УДК 519.718;519.217

А. Я. Довгунь[*]**,** асистент,
В. К. Ясинський**,** д-р фіз.-мат. наук, професор

[*]Буковинський державний фінансово-економічний університет,
[**]Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРОБЛЕМА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПІСЛЯДІЄЮ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ КОНТРАКТОРАМИ У ПРОСТОРІ СКОРОХОДА

Вивчено клас стохастичних диференціальних рівнянь, розв'язки яких не мають розривів другого роду, за допомогою ймовірнісних обмежених інтегральних контракторів.

Ключові слова: *стохастичне диференціальне рівняння, інтеграл Скорохода, інтегральні контрактори.*

Постановка задачі. Нехай випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\}$, $t \in [-\tau, T]\}$, $\tau > 0$, зі значеннями в R^n, n-вимірний вінерів процес $\{w(t), t \in [0,T]\}$ та центрована пуассонова міра $\int\limits_0^t \int\limits_U |c(t,\varphi,u)|^2 \, \Pi(du)dt < \infty$ з $\boldsymbol{E}\{\nu(ds,du)\} = \Pi(du)ds$ задані на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком σ-алгебр $\{F_t,\ t \ge 0\}$, $F_t \subset F$ [1—3]. При $t \in [-\tau, T]$ справджуються рівності

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0]$$

і

$$x(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t a(s, x_s)ds + \int\limits_0^t b(s, x_s)dw(s) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_U c(s, x_s, u)\tilde{\nu}(ds, du), \tag{1}$$

якщо $t \in [0, T]$.

Тут $a:[0,T]\times D \to R^n$; $b:[0,T]\times D \to M_n(D)$; $c:[0,T]\times D \times U \to R^n$, $M_n(D)$ — матриця розмірності $n \times n$ над простором D; a, b, c — вимірні за сукупністю змінних; $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}, \theta \in [-\tau, 0]$; $D = D([-\tau, 0])$ простір Скорохода неперервних справа функцій на відрізку $[-\tau, 0]$, що мають лівосторонні границі [4; 5].

Тоді $\{x(t), t \geq 0\}$ назвемо сильним розв'язком СДФР

$$dx(t) = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw(t) + \int_U c(t, x_t, u)\tilde{\nu}(ds, du) \tag{2}$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [-\tau, 0]. \tag{3}$$

У просторі D для $\varphi \in D$ визначимо норму

$$\|\varphi(\theta)\| \equiv \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|. \tag{4}$$

Зауважимо, що у рівномірній нормі (4) простір Скорохода D неповний. Тому всі результати одержано у розширеному просторі Скорохода, який надалі позначатимемо символом $\bar{D} \equiv \bar{D}([-\tau, 0])$ [5].

У роботі [6] доведено теорему існування і єдиності для детермінованого диференціального рівняння, а у [7] узагальнені результати на випадок стохастичних диференціальних рівнянь.

Нехай

$G_i(t, x_t) : [-\tau, T] \times D \to R^n$, $i = 1, 2$, $G_3(t, x_t, u) : [0, T] \times D \times U \to R^n$

є обмеженими неперервними функціоналами. Для $x, y \in D$ введемо випадковий процес

$$\begin{aligned} z(t) \equiv y(t) + \int_0^t G_1(s, x_s) y(s) ds + \int_0^t G_2(s, x_s) y(s) dw(s) + \\ + \int_0^t \int_U G_3(s, x_s, u) y(s) \tilde{\nu}(ds, du). \end{aligned} \tag{5}$$

Припустимо, що існує додатна стала K така, що для всіх $t \in [0, T]$ виконуються нерівності

$$|a(t, x_t - z_t) - a(t, x_t) - G_1(t, x_t) y| \leq K \|y\|, \tag{6}$$

$$|b(t, x_t - z_t) - b(t, x_t) - G_2(t, x_t) y| \leq K \|y\|, \tag{7}$$

$$\int_U |c(t, x_t - z_t, u) - c(t, x_t, u) - G_3(t, x_t, u) y| \Pi(du) \leq K \|y\|, \tag{8}$$

майже скрізь відносно норми (4).

Означення 1. Якщо умови (6), (7), (8) виконуються, то говорять, що коефіцієнти рівняння (2) мають обмежені інтегральні контрактори [6; 8].

