The paper is devoted to formulas of the evaluating of three dimensions of Fourier's coefficients with using spline-interflatation on the class of didderentiable functions in case when information about function is a set of lines.

Key words: *interflatation, cubature formula, three dimensions of Fourier's coefficients, class of differentiable functions.*

Отримано: 23.03.2012

УДК 517.956

О. В. Мартинюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. II

У роботі визначаються нові класи функцій-символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які будуються за такими символами за допомогою прямого та оберненого перетворення Бесселя. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з початковими функціями з просторів типу розподілів Соболєва–Шварца.

Ключові слова: *перетворення Бесселя; простори основних функцій; простори узагальнених функцій, задача Коші, псевдо-Бесселеві оператори.*

Ця робота є продовженням однойменної статті [1]. Тут досліджуються властивості перетворення Бесселя функцій з основного простору, а також топологічна структура простору, що є образом основного при відображенні Бесселя.

Перетворення Бесселя функцій з простору $\theta_{M,\rho}$.

Простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$

Символом $\theta_{M,\rho}$ будемо позначати простір основних функцій, введений у роботі [1]. Нехай ν — фіксоване число з множини $\{3/2; 5/2; 7/2; ...\}$. Символом j_ν позначатимемо нормовану функцію Бесселя; $j_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}+\lambda u=0$$

і задовольняє початкові умови: $j_\nu(0)=1$, $j'_\nu(0)=0$. Для j_ν правильним є інтегральне зображення Пуассона [2]

$$j_\nu(\sigma)=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\cos(\sigma\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta,\ \sigma\in\mathbb{R},\ \nu>-1/2. \quad (1)$$

На функціях з простору $\theta_{M,\rho}$ визначене перетворення Бесселя F_B [3]:

$$F_B[\varphi](\xi)=\int_0^\infty\varphi(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx,\ \varphi\in\theta_{M,\rho}. \quad (2)$$

Оскільки

$$\left|j_\nu(x\xi)\right|\le A_\nu,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R},\ A_\nu=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)},$$

то

$$\forall\xi\in\mathbb{R}:\ |F_B[\varphi](\xi)|\le A_\nu\cdot\int_0^\infty|\varphi(x)|x^{2\nu+1}dx<+\infty.$$

Отже, $F_B[\varphi]$ — парна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція. Оскільки інтеграл в (2) збігається рівномірно відносно ξ, то $F_B[\varphi]$ — неперервна на $\mathbb{R}$ функція.

Функція $F_B[\varphi]$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$. Справді, скориставшись формулою (1), знайдемо, що

$$\left|D_\xi^m j_\nu(x\xi)\right|\le A_\nu x^m,\ \xi\in\mathbb{R},\ x\ge 0,\ m\in\mathbb{Z}_+.$$

Звідси та з властивостей функції $\varphi\in\theta_{M,\rho}$ випливає абсолютна та рівномірна щодо ξ збіжність інтеграла $\int_0^\infty\varphi(x)D_\xi^m j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx.$

Отже, $D_\xi^m F_B[\varphi](\xi)=\int_0^\infty\varphi(x)D_\xi^m j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx.$

Здійснимо оцінку функції $\left|D_\xi^m F_B[\varphi]\right|$. Нехай $m=0$. Введемо позначення: $\nu=n+1/2$, $n\in\mathbb{N}$, і скористаємося наступним зображенням бесселевих функцій напівцілого порядку [4]:

$$J_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\ x>0,$$

де $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степеня $n-1$; при цьому $P_n(0)=1$, $Q_n(0)=0$.

Оскільки нормована функція Бесселя j_ν пов'язана з функцією Бесселя J_ν формулою (див. [3]) $j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1/2)}{x^\nu}J_\nu(x), \quad x>0,$ то маємо наступне зображення для функції $j_{n+1/2}$:

$$j_{n+1/2}(x)=\frac{c_n}{x^{n+1}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \tag{3}$$
$$n\in\mathbb{N}, x>0.$$

Урахувавши (3) подамо $F_B[\varphi](\xi)$, $\xi\neq 0$, у вигляді:

$$F_B[\varphi](\xi)=\Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi),$$

де

$$\Psi_1(\xi)=\frac{c_n}{\xi^{n+1}}\int_0^\infty\varphi(x)x^{n+1}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x\xi}\right)dx,$$

$$\Psi_2(\xi)=\frac{c_n}{\xi^{n+1}}\int_0^\infty\varphi(x)x^{n+1}\cos\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x\xi}\right)dx,$$

$$P_n\left(\frac{1}{x\xi}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{(x\xi)^k}, \quad Q_n\left(\frac{1}{x\xi}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d_k}{(x\xi)^k}.$$

