Список використаних джерел:

1. Луцев Е. М. Об одном варианте проекционно-итеративного метода / Е. М. Луцев // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1983. — С. 54–63.
2. Луцев Е. М. Коллокационно-итератвный метод решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода / Е. М. Луцев // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. — К. : Наук. думка, 1989. — С. 132–138.
3. Лучка А. Ю. Прекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1993. — 288 с.

The questions of the convergence non stationary collocation-iterative method of Fredholm integral equations solutions are considered in this article. The conditions of the method convergence are found here

Key words: *integral equations, collocation- iterative method, convergence method.*

Отримано: 12.03.2012

УДК 517.5

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\overline{\psi}$ -ІНТЕГРАЛІВ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Одержано асимптотичні рівності для величини, яка характеризує сумісне наближення класів $\overline{\psi}$ -інтегралів сумами Фейєра в рівномірній метриці.

Ключові слова: *сумісне наближення, суми Фейєра, класи $\overline{\psi}$ -інтегралів*

Вступ. Відомо, що метод підсумовування тригонометричних рядів за допомогою середніх арифметичних частинних сум ряду є насиченим, причому класом насичення є клас W_1^1. У цій роботі розглядається сумісне наближення сумами Фейєра класів $\overline{\psi}$ -інтегралів, які включаються в клас насичення, в рівномірній метриці.

Постановка задачі. Нехай $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$ — довільні послідовності дійсних чисел, причому тригонометричний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\big(\psi_1(k)\cos kx+$ $+\psi_2(k)\sin kx\big)$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi(x)$. Через $L^{\overline{\psi}}$ позначимо множину функцій $f(x)$, що є згортками елементів одиничної кулі простору 2π-періодичних сумовних та суттєво обмежених функцій $\varphi(x)$ із ядром $\Psi(x)$, тобто

$$L^{\overline{\psi}}=\left\{f\,\middle|\,f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\Psi(t)\,dt,\ \varphi\perp 1,\ \|\varphi\|_{\infty}\le 1\right\},$$

а $C_{\infty}^{\overline{\psi}}=L^{\overline{\psi}}\cap C_{[-\pi;\pi]}$, при цьому $\varphi(x)$ згідно О. І. Степанцю ([1]) називають $\overline{\psi}$-похідною $f(x)$ ($f^{\overline{\psi}}(x)=\varphi(x)$), а $f(x)$ — $\overline{\psi}$-інтегралом $\varphi(x)$.

Нехай пари $\overline{\varphi}=\big(\varphi_1(k);\varphi_2(k)\big)$, $\overline{\psi}=\big(\psi_1(k);\psi_2(k)\big)$ — пари довільних числових послідовностей. Будемо говорити, що пара $\overline{\varphi}$ L-передує парі $\overline{\psi}$, якщо $L^{\overline{\psi}}\subset L^{\overline{\varphi}}$. Як показано в [2], при $\overline{\varphi}(k)=\sqrt{\varphi_1^2(k)+\varphi_2^2(k)}\neq 0$, $k\in N$, із L-передування пар $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ випливає, що для довільної функції $f(x)\in L^{\overline{\psi}}$ існує $\overline{\varphi}$-похідна, причому $f^{\overline{\varphi}}(x)\in L^{\overline{\eta}}$, $\overline{\eta}=\big(\eta_1(k);\eta_2(k)\big)$, де

$$\eta_1(k)=\frac{\varphi_1(k)\cdot\psi_1(k)+\varphi_2(k)\cdot\psi_2(k)}{\overline{\varphi}^2(k)},$$
$$\eta_2(k)=\frac{\varphi_1(k)\cdot\psi_2(k)-\varphi_2(k)\cdot\psi_1(k)}{\overline{\varphi}^2(k)}, \tag{1}$$

а також $S\left[\left(f^{\overline{\varphi}}\right)^{\overline{\eta}}\right]=S\left[f^{\overline{\psi}}\right]$.

За величину, що характеризує сумісне наближення класів $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Фейєра, виберемо вираз

$$\mathscr{E}_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}};\mathfrak{S}_n\right)=\sup_{f\in C_{\infty}^{\overline{\psi}}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\left|f^{\overline{\varphi}_i(x)}-\mathfrak{S}_n\left(f^{\overline{\varphi}_i};x\right)\right|\right\|_C \tag{2}$$

при умові, що існують неперервні похідні $f^{\overline{\varphi_i}}\left(x\right)$, а також класи $C_{\infty}^{\overline{\eta_i}}$, де послідовності $\left(\eta_i'\left(k\right);\eta_i''\left(k\right)\right)=\overline{\eta_i}$ вибрані згідно (1), включаються в клас насичення W_1^1, і знайдемо для величини $\mathscr{E}_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}};\mathfrak{S}_n\right)$ асимптотичну поведінку при $n\to\infty$.

