УДК 517.443

О. Ю. Тарновецька, викладач

Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА — ЕЙЛЕРА — БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній вісі з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра, Бесселя та Ейлера методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми. В технічних задачах тонкостінні елементи композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного (або силового) навантаження. Дослідження їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена ця робота, яка є логічним продовженням досліджень, виконаних в монографіях [1—3].

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2^+ = \{r\colon r \in (0,R_1)\bigcup(R_1,R_2)\bigcup(R_2,\infty)\}$ розв'язок системи диференціальних рівнянь Лежандра, Ейлера та Бесселя для модифікованих функцій

$$(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (0, R_1),$$

$$\left(B_{\alpha_1}^* - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2),$$

$$\left(B_{\nu,\alpha_2} - q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r),\ r \in (R_2, \infty) \qquad (1)$$

з умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,, j,k=1,2. \quad (2)$$

У рівностях (1) бере участь диференціальний оператор Лежандра [1] $\Lambda_\mu=\frac{d^2}{dr^2}+cthr\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r}+\frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right)$; диференціальний оператор Ейлера [4] $B_{\alpha_1}^{*}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_1^2$; диференціальний оператор Бесселя [2] $B_{\nu,\alpha_2}=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_2+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu^2-\alpha_2^2}{r^2}$. Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j>0$, $2\alpha_j+1>0$, $\nu\geq\alpha_2>-1/2$, $\mu_1\geq\mu_2\geq 0$, $c_{1k}c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}$, j, $k=1$, 2; $(\mu)=(\mu_1,\ \mu_2)$, $(\alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2)$.

Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Лежандра Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}-q_1^2)v=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\ r)$ та другого роду $L_{\nu_1}^{(\mu)}(ch\ r)$ [1], $\nu_1=-1/2+q_1$; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^{*}-q_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1-q_2}$ та $v_2=r^{-\alpha_1+q_2}$ [4]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_2}-q_3^2)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{\nu,\alpha_2}(q_3r)$ та другого роду $K_{\nu,\alpha_2}(q_1r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв’язків дозволяє побудувати розв’язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші [4; 5]:

$$u_1(r)=A_1P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)+\int_0^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)sh\rho d\rho\,,$$

$$u_2(r)=A_2r^{-\alpha_1-q_2}+B_2r^{-\alpha_1+q_2}+\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2^{*}(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho\,,$$

$$u_2(r)=B_3K_{\nu,\alpha_2}(q_3r)+\int_{R_2}^{\infty}E_3(r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho\,. \quad (3)$$

У рівностях (3) $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [2; 5]:

$$E_j\left(r,\rho\right)\Big|_{r=\rho+0}-E_j\left(r,\rho\right)\Big|_{r=\rho-0}=0,$$

$$\left.\frac{dE_j\left(r,\rho\right)}{dr}\right|_{r=\rho+0}-\left.\frac{dE_j\left(r,\rho\right)}{dr}\right|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \tag{4}$$

де $\varphi_1(r)=shr$, $\varphi_2(r)=r^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_3(r)=r^{2\alpha_2+1}$, $g_2^*(r)=r^{-2}g_2(r)$.

Безпосередньо перевіряється, що

$$E_1(r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_1)}{Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)}\begin{cases}P_{\nu_1}^{(\mu)}\left(chr\right)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}\left(chR_1,ch\rho\right), & 0<r<\rho<R_1,\\ P_{\nu_1}^{(\mu)}\left(ch\rho\right)F_{\nu_1;11}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right), & 0<\rho<r<R_1,\end{cases} \tag{5}$$

$$E_2\left(r,\rho\right)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_1;11}\left(q_2,R_1,R_2\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Psi_{\alpha_1;12}^{1*}\left(q_2,r\right)\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}\left(q_2,\rho\right), R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi_{\alpha_1;12}^{1*}\left(q_2,\rho\right)\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}\left(q_2,r\right), R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \tag{6}$$

$$E_3\left(r,\rho\right)=-\frac{q_3^{2\alpha_2}}{U_{\nu,\alpha_2;12}^{22}\left(q_3R_2\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3\rho\right)\Psi_{\nu,\alpha_2;12}^{2*}\left(q_3R_1,q_3r\right), & R_2<r<\rho<\infty,\\ K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right)\Psi_{\nu,\alpha_2;12}^{2*}\left(q_3R_1,q_3\rho\right), & R_2<\rho<r<\infty,\end{cases} \tag{7}$$