Отже,

$$\Psi_1(\xi)=c_n\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\xi^{n+k+1}}\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)dx\equiv c_n\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\xi^{n+k+1}}J_k^1(\xi),$$

$$J_k^1(\xi)=\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)dx,$$

$$\Psi_2(\xi)=c_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d_k}{\xi^{n+k+1}}J_k^2(\xi), \;\; J_k^2(\xi)=\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1}\cos\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)dx.$$

Розглянемо $J_k^1(\xi)$ при фіксованому k: $0\le k\le n$. Оскільки $\xi\neq 0$, то інтегруючи m_k разів частинами, де $m_k\le n-k+2+\beta^{-1}[\gamma]$, подамо $J_k^1(\xi)$ у вигляді:

$$J_k^1(\xi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(x)x^{n-k+1}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)dx=\frac{(-1)^{m_k}}{\xi^{m_k}}\times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} D_x^{m_k}\left(\varphi(x)x^{n-k+1}\right)\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}+m_k\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx+\Phi(\varepsilon,\xi)\right].$$

Символом $\Phi(\varepsilon,\xi)$ тут позначено позаінтегральний вираз, який складається з доданків вигляду $cD_x^l x^{n-k+1}D_x^{m_k-1-l}\varphi(x)\cdot\Lambda$, якщо $0\le l\le n-k$, та доданку $cD_x^{m_k-1-l}\varphi(x)\cdot\Lambda$, якщо $l=n-k+1$ (c — сталі, конкретні значення яких на даний момент не важливі; $\Lambda=\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}+m_k\frac{\pi}{2}\right)$) із значеннями у точці $x=\varepsilon$ та в нескінченності. Із означення простору $\theta_{M,\rho}$ [1] та обмежень на функції ρ та M випливає, що для досить малих значень $x>0$ справджуються нерівності

$$\left|D_x^{m_k-1-(n-k+1)}\varphi(x)\right|\le c\frac{\rho(x)}{M^{m_k-1-(n-k+1)}(x)}\le c_1\frac{x^{\gamma}}{x^{\beta(m_k-1-(n-k+1))}}.$$

При вказаному обмеженні на параметр m_k маємо, що

$$\beta\left(m_k-1-(n-k+1)\right)\le[\gamma].$$

Отже,

$$\left|D_x^{m_k-1-(n-k+1)}\varphi(x)\right|\le c_1x^{\gamma-[\gamma]}=c_1x^{\{\gamma\}}.$$

Крім того, $\beta(m_k-1-l)\le\beta(n-k+1-l)+[\gamma]$. Тому, якщо $0\le l\le n-k$, то для досить малих значень $x>0$

$$\left|D_x^l x^{n-k+1}\cdot D_x^{m_k-1-l}\varphi(x)\right|\le c\frac{x^{n-k+1-l}\cdot x^{\gamma}}{x^{\beta(m_k-1-l)}}\le cx^{(1-\beta)(n-k+1-l)}x^{\gamma}\le cx^{\{\gamma\}}.$$

Звідси вже дістаємо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,\xi)=0$ для кожного $\xi\ne0$. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль за рахунок спадання до нуля на нескінченності функції φ та її похідних.

Урахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій дістанемо, що оцінка $|J_k^1|$ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду:

$$\left|J_k^1(\xi)\right|\le\frac{1}{|\xi|^{m_k}}\int_0^{\infty}\left|D_x^{m_k}\left(\varphi(x)x^{n-k+1}\right)\right|dx\le$$

$$\le\frac{1}{|\xi|^{m_k}}\left[\int_0^{\infty}\left|D_x^{m_k}\varphi(x)\right|\cdot x^{n-k+1}dx+m_k\left(n-k+1\right)\int_0^{\infty}\left|D_x^{m_k-1}\varphi(x)\right|\cdot x^{n-k}dx+\right.$$
$$+\ldots+\frac{\left(n-k+1\right)!}{\left(n-k+1-j\right)!}C_{m_k}^{m_k-j}\int_0^{\infty}\left|D_x^{m_k-j}\varphi(x)\right|\cdot x^{n-k+1-j}dx+\ldots+ \tag{4}$$

$$+\left(n-k+1\right)!\int_0^{\infty}\left|D_x^{m_k-(n-k+1)}\varphi(x)\right|dx\Bigg],\quad \xi\neq 0.$$