Допоміжні твердження.

Теорема 1. Нехай функція $\Psi\left(t\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1\left(k\right)\cos kt+\psi_2\left(k\right)\sin kt\right)$ — сумовна, а послідовності $k^{s_1}\psi_1\left(k\right)$, $k^{s_2}\psi_2\left(k\right)$, де $s_1>1$, $s_2>1$, — опуклі донизу і монотонно спадні до нуля, тоді для будь-якої функції $f\left(x\right)\in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ справедлива асимптотична рівність

$$f\left(x\right)-\mathfrak{S}_n\left(f;x\right)=\frac{1}{n}\tilde{f}'\left(x\right)+O\left(1\right)\overline{\psi}\left(n\right),\ n\to\infty, \tag{3}$$

де $\tilde{f}'\left(x\right)$ — похідна першого порядку функції, спряженої до $f\left(x\right)$, $O\left(1\right)$ — величина, рівномірно обмежена по n, x, f.

Доведення. Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1\left(k\right)\cos kx+\psi_2\left(k\right)\sin kx\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\left(\Psi;x\right)$, тоді для $f\left(x\right)\in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ маємо

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x+t\right)\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(\Psi;t\right)dt.$$ Тому при $\forall n\in N$

$$f\left(x\right)-\mathfrak{S}_n\left(f;x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x+t\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}A_k\left(\Psi;t\right)+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(\Psi;t\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x+t\right)\sum_{k=1}^{\infty}kA_k\left(\Psi;t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)A_k\left(\Psi;t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{n}\tilde{f}'\left(x\right)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)\psi_1\left(k\right)\cos ktdt+ \tag{4}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)\psi_2\left(k\right)\sin ktdt\overset{df}{=}$$

$$=\frac{1}{n}\tilde{f}'\left(x\right)+J_1\left(f;\psi_1;x;n\right)+J_2\left(f;\psi_2;x;n\right).$$

Якщо послідовність $k^{s_i}\psi_i(k)$ опукла донизу і спадна до нуля при $s_i>1$, то згідно теореми 3.6 та наслідку 3.5 із [3] $J_1(f;\psi_1;x;n)=O(1)\psi_1(n)$ та $J_2(f;\psi_2;x;n)=O(1)\psi_2(n)$, де величини $O(1)$ рівномірно обмежені по n, x, f. Оскільки

$$O(1)\psi_1(n)+O(1)\psi_2(n)=O(1)\overline{\psi}(n), \tag{5}$$

то, об'єднавши (4) та (5), одержимо (3).

Теорема доведена.

Наслідок 1. Якщо $\psi_1(k)=\psi_1'(k)\pm\psi_1''(k)$, $\psi_2(k)=\psi_2'(k)\pm\psi_2''(k)$, де послідовності ψ_i', ψ_i'' $i=\overline{1,2}$ задовольняють умови теореми 1, то для будь-якої функції $f(x)\in C_\infty^{\overline{\psi}}$ справедлива асимптотична рівність (3) при $n\to\infty$.

Теорема 2. Якщо для пар додатних послідовностей $\overline{\psi}=$ $=(\psi_1(k);\psi_2(k))$, $\overline{\varphi}=(\varphi_1(k);\varphi_2(k))$ числові ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_i(k)\cdot\psi_j(k)}{\overline{\varphi}^2(k)}$, $i,j=\overline{1,2}$, є збіжні, то пара $\overline{\varphi}$ L-передують парі $\overline{\psi}$.

Доведення. Нехай послідовності $\eta_1(k)$ та $\eta_2(k)$ вибрані згідно співвідношення (1), тоді числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_1(k)+\left|\eta_2(k)\right|\right) \tag{6}$$

в силу умов теореми буде збіжним. Оскільки ряд (6) мажорує тригонометричний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\eta_1(k)\cos kx+\eta_2(k)\sin kx\right)$, то даний тригонометричний ряд є рівномірно збіжним на всій осі, тому є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Згідно теореми 2 ([2]) пара $\overline{\varphi}$ L — передує парі $\overline{\psi}$.

Теорема доведена.

Наслідок 2. Якщо числові ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{s_{ij}}\dfrac{\varphi_i(k)\cdot\psi_j(k)}{\overline{\varphi}^2(k)}$ $\left(s_{ij}>1,\ i,j=\overline{1,2}\right)$ збіжні, то пара $\overline{\varphi}$ L-передує парі $\overline{\psi}$.