Означення 2. Будемо говорити, що обмежений випадковий контрактор є правильним, якщо рівняння (5) має розв'язок в D для довільних $x(t)$ і $z(t)$ з D [9].

Означення 3. Говорять, що функціонал $h : [0, T] \times D \times R^n \to R^n$ є стохастично замкнений, якщо для довільних $x^{(n)}$, x з $D([0, T] \times \Omega)$ та

$y^{(n)}$, y з D таких, що $x^{(n)} \to x$, $y^{(n)} \to y$ при $n \to \infty$ і $h(t, x_t^{(n)}(\theta), y^{(n)}(\theta)) \to z$ в $D([0,T] \times \Omega)$, де $z(t) \equiv h(t, x_t, y)$ для всіх $t \in [0,T]$ майже скрізь.

Зауваження 1. Якщо функціонали a, b, c є ліпшицевими за другим аргументом, то вони є стохастично замкненими і мають правильний обмежений випадковий інтегральний контрактор з $G_i = 0$, $i = 1,2,3$ [7].

Про існування розв'язків системи СДФР з пуассоновими збуреннями.

Теорема 1. Якщо коефіцієнти в (2) є стохастично замкненими, мають обмежений випадковий інтегральний контрактор і для довільного $\varphi \in D([-h,0])$ існують інтеграли $\int_0^T |a(t,\varphi)|^2\, dt < +\infty$; $\int_0^T |b(t,\varphi)|^2\, dt < \infty$; $\int_0^t \int_U |c(t,\varphi,u)|^2\, \Pi(du)dt < \infty$, то існує розв'язок $x(t) \in D([-\tau, T])$ задачі Коші (2), (5), (3).

Доведення. Доведення базується на наступній ітераційній процедурі. Для $n \ge 0$

$$\begin{gathered} x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) - y^{(n)}(t) - \int_0^t G_1(s, x_s^{(n)}(\theta)) y^{(n)}(s) ds - \\ -\int_0^t G_2(s, x_s^{(n)}(\theta)) y^{(n)}(s) dw(s) - \int_0^t \int_U G_3(s, x_s^{(n)}, u) y^{(n)}(s) \tilde{\nu}(du, ds); \end{gathered} \tag{9}$$

або

$$x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) - z^{(n)}(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{9'}$$

$$x_0(t) = \varphi(0), \quad t \ge 0,$$
$$x_n(t) = \varphi(t), \quad -\tau \le t \le 0,$$

$$\begin{gathered} y^{(n)}(t) = x^{(n)}(t) - x(0) - \int_0^t a(s, x_s^{(n)}(\theta)) ds - \\ -\int_0^t b(s, x_s^{(n)}(\theta)) dw(s) - \int_0^t \int_U c(s, x_s^{(n)}, u) \tilde{\nu}(du, ds), \end{gathered} \tag{10}$$

$$0 \le t \le T,\ y_n(t) = 0,\ -\tau \le t \le 0.$$

Підставляючи (9) в (10) для $(n+1)$-го наближення, знаходимо:

$$y^{(n+1)}(t) = x^{(n+1)}(t) - x(0) - \int_0^t a(s, x_s^{(n+1)}(\theta)) ds -$$

$$-\int_0^t b(s,x_s^{(n+1)}(\theta))dw(s)-\int_0^t\int_U c(s,x_s^{(n+1)},u)\tilde{\nu}(du,ds)=$$

$$=x^{(n+1)}(t)-x(0)-\int_0^t a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))ds-\int_0^t b(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)})dw(s)-$$

$$-\int_0^t\int_U c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds)=x^{(n)}(t)-x^{(n)}(t)+x(0)+\int_0^t a(s,x_s^{(n)}(\theta))ds+$$

$$+\int_0^t b(s,x_s^{(n)}(\theta))ds+\int_0^t\int_U c(s,x_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds)-\int_0^t G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^t G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)dw(s)-\int_0^t\int_U G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(du,ds)-x(0)- \qquad (11)$$

$$-\int_0^t a(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)})ds-\int_0^t b(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)})dw(s)-\int_0^t\int_U c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(du,ds)=$$

$$=\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_a^{(n)}(\theta))]ds+$$

$$+\int_0^t [b(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)+$$

$$+\int_0^t\int_U [c(s,x_s^{(n)},u)-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-\ c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)\big]\tilde{\nu}(ds,du).$$

Скористаємося нерівністю Коші–Буняковського та основними властивостями стохастичних інтегралів для $t\in[0,T]$ [3; 4]:

