УДК 519.6

І. В. Бейко, д-р техн. наук, професор,
О. В. Щирба, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТА ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЇХ ПОБУДОВИ

У роботі побудовано ітераційні числові алгоритми для розв'язування оптимізаційних крайових задач із загальними алгебраїчними, диференціальними та інтегро-диференціальними рівняннями та нерівностями. У випадках порожньої множини допустимих розв'язків крайової задачі побудовані ітераційні алгоритми генерують узагальнені оптимальні розв'язки. Прискорення збіжності досягається із використанням методів Ньютона.

Ключові слова: *крайові задачі, керовані системи, узагальнені розв'язки, оптимальне керування.*

Вступ. Труднощі практичного розв'язування задач оптимального керування процесами із розподіленими параметрами пов'язані із надмірними розмірностями комп'ютерних моделей процесів із розподіленими параметрами. Додаткові труднощі привносить неповнота даних про причинно-наслідкові залежності у взаємодії між підсистемами керованої системи та конструктивна складність взаємодії технологічних процесів і підсистем. Такі складні задачі можуть не мати оптимального розв'язку і для них у даній роботі визначаються узагальнені оптимізаційні розв'язки та будуються числові алгоритми для оптимізації ускладнених систем із алгебраїчними, диференціальними та інтегро-диференціальними підсистемами.

Узагальнена оптимізаційна крайова задача. Узагальнена оптимізаційна крайова задача формулюється як задача відшукання вектор-функції $u : D \to R^r$,

$$u(t,s) \in \bar{U}(t,s), \ \ (t,s) \in D_0 \subset D, \tag{1}$$

$$\bar{U}(t,s) \triangleq \left\{ u(t,s) \,|\, \frac{\partial^{i+j} u_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j} \in \left[u_{kij}^{\min}(t,s); u_{kij}^{\max}(t,s) \right], \ (k,i,j) \in K_0^2 \right\},$$

на якій досягає мінімального значення критерій оптимальності

$$J(x,u) \triangleq \iint_{D_1} \left(\sum_{(k,i,j)\in K_1^1} a_{kijl}(t,s) \frac{\partial^{i+j} x_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j} + \right.$$
$$\left. + \sum_{(k,i,j)\in K_1^2} b_{kijl}(t,s) \frac{\partial^{i+j} u_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j} \right) dsdt, \tag{2}$$

де вектор-функція $x: D \to R^n$ є траєкторією розподіленого процесу, що описується системою диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$A_{1l}(x,u) = 0, \quad l \in L_1, \tag{3}$$

$$A_{1l}(x,u) \triangleq \sum_{(k,i,j)\in K_l^1} c_{kijl}(t,s)\frac{\partial^{i+j} x_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j} + \sum_{(k,i,j)\in K_l^2} d_{kijl}(t,s)\frac{\partial^{i+j} u_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j}$$

і задовольняє системі алгебро-інтегро-диференціальних нерівностей та рівнянь

$$A_{2l}(x,u) \le 0 \ \text{ для } \ l \in L_2 \ \text{ і } \ A_{2l}(x,u) = 0 \ \text{ для } \ l \in L_3, \tag{4}$$

$$A_{3l}(x,u) \le 0 \ \text{ для } \ l \in L_4 \ \text{ і } \ A_{3l}(x,u) = 0 \ \text{ для } \ l \in L_5, \tag{5}$$

$$A_{4l}(x,u) \le 0 \ \text{ для } \ l \in L_6 \ \text{ і } \ A_{4l}(x,u) = 0 \ \text{ для } \ l \in L_7, \tag{6}$$

визначених функціями

$$A_{2l}(x,u) \triangleq \iint\limits_{D_l}\left(\sum_{(k,i,j)\in K_l^1} c_{kijl}(t,s)\frac{\partial^{i+j} x_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j} + \sum_{(k,i,j)\in K_l^2} d_{kijl}(t,s)\frac{\partial^{i+j} u_k(t,s)}{\partial t^i \partial s^j}\right)dtds,$$

$$A_{3l}(x,u) \triangleq \int\limits_{T_l}\left(\sum_{(k,i,j)\in K_l^1} c_{kijl}(t,\varphi_l(t))\frac{\partial^{i+j} x_k(t,\varphi_l(t))}{\partial t^i \partial s^j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{(k,i,j)\in K_l^2} d_{kijl}(t,s)\frac{\partial^{i+j} u_k(t,\varphi_l(t))}{\partial t^i \partial s^j}\right)dt,$$