Доведення. Якщо при $s>1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^s \alpha_k$ збіжний, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ — абсолютно збіжний. Отже, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\varphi_i(k)\right| \cdot \left|\psi_j(k)\right|}{\overline{\varphi}^2(k)}$ $\left(i, j=\overline{1,2}\right)$ збіжні. Аналогічно до доведення попередньої теореми одержимо, що тригонометричний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_1(k)\cos kx+\eta_2(k)\sin kx\right)$, де $\eta_1(k)$ та $\eta_2(k)$ задовольняють співвідношення (1), — є рядом Фур'є сумовної функції. Отже, згідно [2] пара $\overline{\varphi}$ L-передує парі $\overline{\psi}$.

Об'єднаємо всі доведені твердження і одержимо такий висновок.

Теорема 3. Нехай послідовності $\varphi_i(k)$, $\psi_i(k)$ $\left(i=\overline{1,2}\right)$ при деяких числах $s_{ij}>1$ утворюють спадні до нуля і опуклі донизу послідовності $\frac{k^{s_{ij}}\varphi_i(k)\cdot\psi_j(k)}{\overline{\varphi}^2(k)}$. Тоді для будь-якої функції $f(x)\in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ існує похідна $f^{\overline{\varphi}}(x)$ і при $n\to\infty$ справедлива рівність

$$f^{\overline{\varphi}}(x)-\mathfrak{S}_n\left(f^{\overline{\varphi}};x\right)=\frac{1}{n}\left(\tilde{f}^{\overline{\varphi}}\right)'(x)+O(1)\overline{\eta}(n), \tag{7}$$

де в парі $\overline{\eta}$ послідовності $\eta_1(k)$ та $\eta_2(k)$ вибрані згідно (1), $\overline{\eta}(n)=\sqrt{\eta_1^2(n)+\eta_2^2(n)}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, x, f.

Основний результат. Знайдемо асимптотичну поведінку при $n\to\infty$ величини (2).

Теорема 4. Нехай у парах $\overline{\varphi_i}=\left(\varphi_i'(k);\varphi_i''(k)\right)$, $\overline{\psi}=\left(\psi_1(k);\psi_2(k)\right)$ послідовності $\frac{k^{s'_{ij}}\varphi_i'(k)\cdot\psi_j(k)}{\overline{\varphi_i}^2(k)}$, $\frac{k^{s''_{ij}}\varphi_i''(k)\cdot\psi_j(k)}{\overline{\varphi_i}^2(k)}$ $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,2}\right)$ при деяких $s'_{ij}>1$, $s''_{ij}>1$ опуклі донизу і спадні до нуля. Тоді при $n\to\infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}};\mathfrak{S}_n\right)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}C_i(t)+\sum_{i=1}^{m}S_i(t)-C^*\right|dt+O(1)\sum_{i=1}^{m}\overline{\eta_i}(n),$$

де $C_i(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\eta_i'(k)\cos kt$, $S_i(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\eta_i''(k)\sin kt$,

$$\eta_i'(k)=\frac{\varphi_i'(k)\psi_1(k)+\varphi_i''(k)\psi_2(k)}{\overline{\varphi_i}^2(k)},\ \eta_i''(k)=\frac{\varphi_i'(k)\psi_2(k)-\varphi_i''(k)\psi_1(k)}{\overline{\varphi_i}^2(k)},$$

$$\overline{\varphi_i}^2(k)=(\varphi_i'(k))^2+(\varphi_i''(k))^2,\ \overline{\eta_i}(n)=\sqrt{(\eta_i'(n))^2+(\eta_i''(n))^2},$$

C^* — стала найкращого наближення в метриці L підінтегральної функції, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, а послідовності $\eta_i'(k)$ та $\eta_i''(k)$ такі, що $k\eta_i'(k)$, та $k\eta_i''(k)$ чи $-k\eta_i''(k)$, $i=\overline{1,m}$, чотири рази монотонні послідовності.

Доведення. Оскільки $\left\|\sum\limits_{i=1}^{m}|h_i(x)|\right\|_C=\max\limits_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i h_i(x)\right\|_C$, то згідно (2)

$$\mathscr{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\overline{\psi}};\mathfrak{S}_n\right)=\max_{|\alpha_i|=1}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f^{\overline{\varphi_i}}(x)-\mathfrak{S}_n\left(f^{\overline{\varphi_i}};x\right)\right)\right\|_C. \qquad (8)$$

Класи функцій $C_\infty^{\overline{\psi}}$ інваріантні відносно зсуву по аргументу, тому норму в метриці C у виразі (8) можна замінити на абсолютну величину лінійної комбінації в довільній точці, зокрема в нулі, тобто

$$\mathscr{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\overline{\psi}};\mathfrak{S}_n\right)=\max_{|\alpha_i|=1}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f^{\overline{\varphi_i}}(0)-\mathfrak{S}_n\left(f^{\overline{\varphi_i}};0\right)\right)\right|.$$