Із властивостей функції φ випливає, що всі інтеграли в (4) є збіжними. Справді, на нескінченності функція φ разом з усіма своїми похідними спадає швидше, ніж $\exp\{-\rho(ax)\}$. Розглянемо один із інтегралів у сумі (4), який відповідає індексу $n-k+1-j$ і з'ясуємо поведінку підінтегральної функції у досить малому (правосторонньому) околі особливої точки $x=0$. Внаслідок оцінок з означення простору $\theta_{M,\rho}$ [1] підінтегральна функція допускає оцінку

$$x^{n-k+1-j}\,|\,D_x^{m_k-j}\varphi(x)\,|\leq c\,\frac{x^{n-k+1-j}\rho(x)}{M^{m_k-j}(x)}\leq c_1\,\frac{x^{n-k+1-j}\cdot x^{\gamma}}{x^{\beta(m_k-j)}}\leq$$

$$\leq c_1\,\frac{x^{n-k+1-j}\cdot x^{\gamma}}{x^{\beta(n-k+2-j+\beta^{-1}[\gamma])}}=c_1x^{(1-\beta)(n-k+1-j)+\{\gamma\}-\beta}\leq$$

$$\leq c_1\cdot x^{\{\gamma\}-\beta},\quad 0\leq j\leq n-k+1.$$

Звідси випливає збіжність відповідного інтеграла, бо $x^{\{\gamma\}-\beta}=$ $=\dfrac{1}{x^{\beta-\{\gamma\}}}$, $0<\beta-\{\gamma\}\leq 1-\{\gamma\}<1$, якщо $\beta\in(\{\gamma\},1]$, $\{\gamma\}-\beta\geq 0$, якщо $\beta\in(0,\{\gamma\}]$. Надалі вважаємо, що $m_k=n-k+2+[\beta^{-1}[\gamma]]$. Отже, якщо $\xi\neq 0$, то

$$|\,J_k^1(\xi)\,|\leq\frac{\omega_k}{|\,\xi\,|^{n-k+2+[\beta^{-1}[\gamma]]}},\quad \xi\neq 0.$$

Тоді

$$|\,\Psi_1(\xi)\,|\leq c_n\sum_{k=0}^{n}b_k\,|\,\xi\,|^{-(n+k+1)}|\,J_k^1(\xi)\,|\leq$$

$$\leq c_n\sum_{k=0}^{n}b_k\omega_k\,|\,\xi\,|^{-(n+k+1)}|\,\xi\,|^{-(n-k+2+[\beta^{-1}[\gamma]])}=c_n'\,|\,\xi\,|^{-(2n+3+[\beta^{-1}[\gamma]])}$$

$$\equiv c_n'\,|\,\xi\,|^{-(1+p_0+[\beta^{-1}[\gamma]])},\ p_0=2\nu+1\equiv 2n+2,\ \xi\neq 0.$$

Аналогічно оцінюємо $|\,\Psi_2(\xi)\,|$. Таким чином, для $\xi\neq 0$ правильною є нерівність

$$|\,F_B[\varphi](\xi)\,|\leq\mathrm{const}\cdot|\,\xi\,|^{-(\tilde p_0+[\beta^{-1}[\gamma]])},\ \tilde p_0=1+p_0.$$

З іншого боку, $|\,F_B[\varphi](\xi)\,|\leq\mathrm{const}$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $F_B[\varphi](\xi)\to\mathrm{const}$ при $\xi\to 0$. Звідси дістаємо, що

$$|F_B[\varphi](\xi)| \le \mathrm{const}\cdot(1+|\xi|)^{-\omega_0}, \xi\in\mathbb{R}, \omega_0=\tilde{p}_0+[\beta^{-1}[\gamma]].$$

Нехай $m\in\mathbb{N}$. Тоді

$$D_\xi^m F_B[\varphi](\xi)=D_\xi^m\Psi_1(\xi)+D_\xi^m\Psi_2(\xi),$$

де

$$D_\xi^m\Psi_1(\xi)=c_n\sum_{k=0}^{n}b_k\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1}D_\xi^m\left(\xi^{-(n+k+1)}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)\right)dx,$$

$$D_\xi^m\Psi_2(\xi)=c_n\sum_{k=1}^{n-1}d_k\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1}D_\xi^m\left(\xi^{-(n+k+1)}\cos\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)\right)dx.$$

Оцінимо $|D_\xi^m\Psi_1(\xi)|$. Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$D_\xi^m\left(\xi^{-(n+k+1)}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}C_m^j\alpha_j\xi^{-(n+k+1+j)}x^{m-j}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}+(m-j)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\alpha_j=(-1)^j(n+k+1)\ldots(n+k+1+j).$$

Отже,

$$D_\xi^m\Psi_1(\xi)=c_n\sum_{k=0}^{n}b_k\sum_{j=0}^{m}C_m^j\alpha_j\xi^{-(n+k+1+j)}\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1+m-j}\times$$

$$\times\sin(x\xi-\frac{n\pi}{2}+(m-j)\frac{\pi}{2})dx\equiv c_n\sum_{k=0}^{n}b_k\sum_{j=0}^{m}C_m^j\alpha_j\xi^{-(n+k+1+j)}\Gamma_1(\xi),$$