$$A_{4l}(x,u) \triangleq \sum_{q\in Q_l}\left(\sum_{(k,i,j)\in K_l^1} c_{kijl}(t_q^l,s_q^l)\frac{\partial^{i+j} x(t_q^l,s_q^l)}{\partial t^i \partial s^j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{(k,i,j)\in K_l^2} d_{kijl}(t_q^l,s_q^l)\frac{\partial^{i+j} u(t_q^l,s_q^l)}{\partial t^i \partial s^j}\right)$$

на заданих множинах $T_l \subset [0,T]$, $D \subset R^2$, $L_l \in N$, $D_l \subset D$, $Q_l \subset D$, $K_l^1, K_l^2 \subset \{1,2,...,r\}\times(\{0\}\cup N)\times(\{0\}\cup N)$, $\{0\}\cap L_1 \cap ... \cap L_7 = \varnothing$ і на заданих функціях $a_{kijl}: D_l \to R$, $b_{kijl}: D_l \to R$, $c_{kijl}: D_l \to R$, $d_{kijl}: D_l \to R$.

Узагальнені оптимальні розв'язки. Для такої узагальненої оптимізаційної крайової задачі класичний розв'язок може не існувати

$$(x^*,u^*) = \arg\min_{(x,u)\in\Omega} J(x,u) \tag{7}$$

на допустимій множині Ω усіх тих функцій (x,u), які задовольняють переліченим рівностям та нерівностям. Проте визначений нами узагальнений розв'язок існує і будується як підпослідовність із послідовності $(x_k, u_k) \in \Omega(\varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = \overline{\varepsilon}$, де $\Omega(\varepsilon)$ є множиною усіх тих функцій (x,u), які для всіх $\overline{k} = \overline{1..4}$ задовольняють нерівності $A_{\overline{k}l}(x,u) \le \varepsilon$, $l \in L_{\overline{n}}$ із парними значеннями $\overline{n}$ і задовольняють нерівності $|A_{\overline{k}l}(x,u)| \le \varepsilon$, $l \in L_{\overline{n}}$ із непарними $\overline{n}$, а також задовольняють нерівність $J(x,u) \le \inf\limits_{(x,u)\in\Omega(\varepsilon)} J(x,u) + \varepsilon$, де $\overline{\varepsilon}$ є тим мінімальним числом, для якого при всіх $\varepsilon > \overline{\varepsilon}$ множина $\Omega(\varepsilon)$ є тілесною.

Описана нижче реалізація числового алгоритму для прискореного обчислення узагальненого розв'язку базується на використанні ньютонівських методів та чисельно-аналітичних апроксимацій шуканих функцій x, u і їх частинних похідних. Якщо область D є циліндричною, $D = D^0 \times [0,T]$, то за допомогою методу прямих можна звести дану задачу до задачі оптимального керування процесом із зосередженими параметрами, який описується системою звичайних диференціальних рівнянь та нерівностей.

$$F_i\left(\overline{x}(p,\cdot),\overline{u}(p,\cdot),\overline{t}_0(p),\overline{T}(p)\right) \le 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Прямі методи відшукання наближеного розв'язку оптимізаційної крайової задачі для загальної, можливо нециліндричної, області D опираються на параметричну або дискретну апроксимацію наближеного розв'язку крайової задачі. Для цього в області D будуємо дискретну множину $D^M = \left\{(t_k, s_k),\ k = \overline{1..M}\right\}$ вузлів $(t_k, s_k) \in D$, шукані значення функцій $x(t_k, s_k)$, $u(t_k, s_k)$ позначимо невідомими x^k та u^k, які далі обчислюємо як розв'язок $X = \{x^k,\ k = \overline{1..M}\}$, $U = \left\{u^k,\ k = \overline{1..M}\right\}$ апроксимаційної крайової задачі, отриманої заміною у кожному вузлі (t_k, s_k) диференціальних рівнянь та нерівностей відповідними різницевими рівняннями $\left|A_{kl}^M(X,U)\right| = 0$ та нерівностями $A_{kl}^M(X,U) \le 0$, де замість похідних $\dfrac{\partial^{i+j} x(t_k,s_k)}{\partial t^i \partial s^j}$, $\dfrac{\partial^{i+j} u(t_k,s_k)}{\partial t^i \partial s^j}$ використовуються їх різницеві наближення:

$$\frac{\partial^{i+j} x(t_k,s_k)}{\partial t^i \partial s^j} = G_x\left(k,i,j,t_k,s_k,X,U\right),$$

$$\frac{\partial^{i+j} u(t_k,s_k)}{\partial t^i \partial s^j} = G_u\left(k,i,j,t_k,s_k,X,U\right).$$

