


Рис 1. Масовий розподіл осаду $\mu(t)$ — (a) і відповідного масообмінного коефіцієнта $\alpha(t)$ — (b) з часом

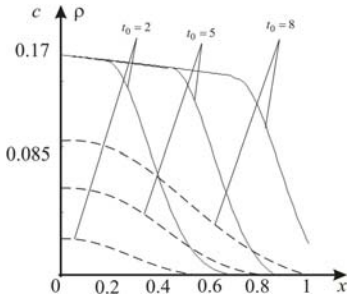


Рис. 2. Розподіл $c(x,t)$ — (a) і $\rho(x,t)$ — (b) в різні моменти часу t_0

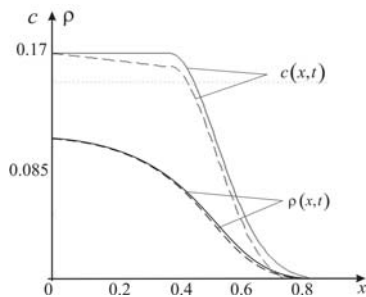


Рис. 3. Розподіл $c(x,t)$ і $\rho(x,t)$ при $t = 2$ год і різних ε ($\varepsilon = 0.01$ — суцільна лінія, $\varepsilon = 0.05$ — пунктирна лінія)

Вплив коефіцієнта дифузії на концентрації домішок у рідині та осаді проілюстровано на рисунку 2. На рисунку 3 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду у певні моменти часу.

Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 0.8$) допустиме значення концентрації $c = c_{кр} = 0.0015$ г/л, знаходимо час його захисної дії: $t = t_3 = 32$ год, що на 4% відрізняється від даних, отриманих дослідним способом [14].

Висновки. Побудовано математичну модель, що описує закономірності фільтрування й нагромадження домішок у пористій засипці з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії, масообміну) і включає можливість визначення невідомого масообмінного коефіцієнта. Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної збуреної задачі, що, зокрема, забезпечує можливість визначення часу захисної дії фільтра. Наведено результати розрахунків розподілу питомої концентрації й масового об'єму домішок (по довжині фільтруючої пористої засипки) для різних моментів часу.

Список використаних джерел:

1. Elimelech M. Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media, *Water Research* / M. Elimelech. — 1992. — № 26 (1). — P. 1–8.
2. Elimelech M. Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations. *Separations Technology* / M. Elimelech. — 1994. — № 4. — P. 186–212.
3. Jegatheesan V. Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration, *Ph Dissertation, University of Technology Sydney* / V. Jegatheesan. — 1999. — 300 p.
4. Johnson P. R. Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption, *Langmuir* / P. R. Johnson, M. Elimelech. — 1995. — № 11(3). — P. 801–812.
5. Ison C. R. Removal mechanisms in deep bed filtration, *Chem. Engng. Sci.* / C. R. Ison, K. J. Ives. — 1969. — № 24. — P. 717–729.
6. Ives K. J. Theory of filtration, special subject No.7, *Int. Water Supply congress* / K. J. Ives. — Vienna, 1969.
7. Ives K. J. Rapid filtration, *Water Research* / K. J. Ives. — 1970. — № 4(3). — P. 201–223.
8. Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions / A. R. Petosa D. P. Jaisi, I. R. Quevedo, M. Elimelech, N. Tufenkji // *Environmental Science & Technology*. — 2010. — Vol. 44. — P. 6532–6549.
9. Бомба А. Я. Нелинейные сингулярно-возмущенные задачи типа «конвекция — диффузия»: монография / А. Я. Бомба, С. В. Барановский, И. М. Присяжнюк. — Ровно : НУВГП, 2008. — 252 с.
10. Нелинейные задачи типа фильтрация-конвекция-диффузия-массообмен при условиях неполных данных : монография / А. Я. Бомба, В. И. Гаврилюк, А. П. Сафоник, Е. А. Фурсачик. — Рівне : НУВГП, 2011. — 276 с.
11. Иванчов Н. И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / И. Н. Иванчов // *Сиб. мат. журнал*. — 1998. — Т. 39, № 3. — С. 539–550.
12. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. — Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. — 458 с.
13. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. — М. : Стройиздат, 1964. — 156 с.

14. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. — Рівне : НУВГП, 2005. — 163 с.

The mathematical model which describes laws of filtering and accumulation of impurity in porous attachment taking into account return influence of characteristics of process (concentration of a deposit) on characteristics of environment (diffusion factors, mass exchange) is constructed and includes possibility of definition unknown mass exchange factor. The algorithm of the decision of the corresponding indignant problem which, in particular, provides possibility of definition of time of protective action of the filter is offered. Results of calculations of distribution of specific concentration and mass volume of impurity (on length filtering porous attachment) for the different moments of time are resulted.

Key words: *a nonlinear problem, filtering, a return problem, singular indignations, asymptotic, identification of unknown parameter.*

Отримано: 19.04.2012

УДК 517.956.4

О. Б. Васько, асистент

Буковинський державний фінансово-економічний
університет, м. Чернівці

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПРОСТІШОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОВОРА

Для вироджених модельних параболічних систем рівнянь типу Колмогорова встановлено коректну розв'язність задачі Коші у просторах початкових даних, елементами яких є узагальнені функції типу розподілів Л. Шварца.

Ключові слова: *вироджені параболічні системи, задача Коші, коректна розв'язність, основні та узагальнені функції.*

Вступ. При математичному моделюванні броунівського руху фізичної системи А. М. Колмогоров прийшов до рівняння, яке у простішому випадку має вигляд [1]

$$\left(\partial_t - x_1 \partial_{x_2}\right) u(t; x) = a^2 \partial_{x_1}^2 u(t; x), \quad x = (x_1; x_2), \quad (t; x) \in (0; T] \times \mathbb{R}^2.$$

Це рівняння є виродженим стосовно змінної x_2 з параболічною за Петровським диференціальною частиною $\partial_t - a^2 \partial_{x_1}^2$. Воно має важливе значення при дослідженні теплових і дифузійних процесів з інерцією в однорідних середовищах. Відтак, наведене вище рівняння багаторазово узагальнювалось і досліджувалось різними авторами