де

$$\Gamma_1(\xi)=\int_0^\infty\varphi(x)x^{n-k+1+m-j}\sin\left(x\xi-\frac{n\pi}{2}+(m-j)\frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Припустимо, що $\xi\neq 0$. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено у випадку $m=0$, зінтегрувавши частинами $m_k=n-k+$ $+2+[\beta^{-1}[\gamma]]+m-j$ разів знайдемо, що

$$\left|\Gamma_1(\xi)\right|\le\frac{1}{|\xi|^{m_k}}\int_0^\infty\left|D_x^{m_k}\left(\varphi(x)x^{n-k+1+m-j}\right)\right|dx\le$$

$$\le\frac{1}{|\xi|^{m_k}}\left[\int_0^\infty\left|D_x^{m_k}\varphi(x)\right|\cdot x^{n-k+1+m-j}dx+\ldots+\frac{(n-k+1+m-j)!}{(n-k+1+m-j-l)!}\times\right.$$

$$\times C_{m_k}^{m_k-l}\int_0^\infty \left|D_x^{m_k-l}\varphi(x)\right|\cdot x^{n-k+1+m-j-l}dx+\ldots+(n-k+1+m-j)!\times$$

$$\left.\times\int_0^\infty \left|D_x^{m_k-(n-k+1+m-j)}\varphi(x)\right|dx\right].$$

Із властивостей функції φ випливає, що всі інтеграли є збіжними. На нескінченності функція φ разом з усіма своїми похідними спадає швидше, ніж $\exp\{-\rho(ax)\}$. У досить малому правосторонньому околі точки $x=0$ правильними є нерівності

$$x^{n-k+1+m-j-l}\left|D_x^{m_k-l}\varphi(x)\right|\le c\frac{x^{n-k+1+m-j-l}\rho(x)}{M^{m_k-l}(x)}\le$$

$$\le c\frac{x^{n-k+1+m-j-l}\cdot x^{\gamma}}{x^{\beta(m_k-l)}}\le c_1\frac{x^{n-k+1+m-j-l}\cdot x^{\gamma}}{x^{\beta(n-k+2+\beta^{-1}[\gamma]+m-j-l)}}=$$

$$=c_1x^{(1-\beta)(n-k+1+m-j-l)}\cdot x^{\{\gamma\}-\beta}\le$$

$$\le c_1x^{\{\gamma\}-\beta},\quad 0\le l\le n-k+1+m-j,\quad 0\le j\le m,$$

звідки й випливає збіжність відповідного інтеграла. Далі, як і у випадку $m=0$, здійснюємо оцінку $\left|D_\xi^m\Psi_1(\xi)\right|$ і аналогічно оцінюємо $\left|D_\xi^m\Psi_2(\xi)\right|$; в результаті прийдемо до нерівностей:

$$\left|D_\xi^m F_B[\varphi](\xi)\right|\le\alpha_m(1+|\xi|)^{-(\omega_0+m)},\ \xi\in\mathbb{R},\tag{5}$$

$$m\in\mathbb{Z}_+,\omega_0=\tilde p_0+\left[\beta^{-1}[\gamma]\right],\tilde p_0=1+p_0\equiv 2\nu+2,\beta\in(0,1],\gamma>1.$$

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. Якщо $\varphi\in\theta_{M,\rho}$, то $F_B[\varphi]\in C^\infty(\mathbb{R})$. Для функції $F_B[\varphi]$ та її похідних справджуються оцінки (5).

Нехай $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}=F_B[\theta_{M,\rho}]$. Введемо в $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ структуру зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p:=\sup_{x\in[0,\infty)}\left\{\sum_{k=0}^{p}\Lambda(\xi)^{\tilde\omega_0+2k}\left|D_\xi^{2k}\varphi(\xi)\right|\right\},\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu},p\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\Lambda(\xi):=(1+\xi)$, $\xi\in[0,\infty)$, $\tilde\omega_0=\omega_0-\varepsilon$, $0<\varepsilon<<1$ — фіксований параметр.

Очевидно, що

$$\|\varphi\|_0\le\|\varphi\|_1\le\ldots\|\varphi\|_p\le\ldots,\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu},\tag{6}$$

тобто ці норми є попарно зрівняними. Збіжність у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ — це збіжність за кожною нормою $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Ця збіжність еквівалентна такій: послідовність $\{\varphi_i, i \geq 1\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ збігається за топологією простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ до функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ тоді й лише тоді, коли вона:

1) обмежена в $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, тобто
$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c = c(p) > 0 \; \forall i \geq 1 : \|\varphi_i\|_p \leq c;$$
2) правильно збігається в $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, а саме, для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{D^{2m}_{\xi}(\varphi_i - \varphi), i \geq 1\right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,+\infty)$.