У результаті приходимо до оптимізаційної задачі А: знайти узагальнений розв'язок $\left\{(X^s, U^s)\right\}_{s=1}^{\infty}$, який мінімізує функціонал $J^M(X,U)$ за умов (I)-(III):

(I) $A_{kl}^M(X,U) \le 0$, $k = \overline{1..4}$, $l \in L_{\overline{n}}$, $\overline{n} \in \{2,4,6\}$;

(II) $|A_{kl}^M(X,U)| = 0$, $k = \overline{1..4}$, $l \in L_{\overline{n}}$, $\overline{n} \in \{1,3,5,7\}$;

(III) $U \in \overline{U}^M(t_k, s_k)$, $k = \overline{1..M}$.

Для розв'язування задачі А до множини функцій

$$\left\{A_{kl}^M, k = \overline{1..4}, l \in L_{\overline{n}}, \overline{n} \in \{1,3,5,7\}\right\}$$

долучаємо множину функцій

$$\left\{-A_{kl}^M, k = \overline{1..4}, l \in L_{\overline{n}}, \overline{n} \in \{1,3,5,7\}\right\}$$

і за допомогою відповідних перепозначень функцій та розширення множин $L_{\overline{n}}$ із індексами $\overline{n} \in \{1,3,5,7\}$ записуємо умови (I), (II) уніфікованою системою нерівностей $A_{kl}^M(X,U) \le 0$ для всіх *k,l.*

Побудову узагальненого розв'язку здійснюємо за наступним алгоритмом А1:

Крок 1. Вибрати довільні початкові значення (X^1, U^1) і покласти $s = 1$.

Крок 2. Для заданих (X^s, U^s) замінити матрицю U^s її проекцією на множину $\overline{U}^M(t_k, s_k)$.

Крок 3. Обчислити $(k^*, l^*) = \arg\max\limits_{kl} A_{kl}^M(X^s, U^s)$.

Крок 4. Якщо $A_{k^*l^*}^M(X^s, U^s) \le 0$, то покласти

$$W_X = \nabla_X J^M(X^s, U^s),\ W_U = \nabla_U J^M(X^s, U^s).$$

Крок 5. Якщо $A_{k^*l^*}^M(X^s, U^s) > 0$, то покласти

$$W_X = \nabla_X A_{k^*l^*}^M(X^s, U^s),\ W_U = \nabla_U A_{k^*l^*}^M(X^s, U^s).$$

Крок 6. Покласти

$$(X^{s+1}, U^{s+1}) = (X^s, U^s) - \lambda_s (W_X, W_U) / \left\|(W_X, W_U)\right\|. \tag{10}$$

Крок 7. Замінити матрицю U^{s+1} її проекцією на множину $\overline{U}^M(t_k, s_k)$ і перейти на крок 3.

Теорема 1. Якщо задані функції $a_{kijl} : D_l \to R$, $b_{kijl} : D_l \to R$, $c_{kijl} : D_l \to R$, $d_{kijl} : D_l \to R$ є обмеженими і крокові множники $\lambda_s > 0$

задовольняють умовам $\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s=\infty,\ \lim_{s\to\infty}\lambda_s=0$, то для будь-яких початкових значень (X^1,U^1) побудована алгоритмом А1 послідовність $\{(X^s,U^s)\}_{s=1}^{\infty}$ є узагальненим розв'язком оптимізаційної задачі А.