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|\int_0^t 1\cdot g(s)ds\right|^2\right\}\le T\cdot\int_0^t \boldsymbol{E}\{|\,g(s)\,|^2\}ds;$$

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|\int_0^t g(s,w)dw(s)\right|^2\right\}=\int_0^t \boldsymbol{E}\{|\,g(s,w)\,|^2\}ds;$$

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|\int_0^t\int_U f(s,u,w)\tilde{\nu}(ds,du)\right|^2\right\}=\int_0^t\int_U \boldsymbol{E}\{|\,f(s,u,w)\,|^2\}\Pi(du,dt);$$

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^s g(s)dw(s)\right|^2\right\} \le 4\int_0^T \boldsymbol{E}\{|\, g(s)\,|^2\}ds;$$

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_U f(s,u,w)\tilde{\nu}(du,ds)\right|^2\right\} \le 4\int_0^t\int_U \boldsymbol{E}\{|\, f(s,u,w)\,|^2\}\Pi(du,ds)$$

та для умов (6), (7), (8) знайдемо оцінку виразу $\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2\right\}$. Очевидно, що

$$\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2 \le \left(\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta)) -\right.$$

$$-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - a(s,x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta))]ds\,| +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t b(s,x_s^{(n)}(\theta)) - G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - b(s,x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta))dw(s)\,| +$$

$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t\int_U [c(s,x_s^{(n)},u) - G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s) - c(s,x_s^{(n)} - z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(ds,du)\,|\right)^2 \le$$

$$\le 2[\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta)) - G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - a(s,x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta))]ds\,|^2 +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t [b(s,x_s^{(n)}(\theta)) - G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - b(s,x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)\,|^2 +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t\int_U [c(s,x_s^{(n)},u) - G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s) - c(s,x_s^{(n)} - z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(ds,du)\,|^2].$$

Знайдемо умовне математичне сподівання відносно σ-алгебри F_0 (будемо позначати $\boldsymbol{E}\{|\, y^{(n+1)}(t)\,|^2\} \equiv \boldsymbol{E}\{|\, y^{(n+1)}(t)\,|^2\,/F_0\}$) [3]:

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2\right\} \le 2[\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t [a(s,x_s^{(n)}(\theta)) -$$

$$-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - a(s,x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta))]ds\,|^2\} + \boldsymbol{E}\{\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t [b(s,x_s^{(n)}(\theta)) -$$

$$-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - b(s,x_s^{(n)}(\theta) -$$

$$-z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)\,|^2\} + \boldsymbol{E}\{\sup_{0\le t\le T}\,|\int_0^t\int_U [c(s,x_s^{(n)},u) -$$

$$-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(du,ds)|^2\}]\le$$

$$\le 2K^2[\boldsymbol{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\left\|y^{(n)}(s)\right\|ds|^2\right\}+\boldsymbol{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\left\|y^{(n)}(s)\right\|dw(s)|^2\right\}+$$

$$+\boldsymbol{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\int_U\left\|y^{(n)}(s)\right\|\tilde{\nu}(du,dv)|^2\right\}\le$$

$$\le 2K^2[T\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds+4\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds+4\int_0^t\int_U\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}\Pi(du,ds)=$$

$$=2K^2[T\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds+4\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds+4\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds=$$

$$=2K^2(T+8)\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds.$$

Отже,

$$\boldsymbol{P}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^t\int_U\gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)|>3^{-n-2}\}\le\frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!},\ t\in[0,T].\quad(12)$$

Проінтегрувавши n разів, матимемо

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(s)\right\|^2\right\}\le[2K^2(T+8)]^n\int_0^t(T-s)^n\,\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(s)\right\|^2\right\}ds/n!,\ t\in[0,T],\quad(13)$$

де

$$y^{(0)}(t)=-\int_0^t a(s,x_s^{(0)}(\theta))ds-\int_0^t b(s,x_s^{(0)}(\theta))dw(s)-$$

$$-\int_0^t\int_U c(s,x_s^{(0)},u)\tilde{\nu}(ds,du),\quad\forall t\in[0,T]$$

та

$$x_s^{(0)}(s-\tau)=\begin{cases}\varphi(0), & s\ge\tau,\\ \varphi(s-\tau), & s<\tau.\end{cases}$$