Доведення цього твердження аналогічне доведенню відповідної властивості у випадку простору $\theta_{M,\rho}$.

Символом $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ з відповідною збіжністю: послідовність $\{\varphi_k, k \geq 1\} \subset \subset \overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ збігається до функції $\varphi \in \overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$, якщо існує інтервал $(-R,R) \subset \mathbb{R}$ такий, що $\operatorname{supp}\varphi \subset (-R,R)$, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset (-R,R)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, і для будь-якого фіксованого $m \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{D^{2m}_x \varphi_k, k \geq 1\right\}$ збігається до $D^{2k}_x \varphi$ рівномірно на $(-R,R)$ (а, отже, і на $\mathbb{R}$) при $k \to +\infty$. Відомо [5], що функція
$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{2}{x^2 - 1}\right\}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$
є елементом простору $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$, функція $\psi_{\varepsilon}(x) = \dfrac{c}{\varepsilon}\psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, де $c^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$ є такою, що а) $\psi_{\varepsilon}(x) \geq 0$; б) $\operatorname{supp}\, \psi_{\varepsilon} = [-\varepsilon, \varepsilon]$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(x)dx = 1$. Зазначимо, що функція ψ подається у вигляді [5]:
$\psi(x) = \tilde{\varphi}(x-1)\tilde{\varphi}(-x-1)$, де $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \exp\{1/x\}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$

Оскільки ψ_ε — парна на $\mathbb{R}$ функція, то $\psi_\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ (при кожному $\varepsilon > 0$). Побудуємо функцію $\chi_1 \in \overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$, яка володіє властивістю: $\chi_1(x) \equiv 1$ на $[-1,1]$, $\chi_1(x) = 0$ для $|x| \geq 2$. За таку функцію можна взяти, наприклад (див. [5; 6]), первісну від функції $\psi_{1/2}(x+3/2) - \psi_{1/2}(x-3/2)$.

Покладемо $\chi_j(x) = \chi_1\left(\dfrac{x}{j}\right)$, $j \in \mathbb{N}$. Тоді $\chi_j \in \overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ і $\chi_j(x) \equiv 1$ для $x \in [-j, j]$. Очевидно також, що $\chi_j \varphi \in \overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$, якщо $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, $\chi_j \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R}) \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Лема 1. Послідовність $\{\varphi_j := \chi_j \varphi, j \geq 1\}$ збігається при $j \to +\infty$ до функції φ у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Доведення. Передусім доведемо, що послідовність $\{D_x^{2k}(\varphi_j - \varphi), j \geq 1\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, збігається до нуля рівномірно при $j \to +\infty$ на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,+\infty)$. Очевидно, що відрізок $[a,b]$ міститься у відрізку $[-j, j]$ при досить великому j. Тоді $\sup\limits_{x \in [a,b]} \left| D_x^{2k} \left(\varphi_j(x) - \varphi(x) \right) \right| = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто послідовність $\{\varphi_j, \ j \geq 1\}$ задовольняє умову 2) збіжності в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Доведемо, далі, що послідовність $\{\varphi_j, j \geq 1\}$ задовольняє також умову 1), тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 \ \forall j \geq 1 : \left\| \varphi_j \right\|_p \leq c_p.$$

Нагадаємо, що

$$\left\| \varphi_j \right\|_p = \sup_{x \in [0,+\infty)} \sum_{k=0}^{p} \left(\Lambda(x) \right)^{\tilde{\omega}_0 + 2k} \left| \varphi_j^{(2k)}(x) \right|.$$

Оцінимо вираз $\Lambda^{\tilde{\omega}_0 + 2k}(x) \left| \varphi_j^{(2k)}(x) \right|$, $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq p$. Маємо, що

$$\Lambda^{\tilde{\omega}_0 + 2k}(x) \left| \varphi_j^{(2k)}(x) \right| = \Lambda^{\tilde{\omega}_0 + 2k}(x) \left| \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \chi_j^{(l)}(x) \varphi^{(2k-l)}(x) \right| \leq$$

$$\leq \Lambda^{\tilde{\omega}_0 + 2k}(x) \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \left| \chi_j^{(l)}(x) \right| \cdot \left| \varphi^{(2k-l)}(x) \right|.$$

Урахувавши вигляд функції χ_ν безпосередньо знаходимо, що

$$\left|\chi_j^{(l)}(x)\right| = \left|\frac{1}{j^l}\chi_1^{(l)}\left(\frac{x}{j}\right)\right| \le \frac{\gamma_l}{j^l}, l \in \mathbb{Z}_+,$$