$$\Delta_{\alpha_1,jk}\left(q_2,R_1,R_2\right)=Z_{\alpha_1;j2}^{11}\left(q_2,R_1\right)Z_{\alpha_1;k1}^{22}\left(q_2,R_2\right)-$$

$$-Z_{\alpha_1;j2}^{12}\left(q_2,R_1\right)Z_{\alpha_1;k1}^{21}\left(q_2,R_2\right),\quad j,k=1,2.$$

Всі інші функції, які беруть участь в рівностях (5)—(7), загальноприйняті [3].

Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
&Z_{\nu_1;11}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)A_1-Z_{\alpha_1;12}^{11}\left(q_2,R_1\right)A_2-Z_{\alpha_1;12}^{12}\left(q_2,R_1\right)B_2=\omega_{11},\\
&Z_{\nu_1;21}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)A_1-Z_{\alpha_1;22}^{11}\left(q_2,R_1\right)A_2-Z_{\alpha_1;22}^{12}\left(q_2,R_1\right)B_2=\omega_{21}+G_{12},\\
&Z_{\alpha_1;11}^{21}\left(q_2,R_2\right)A_2+Z_{\alpha_1;11}^{22}\left(q_2,R_2\right)B_2-U_{\nu,\alpha_2;12}^{22}\left(q_3R_2\right)B_3=\omega_{12},\\
&Z_{\alpha_1;21}^{21}\left(q_2,R_2\right)A_2+Z_{\alpha_1;21}^{22}\left(q_2,R_2\right)B_2-U_{\nu,\alpha_2;22}^{22}\left(q_3R_2\right)B_3=\omega_{22}+G_{23}.
\end{aligned} \tag{8}$$

У системі (8) беруть участь функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{shR_1}\int_0^{R_1}\frac{P_{\nu_1}^{(\mu)}\left(ch\rho\right)}{Z_{\nu;11}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)}g_1(\rho)sh\rho d\rho\ +$$

$$+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}\left(q_2,\rho\right)}{\Delta_{\alpha_1;11}\left(q_2,R_1,R_2\right)}g_2^*(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$

$$G_{23}{=}-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}\left(q_2,\rho\right)}{\Delta_{\alpha_1;11}\left(q_2,R_1,R_2\right)}g_2^*(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$

$$+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{K^3_{\nu,\alpha_2}\left(q_3,\rho\right)}{U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3,R_2\right)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho.$$

Визначимо функції:

$$A_{(\mu),\alpha_1;j}(q)=Z^{(\mu),11}_{\nu_1;11}\left(chR_1\right)\Delta_{\alpha_1,2j}\left(q_2,R_1,R_2\right)-$$
$$Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}\left(chR_1\right)\Delta_{\alpha_1;1j}\left(q_2,R_1,R_2\right),$$

$$B_{\nu,(\alpha);j}(q){=}U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2\right)\Delta_{\alpha_1;j2}\left(q_2,R_1,R_2\right)-$$
$$U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2\right)\Delta_{\alpha_1;j1}\left(q_2,R_1,R_2\right),$$

$$\theta_{(\mu),\alpha_1;1}(r,q)=Z^{(\mu);11}_{\nu_1;11}\left(chR_1\right)\Psi^{1*}_{\alpha_1;22}\left(q_2,r\right)-$$
$$-Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}\left(chR_1\right)\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}\left(q_2,r\right),\ q{=}(q_1,q_2,q_3),$$

$$\theta_{\nu,(\alpha);2}(r,q){=}U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2\right)\Psi^{2*}_{\alpha_1;21}\left(q_2,r\right)-U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2\right)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}\left(q_2,r\right),$$
$$j{=}\ 1,2.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності крайової задачі (1), (2): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8)

$$\Delta_{\mu,(\alpha)}(q_1,q_2)\equiv A_{(\mu),\alpha_1;1}(q)U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2\right)-A_{(\mu),\alpha_1;2}(q)U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2\right)=$$
$$=Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}(chR_1)B_{\nu,(\alpha);1}(q)-Z^{(\mu);11}_{\nu_1;11}\left(chR_1\right)B_{\nu,(\alpha);2}(q)\neq 0. \qquad (9)$$