Дійсно, із обмеженості функцій $a_{kijl}:D_l\to R$, $b_{kijl}:D_l\to R$, $c_{kijl}:D_l\to R$, $d_{kijl}:D_l\to R$ випливає обмеженість градієнтів W_X, W_U і обмеженість норми $\|(W_X,W_U)\|$. Якщо послідовність $\{(X^s,U^s)\}_{s=1}^{\infty}$ реалізована алгоритмом А1 не є узагальненим розв'язком оптимізаційної задачі А, то існує таке число $\tilde{\varepsilon}>\bar{\varepsilon}$, що

$$\forall s\ge 1\ \ (X^s,U^s)\notin\Omega(\tilde{\varepsilon}),\tag{11}$$

де

$$\Omega(\tilde{\varepsilon})=\left\{(X,U)\mid A_{kl}^M(X,U)\le\tilde{\varepsilon},J^M(X,U)\le\tilde{\varepsilon}+\inf_{(X,U)\in\Omega(\tilde{\varepsilon})}J^M(X,U)\right\}.$$

Нехай $(\tilde{X},\tilde{U})$ є внутрішньою точкою множини $\Omega(\tilde{\varepsilon})$ і для деякого $\delta>0$ виконується умова

$$\left\{(X,U)\mid \left\|(X,U)-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|<\delta\right\}\subset\Omega(\tilde{\varepsilon}).\tag{12}$$

Із (10), (11) і (12) отримуємо в евклідовій нормі

$$\left\|(X^{s+1},U^{s+1})-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|^2=$$
$$=\left\|(X^s,U^s)-\lambda_s(W_X,W_U)/\left\|(W_X,W_U)\right\|-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|^2=$$
$$=\left\|(X^s,U^s)-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|^2+\lambda_s^2-$$
$$-2\lambda_s\left((W_X,W_U)/\left\|(W_X,W_U)\right\|,(X^s,U^s)-(\tilde{X},\tilde{U})\right)=$$
$$=\left\|(X^s,U^s)-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|^2+\lambda_s(\lambda_s-2\delta).$$

Із умови $\lim_{s\to\infty}\lambda_s=0$ випливає існування такого числа S, що для всіх $s\ge S$ виконується нерівність $\lambda_s<\delta$. Це означає, що для всіх $s\ge S$ виконуються нерівності

$$\left\|(X^{s+1},U^{s+1})-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|^2\le\left\|(X^s,U^s)-(\tilde{X},\tilde{U})\right\|^2-\lambda_s\delta,$$

які суперечать умові $\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s=\infty$ і збіжність алгоритму доведена.

Узагальнений алгоритм Ньютона. Для побудови наступного алгоритму А2 прискореної збіжності приведемо апроксимаційну крайову задачу до ЗНЛ нормального виду. Для цього невідомі матриці (X,U) запишемо одним невідомим вектором v, оптимізаційну крайову задачу спочатку приведемо до задачі мінімізації функції $J(x,u) \cong c^T v$ при обмеженнях $A_1 v \le b_1$, $A_2 v = b_2$ із відомими векторами c, b_1, b_2 та відомим матрицями A_1 і A_2, а далі відомим методом введення додаткових змінних із необхідними перепозначеннями невідомих прийдемо до нормалізованої задачі відшукання вектора $x \in R^n$ на системі рівнянь $Ax = b$, яка максимізує значення функції $c^T x$ при обмеженнях $x \ge 0$.

Якщо множина $X^* = \left\{x \in R^n : Ax = b,\ c^T x = f^*,\ x \ge 0_n\right\}$ є непорожньою множиною розв'язків x^* задачі лінійного програмування

$$f^* = \min_{x \in X} c^T x,\ X = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \ge 0_n\}, \tag{13}$$

то проекцію

$$\hat{x}^* = \arg\min_{x \in X^*} \left\|x - \hat{x}\right\|^2 \tag{14}$$

довільно вибраного вектора $\hat{x}$ на множину X^* можна обчислити як мінімізатор функції Лагранжа

$$L(x,p,\beta) = \frac{1}{2}\left\|x - \hat{x}\right\|^2 + p^T(b - Ax) + \beta\left(c^T x - f^*\right),$$

де множники Лагранжа $p \in R^m$ і $\beta \in R^1$ є максимізаторами функції Лагранжа

$$\max_{p \in R^m} \max_{\beta \in R^1} \min_{x \in R_+^n} L(x,p,\beta). \tag{15}$$