де стала $\gamma_l > 0$ не залежить від j. Тоді (див. (6))

$$\Lambda^{\tilde{\omega}_0+2k}(x)\left|\varphi_j^{(2k)}(x)\right| \le \Lambda^{\tilde{\omega}_0+2k}(x)\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \frac{\gamma_l}{j^l}\frac{c_{2k-l}}{\Lambda^{\omega_0+2k-l}(x)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \frac{\gamma_l}{j^l} c_{2k-l}\Lambda^l(x).$$

Зауважимо, що $\Lambda^{\tilde{\omega}_0+2k}(x)\left|\varphi_j^{(2k)}(x)\right| \equiv 0$ для $|x| \ge 2j$. Тоді для $x \in [-2j, 2j]$ правильними є нерівності

$$\Lambda^{\tilde{\omega}_0+2k}(x)\left|\varphi_j^{(2k)}(x)\right| \le \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \gamma_l c_{2k-l}\frac{(1+|x|)^l}{j^l} \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \gamma_l c_{2k-l}\frac{(1+2j)^l}{j^l} \le \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \gamma_l c_{2k-l} 3^l \equiv b_k,$$

де стала b_k не залежить від ν. Таким чином, $\left\|\varphi_j\right\|_p \le c_p$, де $c_p = \sum_{k=0}^{p} b_k$, c_p не залежить від ν.

Твердження доведено.

Наслідок. Простір $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ лежить щільно в $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$.

Символом $\Phi_{\beta,\gamma,p}^{\nu}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, позначимо поповнення простору $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ за p-ою нормою. Аналогічно тому, як це зроблено при доведенні леми 1, встановлюємо, що $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ лежить щільно у кожному просторі $\Phi_{\beta,\gamma,p}^{\nu}$. При цьому збіжність за нормою простору $\Phi_{\beta,\gamma,p}^{\nu}$ еквівалентна правильній збіжності: послідовність $\left\{\varphi_j, j \ge 1\right\}$ збігається до нуля в просторі $\Phi_{\beta,\gamma,p}^{\nu}$ тоді й лише тоді, коли вона обмежена за нормою $\|\cdot\|_p$, послідовність $\left\{D_x^{2k}\varphi_j, j \ge 1\right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,\infty)$ для кожного k: $0 \le k \le p$.

Очевидно, що правильними є вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,0} \supset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,1} \supset$ $\supset \ldots \supset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p} \supset \ldots$, при цьому кожне вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервне (згідно з (6)) і щільне (бо щільним є вкладення $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ у кожний простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$).

Оскільки $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, то із узгодженості норм $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{p+1}$ та властивості повноти просторів $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$ дістаємо, що $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ — повний зліченно-нормований простір.

Простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ відноситься до досконалих зліченно-нормованих просторів, тобто просторів, у яких кожна обмежена множина є компактною. Досконалі простори, як відомо [7], володіють певними властивостями, що не мають місця в нескінченновимірних нормованих просторах. Так, у досконалих просторах сильна збіжність співпадає зі слабкою; обмежені множини в просторі X', спряженому до досконалого простору X, також компактні і слабка збіжність у просторі X' співпадає з сильною збіжністю; досконалий простір є рефлексивним. Отже, правильним є наступне твердження.

Лема 2. Простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ є досконалим.

Доведення. З (6) випливає, що норми $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, впорядковані. Згідно із загальним критерієм досконалості повного зліченно-нормованого простору [7], досить довести, що з кожної множини $A \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, обмеженої за нормою $\|\cdot\|_p$, можна вибрати послідовність, фундаментальну за нормою $\|\cdot\|_{p-1}$.

Якщо множина A обмежена за нормою $\|\cdot\|_p$, то внаслідок (6) вона обмежена і за нормою $\|\cdot\|_{p-1}$. Звідси, зокрема, випливає, що рівномірно обмеженими на довільному відрізку $[a,b] \subset [0,\infty)$ є множини A та $A_1 := \{\varphi^{(2(p-1))} : \varphi \in A, x \in [a,b]\}$.