Тепер оцінимо вираз

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(s)\right\|^2\right\}=\boldsymbol{E}\{(\sup_{0\le s\le t}|y^{(0)}(s)|)^2\}\le$$

$$\le 2\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s a(\tau,x_\tau^{(0)})d\tau|^2+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^s b(\tau,x_\tau^{(0)})dw(\tau)|^2+$$

$$+\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s\int_U c(\tau,x_\tau^{(0)},u)\tilde{\nu}(du,d\tau)|^2\}\le$$

$$\le 2(\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s a(\tau,x_\tau^{(0)})d\tau|^2\}+\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s b(\tau,x_\tau^{(0)})dw(\tau)|^2\}+$$

$$+\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s\int_U c(\tau,x_\tau^{(0)},u)\tilde{\nu}(du,d\tau)|^2\})\le$$

$$\le 2(T\int_0^t\boldsymbol{E}\{|a(\tau,x_\tau^{(0)})|^2\}d\tau+4\int_0^t\boldsymbol{E}\{|b(\tau,x_\tau^{(0)})|^2\}d\tau+4\int_0^t\int_U\boldsymbol{E}\{|c(\tau,x_\tau^{(0)},u)|^2\}d\tau).$$

Оскільки відображення a, b і c є неперервними на відрізку $[0,T]$, то існують додатні сталі C_1, C_2 і C_3, які обмежують їх.

Отже,

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(t)\right\|\right\}^2\le 2(T\int_0^t C_1^2d\tau+4\int_0^t C_2^2d\tau+$$

$$+4\int_0^t C_3^2d\tau)\le 2(T^2C_1^2+4C_2^2T+4C_3^2T)\le\theta,$$

де

$$\theta=2T(TC_1^2+4C_2^2+4C_3^2)>0.$$

Оцінка (13) набуде вигляду

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(t)\right\|\right\}^2\le\theta[2K^2(T+8)]^n\cdot\frac{T^{n+1}}{(n+1)!},\ \ t\in[0,T],\ n=1,2,\dots. \tag{14}$$

Перепишемо нерівність (11) наступним чином:

$$y^{(n+1)}(t)=\int_0^t\alpha_n(s)ds+\int_0^t\beta_n(s)dw(s)+\int_0^t\int_U\gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du),$$

де

$$\alpha_n(t)=a(t,x_t^{(n)})-G_1(t,x_t^{(n)})y^{(n)}(t)-a(t,x_t^{(n)}-z_t^{(n)});$$

$$\beta_n(t)=b(t,x_t^{(n)})-G_2(t,x_t^{(n)})y^{(n)}(t)-b(t,x_t^{(n)}-z_t^{(n)});$$

$$\gamma_n(t)=c(t,x_t^{(n)},u)-G_3(t,x_t^{(n)},u)y^{(n)}(t)-c(t,x_t^{(n)}-z_t^{(n)},u).$$

Очевидно, що

$$\begin{gathered}\sup_{0\le s\le t}|y^{(n+1)}(t)|\le\int_0^T|\alpha_n(s)|ds+\\ \sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\beta_n(s)dw(s)|+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\int_U\gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)|.\end{gathered} \tag{15}$$

Оцінимо кожний з цих інтегралів. Використовуючи (6), (7), (8) і (14), легко одержати нерівність:

$$\boldsymbol{P}\{\int_0^T |\alpha_n(s)|\,ds > 3^{-n-2}\} \le 3^{2n+2}\int_0^T \boldsymbol{E}\{|\alpha_n(s)|^2\}ds \le$$

$$\le 3^{2n+3}K^2\int_0^T \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds \le$$

$$\le 3^{2n+3}K^2T\theta[2K^2(T+8)]^n\,\frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{3a^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!},$$

де $K_1 \equiv 18\cdot K^2T(T+8)$. Аналогічно

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \beta_n(s)dw(s)| > 3^{-n-2}\right\} \le \frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!};$$

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le s\le t}|\int_0^t\int_U \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)| > 3^{-n-2}\right\} \le \frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!}.$$

Нарешті з (15) і попередніх оцінок випливає нерівність

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|y^{(n+1)}(t)| > 3^{-n-2}\right\} \le \boldsymbol{P}\left\{\int_0^T|\alpha_n(s)|\,ds > 3^{-n-2}\right\} +$$

$$+\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \beta_n(s)dw(s)| > 3^{-n-2}\right\} + \tag{16}$$