Із умов Каруша-Куна-Таккера для задачі (14)

$$x - \hat{x} - A^T p + \beta c \ge 0_n,\ D(x)\left(x - \hat{x} - A^T p + \beta c\right) = 0_n,$$

$$x \ge 0_n,\ Ax = b,\ c^T x = f^*$$

випливає, що значення

$$x = \left(\hat{x} + A^T p - \beta c\right)_+ \tag{16}$$

є мінімізатором функції Лагранжа $L(x,p,\beta)$, а розв'язок (p^*, β^*) оптимізаційної задачі

$$(p^*, \beta^*) = \arg\max_{p \in R^m} \max_{\beta \in R}\left(b^T p - \frac{1}{2}\left\|(\hat{x} + A^T p - \beta c)_+\right\|^2 - \beta f^* + \frac{1}{2}\left\|\hat{x}\right\|^2\right) \tag{17}$$

визначає шукану проекцію $\hat{x}^* = \left(\hat{x} + A^T p^* - \beta^* c\right)_+$.

Беручи до уваги, що оптимальне значення f^* є апріорі невідомим, у роботах [8; 9] запропоновано ітераційний метод

$$x_{s+1} = (x_s + A^T p_{s+1} - \beta c)_+, \tag{18}$$

$$p_{s+1} \in \arg\max_{p \in R^m} \left\{ b^T p - \frac{1}{2} \left\| (x_s + A^T p - \beta c)_+ \right\|^2 \right\}, \tag{19}$$

який в умовах непорожньої множини X^* збігається до оптимального розв'язку $x^* = x_N \in X^*$ за скінчене число кроків $s = N$ при довільно вибраному початковому значенні x_0 та довільно вибраному значенні $\beta > 0$, а остаточно обчислене за формулою $u^* = p_{N+1} / \beta$ значення u^* є розв'язком двоїстої задачі

$$f^* = \max_{u \in U} b^T u, \;\; U = \left\{ u \in R^m : A^T u \le c \right\}.$$

За відомою теоремою Каруша–Куна–Таккера система

$$Ax^* - b = 0_m, \; x^* \ge 0_n, \; D(x^*)v^* = 0_n,$$

$$v^* = c - A^T u^* \ge 0_n,$$

де через $D(z)$ позначено діагональну матрицю із діагоналлю z, є необхідною і достатньою умовою оптимальності розв'язків x^* та u^*.

Для розв'язування задачі максимізації (19) скористаємося обґрунтованим у роботі [10] швидкозбіжним узагальненим методом Ньютона $p_{k+1} = p_k - M_k^{-1} \nabla_p F(p_k, \beta, x_s)$, де замість матриці Гессе $\frac{\partial^2}{\partial p^2} F(p_k, \beta, x_s)$ (яка для негладкої по p функції $F(p, \beta, x_s) \triangleq b^T p - \frac{1}{2} \left\| (x_s + A^T p - \beta c)_+ \right\|^2$ може не існувати в деяких точках або бути виродженою) використаємо наближену до $\frac{\partial^2}{\partial p^2} F(p_k, \beta, x_s)$ симетричну матрицю $M_k \triangleq -AD_k A^T + \varepsilon I_m$ із $n \times n$ діагональною матрицею D_k,

$$(D_k)_{ii} = \begin{cases} 1, & (x_s + A^T p_k - \beta c)_i > 0, \\ 0, & (x_s + A^T p_k - \beta c)_i \le 0. \end{cases}$$

Метод паралельної реалізації ітераційного процесу (18), (19) разом із узагальненим методом Ньютона дозволяє обчислити наближені розв'язки x^*, u^* за алгоритмом А2:

Крок 1. Задати довільні початкові значення x_0 та p_0, число $\beta > 0$, точності $\varepsilon_1 > 0$ та $\varepsilon_2 > 0$ і покласти $s = 0$.

Крок 2. Обчислити $F(p_k, \beta, x_s) = b^T p_k - \frac{1}{2} \left\| \left(x_s + A^T p_k - \beta c \right)_+ \right\|^2$

Крок 3. Обчислити градієнт $\nabla_p F(p_k, \beta, x_k) = b - A\left(x_s + A^T p_k - \beta c \right)_+$.