Кожну функцію $\psi \in A_1$ можна подати у вигляді:

$$\varphi^{(2(p-1))}(x) \equiv \psi(x) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \varphi^{(2p-1)}(\tau)d\tau,$$

при цьому

$$\exists c' > 0 \,\forall \varphi \in A \,\forall x \in [a,b] : \left|\varphi^{(2p-1)}(x)\right| \le c'.$$

Справді, $\varphi^{(2p-1)}(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \varphi^{(2p)}(\xi)d\xi,$

$$\left|\varphi^{(2p-1)}(x)\right| \le \int\limits_x^{+\infty} \left|\varphi^{(2p)}(\xi)\right| d\xi \le c_p \int\limits_x^{+\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{\omega_0+2p}} \le c',$$

де $c' > 0$ — стала, не залежна від $\varphi \in A$. Ця властивість випливає з обмеженості множини A за нормою $\|\cdot\|_p$. Тоді

$$\forall \psi \in A_1 : \left|\psi(x') - \psi(x'')\right| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} \varphi^{(2p-1)}(\tau)d\tau\right| \le c' \,|\, x' - x'' \,|, \{x', x''\} \subset [a,b].$$

Звідси дістаємо, що множина функцій A_1 рівностайно неперервна на $[a,b]$. Отже, на підставі теореми Арцела твердимо, що з множини A_1 можна виділити рівномірно збіжну на $[a,b]$ послідовність функцій $\left\{\varphi_s^{(2(p-1))}(x), s \ge 1\right\}$. Оскільки всі похідні функцій φ_s до порядку $< 2(p-1)$ отримуються інтегруванням послідовності $\varphi_s^{2(p-1)}$, то всі вони також утворюють рівномірно збіжні на $[a,b]$ послідовності. Крім того, із обмеженості множини A за нормою $\|\cdot\|_{p-1}$ випливає обмеженість послідовності $\left\{\varphi_s, s \ge 1\right\} \subset A$ за цією ж нормою. Таким чином, послідовність $\left\{\varphi_s, s \ge 1\right\}$ задовольняє умови 1), 2), за допомогою яких характеризується збіжність у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ за нормою $\|\cdot\|_{p-1}$. Отже, послідовність $\left\{\varphi_s, s \ge 1\right\} \subset A$ збігається за нормою $\|\cdot\|_{p-1}$, що й потрібно було довести.

Лема доведена.

Як наслідок дістаємо, що вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є компактним.

Теорема 2. Перетворення Бесселя неперервно відображає $\theta_{M,\rho}$ на простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Доведення. Нехай $\left\{\varphi_i, i \ge 1\right\} \subset \theta_{M,\rho}$ і $\varphi_i \to 0$ при $i \to +\infty$ за топологією простору $\theta_{M,\rho}$, тобто $\left\{\varphi_i, i \ge 1\right\} \subset \theta_{M,\rho,a}$ при деякому $a > 0$ і при цьому виконуються наступні умови:

1) $\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \ \exists c = c(p) > 0 \ \ \forall i \geq 1: \ \|\varphi_i\|_{p,a} \leq c \Leftrightarrow$

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left\{ \exp\left\{ \rho\left(a\left(1 - \frac{1}{p+2}\right)x \right)\right\} \cdot \sum_{k=0}^{p} M^{2k}(x) \left| D_x^{2k} \varphi_i(x) \right| \right\} \leq c;$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{ D_x^{2m} \varphi_i, i \geq 1 \right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset (0,\infty)$. Доведемо, що $F_B[\varphi_i] \to 0$ при $i \to +\infty$ у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, тобто встановимо, що: 1) послідовність $\left\{ F_B[\varphi_i], i \geq 1 \right\}$ обмежена в $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$; 2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{ D_x^{2m} F_B[\varphi_i], i \geq 1 \right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному відрізку $[c,d] \subset [0,+\infty)$.

При доведенні теореми 1 знайдено вигляд похідної $D_\xi^m F_B[\varphi](\xi)$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, при $\xi \neq 0$; скориставшись ним, дістанемо

$$D_\xi^{2m} F_B[\varphi_i](\xi) = c_n \sum_{k=0}^{n} b_k \int_0^\infty \varphi_i(x) x^{n-k+1} D_\xi^{2m} (\xi^{-(n+k+1)} \times$$

$$\times \sin(x\xi - \frac{n\pi}{2}))dx + c_n \sum_{k=1}^{n-1} d_k \int_0^\infty \varphi_i(x) x^{n-k+1} D_\xi^{2m} (\xi^{-(n+k+1)} \times$$

$$\times \cos(x\xi - \frac{n\pi}{2}))dx = c_n \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{j=0}^{2m} C_{2m}^j \alpha_j \xi^{-(n+k+1+j)} \Gamma_1(\xi) +$$

$$+ c_n \sum_{k=1}^{n-1} d_k \sum_{j=0}^{2m} C_{2m}^j \xi^{-(n+k+1+j)} \Gamma_2(\xi),$$