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\int_U \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)| > 3^{-n-2}\right\} \le \frac{3K_1^{n+1}\theta T}{(n+1)!}.$$

З (9) одержимо

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|\right\} < \boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|y^{(n)}(t)| + \int_0^T|G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|\,ds +\right.$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t G_2(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)dw(s)| + \sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\int_U G_3(s,x_s^{(n)},u)y_n(s)\tilde{\nu}(ds,du)|.$$

Позначимо

$$S_1 \equiv \sup\{|G_1(t,x_t)|,\ t\in[0,T], x_t\in \mathrm{D}_n\};$$

$$S_2 \equiv \sup\{|G_2(t,x)|,\ t\in[0,T], x_t\in \mathrm{D}_n\};$$

$$S_3 \equiv \sup\{|G_3(t,x,u)|,\ t\in[0,T],\ \{x_t,u\}\in \mathrm{D}_n\times U\}$$

Використовуючи (14), легко побачити, що

$$\boldsymbol{P}\left\{\int_0^T |G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|\,ds > 3^{-n}\right\} \le 3^{2n}\boldsymbol{E}\left\{\int_0^T |G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|^2\,ds\right\} \le$$

$$\le 3^{2n}T\int_0^T \boldsymbol{E}\left\{|G_1(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)|^2\right\}ds \le S_1^2\cdot 3^{2n}TK^2\int_0^T \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|\right\}^2\}ds \le$$

$$\le 3^{2n}T^2K^2[2K^2(T+8)]^n\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\theta\cdot S_1^2 \le \frac{S_1^2\theta T^3a^n}{(n+1)!}.$$

Аналогічно

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t G_2(s,x_s^{(n)})y^{(n)}(s)dw(s)| > 3^{-n}\right\} \le \frac{S_2^2\theta T^2a^n}{(n+1)!};$$

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t\int_U G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(ds,du)| > 3^{-n}\right\} \le \frac{S_3^2\theta T^2a^n}{(n+1)!}.$$

З (9), (16) та з останніх оцінок маємо ланцюжок нерівностей:

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)| > 4\cdot 3^{-n}\right\} \le$$

$$\le\left[\frac{3\theta Ta^n}{(T+8)(n+1)!}+\frac{S_1^2\theta T^3a^n}{(n+1)!}+\frac{S_2^2\theta T^2a^n}{(n+1)!}+\frac{S_3^2\theta T^2a^n}{(n+1)!}\right]\cdot 4^2\cdot 3^{2n} =$$

$$=\frac{4^2\cdot 3^{2n}\theta Ta^n}{(n+1)!}\left[\frac{3}{(T+8)}+S_1^2T^2+S_2^2T+S_3^2T\right]= \tag{17}$$

$$=\frac{4^2\cdot 3^{2n}\theta Ta^n}{(T+8)(n+1)!}\left[3+(T+8)T^2S_1^2+(T+8)T(S_2^2+S_3^2)\right].$$

За лемою Бореля–Кантеллі [4], одержимо, що

$$\boldsymbol{P}=\{\lim_{n\to\infty}(\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)|) > 4\cdot 3^{-n}\}=0.$$

Тобто, для великих n майже скрізь виконується нерівність

$$\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)| \le 4\cdot 3^{-n}. \tag{18}$$

Отже, послідовність $\{x_n(t), n=1,2,\ldots\}$ збіжна майже скрізь до стохастичного процесу $x^*(t)$. За теоремою Вейєрштрасса отримаємо, що ця збіжність є рівномірною на $[0,T]$.

Якщо використаємо означення $x^*(t)$, поклавши $x^*(t)=\varphi(t)$ для $t\in[-\tau,0]$, одержимо, що траєкторія $x^*(t)$ не має стрибків другого роду на $[-\tau,T]$. Крім того, згідно із визначенням послідовностей $\{x_n(t), n=1,2,\ldots\}$ та $\{y_n(t), n=1,2,\ldots\}$, випливає, що вони є тривіальними по відношенню до вінерового процесу і випадкової пуассонової міри. Таким чином, для довільного $t\in[-\tau,T]$, $x^*(t)$ є тривіальним. Отже, $x^*(t)$ належить до D.