Визначимо головні розв’язки крайової задачі (1), (2):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\mu),(\alpha);11}(r,q)=-\frac{B_{\nu,(\alpha);2}(q)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\mu),(\alpha);21}(r,q)=\frac{B_{\nu,(\alpha);1}(q)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\mu),(\alpha);12}\left(r,q\right)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}\left(chr\right),$$

$$\mathcal{R}^{1}_{(\mu),(\alpha);22}(r,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}\left(chr\right),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\mu),(\alpha);11}(r,q)=-\frac{Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}\left(chR_1\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha);2}\left(r,q\right),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\mu),(\alpha);21}(r,q)=\frac{Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}\left(chR_1\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha);2}\left(r,q\right),\qquad(10)$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\mu),(\alpha);12}(r,q)=-\frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{(\mu),\alpha_1;1}\left(r,q\right),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{(\mu),(\alpha);22}(r,q)=\frac{U^{22}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{(\mu),\alpha_1;1}\left(r,q\right),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\mu),(\alpha);11}\left(r,q\right)=-\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}\left(chR_1\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\mu),(\alpha);21}\left(r,q\right)=\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{Z^{(\mu);11}_{\nu_1;11}\left(chR_1\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\mu),(\alpha);12}\left(r,q\right)=\frac{A_{(\mu),\alpha_1;2}(q)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right),$$

$$\mathcal{R}^{3}_{(\mu),(\alpha);22}\left(r,q\right)=-\frac{A_{(\mu),\alpha_1;1}(q)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right);$$

2) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(p)}\begin{cases}P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr)\Big[B_{\nu,(\alpha);1}(q)F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}\left(chR_1,ch\rho\right)-\\ \quad -B_{\nu,(\alpha);2}(q)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}\left(chR_1,ch\rho\right)\Big],\quad 0<r<\rho<R_1,\\ P^{(\mu)}_{\nu_1}(ch\rho)\Big[B_{\nu,(\alpha);1}(q)F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}\left(chR_1,chr\right)-\\ \quad -B_{\nu,(\alpha);2}(q)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}\left(chR_1,chr\right)\Big],\quad 0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);12}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{P^{(\mu)}_{\nu_1}\left(chr\right)}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,(\alpha);2}\left(\rho,q\right),$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);13}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}\left(chr\right)K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3\rho\right),$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);21}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{11}}{shR_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P_{\nu_1}^{(\mu)}\left(ch\rho\right)\theta_{\nu,(\alpha);2}(r,q)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);22}\left(p,r,\rho\right)=\frac{1}{2q_2\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\times$$

$$\times\begin{cases}\theta_{(\mu),\alpha_1;1}\left(r,q\right)\theta_{\nu,(\alpha);2}\left(\rho,q\right), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta_{(\mu),\alpha_1;1}\left(\rho,q\right)\theta_{\nu,(\alpha);2}\left(r,q\right), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);23}\left(p,r,\rho\right)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{(\mu),\alpha_1;1}\left(r,q\right)K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3\rho\right), \qquad (11)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);31}\left(r,\rho,q\right)=\frac{2q_2c_{11}c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}shR_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}P_{\nu_1}^{(\mu)}\left(ch\rho\right)K_{\nu,\alpha_2}(q_3r),$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);32}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\theta_{(\mu),\alpha_1;1}\left(\rho,q\right)K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right),$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);33}\left(r,\rho,q\right)=\frac{q_3^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)}\begin{cases}K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3\rho\right)\Big[A_{(\mu),\alpha_1;2}(q)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3r\right)-\\ K_{\nu,\alpha_2}\left(q_3r\right)\Big[A_{(\mu),\alpha_1;2}(q)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3\rho\right)-\end{cases}$$

$$-A_{(\mu),\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3r\right)\Big], \quad R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A_{(\mu),\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3\rho\right)\Big], \quad R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8) й підстановки одержаних значень A_1, A_2, B_2, B_3 у формули (3) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r)=\sum_{m,k=1}^{2}\mathcal{R}^{j}_{(\mu),(\alpha);mk}\left(r,q\right)\omega_{mk}+\int_0^{R_1}H_{(\mu),(\alpha);j1}\left(r,\rho,q\right)g_1(\rho)sh\rho d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);j2}\left(r,\rho,q\right)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+ \qquad (12)$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);j3}\left(r,\rho,q\right)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho.$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1), (2) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\mu),(\alpha)}=\theta(r)\theta\left(R_1-r\right)\Lambda_{(\mu)}+\theta\left(r-R_1\right)\theta\left(R_2-r\right)B^*_{\alpha_1}+\theta\left(r-R_2\right)B_{\nu,\alpha_2}. \quad (13)$$