де

$$\Gamma_1(\xi) = \int_0^\infty \varphi_i(x) x^{n-k+1+2m-j} \sin\left(x\xi - \frac{n\pi}{2} + (2m-j)\frac{\pi}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{(-1)^{m_k}}{\xi^{m_k}} \int_0^\infty D_x^{m_k} \left(\varphi_i(x) x^{n-k+1+2m-j} \right) \sin\left(x\xi - \frac{n\pi}{2} + \left((2m-j) + m_k\right)\frac{\pi}{2} \right) dx,$$

$$\Gamma_2(\xi) = \frac{(-1)^{m_k}}{\xi^{m_k}} \int_0^\infty D_x^{m_k} \left(\varphi_i(x) x^{n-k+1+2m-j} \right) \times$$

$$\times \cos\left(x\xi - \frac{n\pi}{2} + \left((2m-j) + m_k\right)\frac{\pi}{2} \right) dx,$$

$$m_k = n - k + 2 + \left[\beta^{-1}[\gamma] \right] + 2m - j,$$

$$\alpha_j = (-1)^j (n+k+1)\dots(n+k+1+j)\,.$$

Далі, як і при доведенні теореми 1, встановлюємо оцінку похідної $\left|D_\xi^{2m} F_B[\varphi_i]\right|$ передусім у випадку $\xi \neq 0$, потім — для довільного $\xi \in \mathbb{R}$. При цьому використовуємо умову 1), яку задовольняє послідовність $\{\varphi_i, i \geq 1\}$. За допомогою цієї умови доводимо збіжність інтегралів, що зображують функції Γ_1 та Γ_2. У результаті прийдемо до нерівностей

$$\left|D_\xi^{2m} F_B[\varphi_i](\xi)\right| \leq \alpha_{2m} \left(1+|\,\xi\,|\right)^{-(\omega_0+2m)} \leq \alpha_{2m} \Lambda^{-(\tilde{\omega}_0+2m)}(\xi),$$
$$m \in \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R},$$

причому стала $\alpha_{2m} > 0$ не залежить від індексу $i \in \mathbb{N}$. Звідси вже дістаємо обмеженість норми $\|F_B[\varphi_i]\|_p$ у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c_p > 0 \; \forall i \geq 1:$$

$$\|F_B[\varphi_i]\|_p = \sup_{\xi \in (0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^{p} (\Lambda(\xi))^{\tilde{\omega}_0+2k} \left|D_\xi^{2k} F_B[\varphi_i](\xi)\right| \right\} \leq c_p.$$

Із властивостей функцій φ_i та j_ν випливає абсолютна і рівномірна по $\xi \in \mathbb{R}$ збіжність інтеграла $\int\limits_0^\infty \varphi_i(x) D_\xi^{2m} j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx.$

Оскільки всі функції $\varphi_i \in \theta_{M,\rho}$ є неперервними на $\mathbb{R}$, то з умови 2) випливає, що послідовність $\{\varphi_i, i \geq 1\}$ збігається рівномірно на довільному проміжку $[0, A]$, $A > 0$. Тоді, здійснивши граничний перехід у співвідношенні $D_\xi^{2m} F_B[\varphi_i](\xi) = \int\limits_0^\infty \varphi_i(x) D_\xi^{2m} j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx$ під знаком інтеграла при $i \to +\infty$ знайдемо, що $D_\xi^{2m} F_B[\varphi_i] \to 0$ при $i \to +\infty$ рівномірно на довільному проміжку $[c,d] \subset [0,\infty)$.

Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 179–192.

2. Корн Т. Справочник по математике / Т. Корн, Г. Корн. — М. : Наука, 1977. — 832 с.
3. Левитан Б. И. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. И. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 2. — С. 102–143.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
5. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Наука, 1979. — 384 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 528 с.
7. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.

The new classes of functions-symbols and new classes of pseudo-differential operators, which are built on such characters by direct and inverse Bessel transformation, are defined in the paper. The correct solvability of the Cauchy problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators with initial functions of the spaces such as Sobolev—Schwartz distributions is set.

Key words: *Bessel transformation, spaces of basic functions, spaces of generalized functions, the Cauchy problem, pseudo-Bessel operators.*

Отримано: 14.06.2011

УДК 517.956

В. І. Мироник, канд. фіз.-мат. наук,
І. С. Тупкало, асистент

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Знайдено умову існування області, в якій розв'язок двоточкової за часом задачі є обмеженою функцією за сукупністю змінних.

Ключові слова: *двоточкова за часом задача, еволюційні рівняння, оператор Бесселя нескінченного порядку, узагальнена функція типу розподілів.*

У праці [1] встановлено коректну розв'язність двоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку в класі крайових умов типу розподілів. Розв'язок $u(t,x),(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$, такої задачі при кожному $t\in(0,T)$ є обмеженою функцією змінної x, тобто $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\le c(t)$, функція