Для того, щоб довести, що $x^*(t)$ є розв'язком (2), (3), отримаємо спочатку, що $x_n(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ в D. З (18) маємо:

$$\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le t\le T}|x^*(t)-x^{(n)}(t)|^2\}\le \boldsymbol{E}\left\{\lim_{m\to\infty}\sup_{0\le t\le T}|x^{(n+m)}(t)-x^{(n)}(t)|^2\right\}\le$$

$$\le \lim_{m\to\infty}\boldsymbol{E}\left\{\sum_{k=n}^{n+m-2}\sup_{0\le t\le T}|x^{(k+1)}(t)-x^{(k)}(t)|^2\right\}\le 4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{n+m-2}3^{-k}\right)^2\to 0.$$

Таким чином, $x^{(n)}(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ в L^2 (в розумінні збіжності в L^2).

Використовуючи той факт, що функції a, b, c є стохастично замкнені, випливає, що для всіх $t\in[0,T]$

$$a(t,x_t^{(n)}(\theta))\to a(t,x_t^*(\theta));$$
$$b(t,x_t^{(n)}(\theta))\to b(t,x_t^*(\theta));$$
$$c(t,x_t^{(n)},u)\to c(t,x_t^*,u)$$

майже скрізь.

Отже,

$$\boldsymbol{E}\left\{|\int_0^t a(s,x_s^{(n)})ds-\int_0^t a(s,x_s^*)ds|^2\right\}\le T\int_0^T\boldsymbol{E}\left\{|a(s,x_s^{(n)}-a(s,x_s^*))|^2\right\}ds\to 0,$$

$$\boldsymbol{E}\left\{|\int_0^t b(s,x_s^{(n)})dw(s)-\int_0^t b(s,x_s^*)dw(s)|^2\right\}\le$$

$$\le T\int_0^T\boldsymbol{E}\left\{|b(s,x_s^{(n)}-b(s,x_s^*))|^2\right\}ds\to 0;$$

$$\boldsymbol{E}\left\{|\int_0^t\int_U c(s,x_s^{(n)},u)\tilde{\nu}(ds,du)-\int_0^t\int_U c(s,x_s^*,u)\tilde{\nu}(ds,du)|^2\right\}=$$

$$=\int_0^t\int_U\boldsymbol{E}\left\{|c(s,x_s^{(n)},u)-c(s,x_s^*,u)|^2\right\}\Pi(du)ds\to 0.$$

Взявши границю в розумінні збіжності в L^2 і застосувавши її до обох сторін рівності (9), одержимо, що для довільного $t \in [0,T]$ виконується майже скрізь рівність

$$x^*(t) = x(0) + \int_0^t a(s, x_s^*)ds + \int_0^t b(s, x_s^*)dw(s) + \int_0^t \int_U c(s, x_s^*, u)\tilde{\nu}(ds, du)$$

і

$$x^*(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0].$$

Також, випадкові процеси зліва і справа останньої рівності не мають стрибків другого роду. Отже, цей вираз виконується майже скрізь для всіх $t \in [-\tau, T]$ і $x^*(t)$ є розв'язком (2), (3).

Теорема доведена.

Про єдиність розв'язків СДФР. Розглянемо задачу про єдиність розв'язку задачі (2), (3), (5).

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і обмежений випадковий контрактор для СДФР (2) є правильним. Тоді розв'язок задачі (2), (3), (5) $\{x(t)\} \subset D$ є єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.

Доведення. Нехай $x^1(t)$, $x^2(t)$ — два розв'язки задачі (2), (3). Тоді $x(t) \equiv x^1(t)$, $z(t) \equiv x^2(t) - x^1(t)$ в (5). Отже, існує $y(t)$ з D, який є розв'язком рівняння

$$x^2(t) - x^1(t) = y(t) + \int_0^t G_1(s, x_s^1)y(s)ds + \\ + \int_0^t G_2(s, x_s^1)y(s)dw(s) + \int_0^t \int_U G_3(s, x_s^1, u)\tilde{\nu}(ds, du). \tag{19}$$