Застосуємо до $\overline{\varphi_i}$-похідних функції $f(x)\in C_\infty^{\overline{\psi}}$ теорему 3 і отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f^{\overline{\varphi_i}}(0)-\mathfrak{S}_n\left(f^{\overline{\varphi_i}};0\right)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\tilde{f}^{\overline{\varphi_i}}\right)'(0)+\sum_{i=1}^{m}O(1)\overline{\eta_i}(n)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\eta_i'(k)\cos kt+\eta_i''(k)\sin kt\right)dt+O(1)\sum_{i=1}^{m}\overline{\eta_i}(n).$$

Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\eta_i'(k)\cos kt=C_i(t)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\eta_i''(k)\sin kt=S_i(t)$, тоді

$$\mathscr{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\overline{\psi}};\mathfrak{S}_n\right)=\max_{|\alpha_i|=1}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left|\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)+S_i(t)\right)dt\right|+O(1)\sum_{i=1}^{m}\overline{\eta_i}(n).$$

Оскільки $f^{\overline{\psi}}\perp 1$, то

$$\sup_{f\in C_\infty^{\bar\psi}}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar\psi}(t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)+S_i(t)\right)dt\right| = \inf_{c\in R}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)+S_i(t)\right)-c(\alpha)\right|dt,$$

де $c(\alpha)$ — стала найкращого наближення в інтегральній метриці функції $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)+S_i(t)\right)$, тому

$$\mathscr{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\bar\psi};\mathfrak{S}_n\right) = \frac{1}{\pi n}\max_{|\alpha_i|=1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)+S_i(t)\right)-c(\alpha)\right|dt + O(1)\sum_{i=1}^{m}\overline{\eta_i}(n). \quad (9)$$

Оскільки послідовності $k\eta_i'(k)$, $\pm k\eta_i''(k)$ чотири рази монотонні і нескінченно малі, то (див [4, гл. V]) функції $C_i(t)$ на $[0;\pi]$ спадні, а функції $S_i(t)$ невід’ємні на $[0;\pi]$. В роботі [5] показано, що максимум в (9) реалізується на $\alpha_i^* = 1$, $i=\overline{1,m}$. **Теорема доведена.**

Якщо в теоремі 4 вибрати $\psi_1(k)=\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(k)=$ $=\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\varphi_i'(k)=\varphi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}$, $\varphi_i''(k)=\varphi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}$, причому $\frac{k^{s_i}\psi(k)}{\psi_i(k)}$ при деяких $s_i>1$ опуклі донизу, спадні до нуля послідовності, чотири рази монотонні, то при умові $\gamma_i\in[0;1]\cup[2;3]$, $i=\overline{1,m}$, або ж $\gamma_i\in[1;2]\cup[3;4]$, $i=\overline{1,m}$, де $\beta-\beta_i\equiv\gamma_i\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$, одержимо результати роботи [5].

Якщо ж вибрати $\psi_1(k)=\frac{\ln(k+e)}{k^r}$, $\psi_2(k)=\frac{1}{k^r}$, $\varphi_i'(k)=\varphi_i''(k)=$ $=\frac{1}{k^{r_i}}$, причому $r>r_i+1$, то тоді будуть виконуватися всі умови теореми 4, що свідчить про те, що множина послідовностей, які цю теорему задовольняють, непорожня, але цей випадок не охоплюється роботою [5].

Позначимо $M(\alpha)=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)+S_i(t)-c(\alpha)\right)\right|dt$, тоді при виконанні умов лише теореми 3 справедлива така рівність $\mathscr{E}_{n,m}\left(C_\infty^{\bar\psi};\mathfrak{S}_n\right)=\frac{1}{\pi n}\max_{|\alpha_i|=1}M(\alpha)+O(1)\sum_{i=1}^{m}\overline{\eta_i}$, $n\to\infty$.

Цікаво було б дослідити аналог виразу (2) в інтегральній метриці і знайти його асимптотичну поведінку.

Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Методы теории приближений : в 2-х ч. / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
2. Сорич В. А. Умови L-передування $\overline{\psi}$-похідних / В. А. Сорич, Н. М. Сорич, А. В. Сорич // Наук. пр. Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту : зб. за підсумками звіт. наук. конф. викл. і асп. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. держ. пед. ун-т, 2002. — Т. 2., вип. 1. — С. 13–18.
3. Бушев Д. Н. Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда / Д. Н. Бушев. — К., 1984. — 62 с. — (Препр / Ин-т математики АН УССР; 84.56).
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2-х т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
5. Сорич Н. Н. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фейера на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ / Н. Н. Сорич // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1986. — С. 44.

We obtained the asymptotic equations for variables that characterizes the joint approximation if the classes of $\overline{\psi}$-integrals by Fejer's sums in C-metric.

Key words: *the joint approximation, Fejer's sums, classes of* $\overline{\psi}$-*integrals.*

Отримано 21.03.2012