Крок 4. Обчислити матрицю $M_k \triangleq -AD_k A^T + \varepsilon I_m$, де діагональна матриця $D_k \in R^{n\times n}$ задається рівностями

$$(D_k)_{ii} = \begin{cases} 1, & \left(x_s + A^T p_k - \beta c\right)_i > 0, \\ 0, & \left(x_s + A^T p_k - \beta c\right)_i \le 0. \end{cases}$$

Крок 5. Обчислити розв'язок v лінійної системи

$$M_k v = -\nabla_p F(p_k, \beta, x_k) .$$

Крок 6. Обчислити $p_{k+1} = p_k - \tau_k \delta p,\ \tau_k = \max\limits_{\tau} S\left(p_k - \tau\delta p, \beta, x_s\right)$

Крок 7. Якщо $\left\|p_{k+1} - p_k\right\| > \varepsilon_1$, то покласти $k = k + 1$ і перейти до кроку 2.

Крок 8. Обчислити $x_{s+1} = \left(x_s + A^T \tilde{p} - \beta c\right)_+$ Якщо $\left\|x_{s+1} - x_s\right\| > \varepsilon_2$, то покласти $p_0 = \tilde{p}$, $s = s + 1$ і перейти до кроку 2.

Крок 9. Покласти $u^* = \tilde{p} / \beta$, $x^* = \left(x_s + A^T \tilde{p} - \beta c\right)_+$ і завершити алгоритм.

Для розв'язування оптимізаційних задач особливо великих розмірностей будуються паралельні ітераційні алгоритми, які можна здійснювати паралельно на багатопроцесорних обчислювальних системах [7]. З цією метою найбільш трудомісткі обчислювальні процеси, а саме, процеси обчислення градієнтів $\nabla_p F(p_k, \beta, x_k) = b - A\left(x_s + A^T p_k - \beta c\right)_+$ та процеси розв'язування лінійних систем $M_k v = -\nabla_p F(p_k, \beta, x_k)$ при відшуканні напрямків v максимізації функціоналу F розподіляються на паралельні процеси, які допускають одночасну реалізацію на різних процесорах (ядрах).

Висновки. Для відшукання узагальненого розв'язку оптимізаційної задачі із алгебраїчними, диференціальними та інтегро-диференціальними підсистемами у роботі побудовано чисельні алгоритми із використанням субградієнтних та ньютонівських методів оптимізації. Доведено збіжність побудованих ітераційних алгоритмів до шуканого узагальненого розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Бейко І. В. Випукла апроксимація керованого процесу і метод побудови узагальнених оптимальних режимів / І. В. Бейко // Український математичний журнал. — 1973. — Т. XXV, вип. 3. — С. 343–346.
2. Бейко І. В. Функції оцінювання інформації в теорії оптимальних агрегованих моделей і оптимальних систем / І. В. Бейко // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 43–54.

3. Бейко І. В. Уніфікована методологія розв‘язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукання нових знань і прийняття оптимальних рішень (англійською мовою) / І. В. Бейко // Proc. "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment", AFCEA, Europe Seminar. — К., 1998. — P. 44–50.
4. Бейко І. В. Розвиток методів розв’язуючих та асимптотично-розв’язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей / І. В. Бейко // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — К., 2002. — Вип. 3. — С. 10–15.
5. Бейко І. В. Методи і алгоритми розв’язування задач оптимізації / І. В. Бейко, Б. М. Бублик, П. М. Зінько. — К. : Вища школа, 1983. — 512 с.
6. Бейко И. В. Численные методы решения задач оптимального управления / И. В. Бейко, М. Ф. Бейко. — К. : Знание, 1968. — 44 с.
7. Гаранжа В. А. Параллельная реализация метода ньютона для решения больших задач линейного программирования / В. А. Гаранжа, А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко, М. Х. Нгуен // Журн. вычисл. матем. и матем.физ. — 2009. — Т. 49, № 8. — С. 1369–1384.
8. Голиков А. И. Метод решения задач линейного программирования большой размерности / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 6. — С. 727–732.
9. Голиков А. И. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко, Н. Моллаверди // Журн. вычисл. матем. и матем.физ. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1564–1573.
10. Mangasarian O. L. A Newton Method for Linear Programming / O. L. Mangasarian // J. of Optimizat. Theory and Appl. — 2004. — V. 121. — P. 1–18.

In the paper numerical algorithms are designed for solving boundary optimization problems with generalized algebraic, differential, and integral-differential equations and inequalities. In cases of empty sets of the boundary problem solutions, the designed iterative algorithms compute generalized optimal solutions. Accelerated convergence is achieved by implementation of the Newton type iterates.

Key words: *boundary problems, control systems, general solutions, optimal control.*

Отримано: 12.03.2012