Враховуючи (1) та (19), отримаємо оцінку

$$y(t) = \int_0^t [a(s, x_s^2) - a(s, x_s^1) - G_1(s, x_s^1)y(s)]ds +$$

$$+ \int_0^t [b(s, x_s^2) - b(s, x_s^1) - G_2(s, x_s^1)y(s)]dw(s) + \int_0^t \int_U [c(s, x_s^2, u) - c(s, x_s^1, u) -$$

$$-G_3(s, x_s^1, u)y(s)]\tilde{\nu}(ds, du) = \int_0^t [a(s, x_s^1 + z_s) - a(s, x_s^1) - G_1(s, x_s^1)y(s)]ds +$$

$$+ \int_0^t [b(s, x_s^1 + z_s) - b(s, x_s^1) - G_2(s, x_s^1)y(s)]dw(s) +$$

$$+\int_0^t\int_U [c(s,x_s^1+z_s,u)-c(s,x_s^1,u)-G_3(s,x_s^1,u)y(s)]\tilde{\nu}(ds,du),$$

$$\sup_{0\le s\le t}|y(s)|\le K\int_0^t\|y(s)\|ds+K\sup_{0\le s\le t}\int_0^t\|y(s)\|dw(s)+K\sup_{0\le s\le t}\int_0^t\int_U\|y(s)\|\Pi(du)ds,$$

$$\boldsymbol{E}\|y(t)\|^2\}=\boldsymbol{E}\left\{\sup_{0\le s\le t}|y(s)|^2\right\}\le 2TK^2\int_0^t\boldsymbol{E}\|y(s)\|^2\}ds+$$

$$+4K^2\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\|y(s)\|^2\right\}ds+4K^2\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\|y(s)\|^2\right\}ds)\le 2K^2(T+8)\int_0^t\boldsymbol{E}\left\{\|y(s)\|^2\right\}ds.$$

Нагадаємо посилену нерівність Гронуола [4]: для вимірних функцій $\varphi(t)$ і $\alpha(t)$, для яких виконується співвідношення

$$\varphi(t)\le\alpha(t)+L\int_0^t\varphi(s)ds,\ L>0,$$

справедлива нерівність

$$\varphi(t)\le\alpha(t)+L\int_0^t e^{L(t-s)}\alpha(s)ds.$$

Позначивши $\varphi(t)\equiv\boldsymbol{E}\left\{\|y(t)\|^2\right\}$, $L=2K^2(T+8)$, $\alpha(t)\equiv 0$, отримаємо

$$0\le\boldsymbol{E}\left\{\|y(t)\|^2\right\}\le 2K^2(T+8)\int_0^t e^{2K^2(T+8)}\cdot 0ds\le 0.$$

Отже, майже скрізь виконується рівність

$$\boldsymbol{E}\left\{\|y(t)\|^2/F_0\right\}=0,\ \forall t\in[0,T],$$

Згідно з властивостями умовного математичного сподівання, одержимо, що $y(t)\equiv 0$. Використовуючи (17) і (19), очевидно, що

$$0\le\boldsymbol{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|x^1(t)-x^2(t)|\ne 0\right\}\le$$

$$\le\frac{4^2\cdot 3^{2n}T\theta a^n}{(n+1)!(T+8)}\left[3+(T+8)T^2S_1^2+(T+8)T(S_2^2+S_3^2)\right]\to 0$$

при $n\to\infty$.

Отже, $\boldsymbol{P}\left\{x^1(t)\ne x^2(t)\right\}=0$.

Продовжуючи розв'язки $\{x^1(t)\}$ і $\{x^2(t)\}$ вправо, матимемо, що $x^1(t) = x^2(t)$ на $[0,T]$ майже скрізь з точністю до стохастичної еквівалентності. Отже, розв'язок є єдиний майже скрізь, що і треба було довести.

Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2 т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
2. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2 т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 473 с.
3. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика : у 3 т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — 798 с.
4. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1982. — 612 с.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 352 с.
6. Kuc H. H. On integral contractors / H. H. Kuc // Journal of Integral Equations. — 1979. — P. 35–46.
7. Jankovich Sv. On stochastic differential-difference equations and their random integral contractors / Sv. Jankovich // Научные труды. — Рига : Латвийский университет, 1991. — Т. 562. — С. 74–84.
8. Altman M. Inverse differentiability, contractors and equations in Banach spaces / M. Altman // Studia Math. — 1971. — V. 46. — P. 1–15.
9. Zhang B. C. The existence and uniqueness of solutions of stochastic differential-difference equations / B. C. Zhang, W. J. Padgett // Stochastic Analysis and Appl. — 1998. — V. 2(4.3). — P. 335–345.

The class of stochastic differential equations which have solutions without points of discontinuity of the second type is studied with the help of probabilistic bounded integral contractors.

Keywords: *the stochastic differential equations, the Skorokhod integral, the integral contractors.*

Отримано: 28.03.2012