Оператор $\mathcal{M}_{(\mu),\,(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r=\infty$ [3]. Отже, його спектр дійсний та неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає спектральна функція

$$V_{(\mu),(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{(\mu),(\alpha);1}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\mu),(\alpha);2}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{(\mu),(\alpha);3}(r,\beta). \qquad (14)$$

Функції $V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)$ є обмеженим на множині I_2^+ розв'язком сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Ейлера та Бесееля

$$\begin{aligned}
&(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)V_{(\mu),(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ r\in(0,R_1),\\
&(B^*_{\alpha_1}+b_2^2)V_{(\mu),(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\\
&(B_{\nu,\alpha_2}+b_3^2)V_{(\mu),(\alpha);3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty)
\end{aligned} \qquad (15)$$

з умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)V_{(\mu),(\alpha);k}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)V_{(\mu),(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0,$$
$$j,k=1,2, \qquad (16)$$

де $b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0, j=\overline{1,3}$.

Обмеженим на $(0,R_1)$ розв'язком диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)v=0$ є узагальнена приєднана функція Лежандра першого роду $P^{(\mu)}_{-1/2+ib_1}(chr)\equiv P^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr)$, $\nu_1^*=-1/2+ib_1(\beta)$ [1]. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1}+b_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_2}+b_3^2)v_1=0$ утворюють функції $J_{\nu,\alpha_2}(b_3r)$ та $N_{\nu,\alpha_2}(b_3r)$ [2].

Якщо покласти

$$V_{(\mu),(\alpha);1}(r,\beta)=A_1P^{(\mu)}_{\nu_1^*}(chr),$$
$$V_{(\mu),(\alpha);2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r),$$
$$V_{(\mu),(\alpha);3}(r,\beta)=A_3J_{\nu,\alpha_2}(b_3r)+B_3N_{\nu,\alpha_2}(b_3r), \qquad (17)$$

то умови спряження (16) для визначення величин A_j ($j=\overline{1,3}$) та B_k ($k=1,2$) дають однорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Y^{11}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)A_2+Y^{12}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)B_2=A_1Z^{(\mu);11}_{\nu_1^*;j1}(chR_1),\ j=1,2, \qquad (18)$$
$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)A_3+u^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)B_3=Y^{21}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)B_2.$$

У припущенні, що A_1 — довільна невідома, маємо дві алгебраїчні системи по два рівняння в кожній.

При $A_1 = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{c_{21}b_{2n}c_{22}}{R_1^{2\alpha_1+1}b_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}} \neq 0$ послідовно знаходимо величини A_j та B_j (j = 2, 3), підстановка яких у рівності (17) дає структуру функцій $V_{(\mu),(\alpha);\, j}(r, \beta)$:

$$V_{(\mu),(\alpha);\,1}(r, \beta) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{21}b_{2n}c_{22}}{R_1^{2\alpha_1+1}b_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\; P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr),$$

$$V_{(m),(a);\,2}\left(r,b\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{b_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\left[Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)\Psi_{\alpha_1;22}^{1}\left(b_2,r\right)-Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)\Psi_{\alpha_1;12}^{1}\left(b_2,r\right)\right], \quad (19)$$

$$V_{(\mu),(\alpha);\,3}(r, \beta) = \omega_{(\mu),(\alpha);\,1}(\beta)\, N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r) - \omega_{(\mu),(\alpha);\,2}(\beta)\, J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r)$$

У рівностях (19) беруть участь функції:

$$\Psi_{\alpha_1;j2}^{1}\left(b_2,r\right)=Y_{\alpha_1;j2}^{12}\left(b_2,R_1\right)r^{\alpha_1}\cos\left(b_2\ln r\right)-Y_{\alpha_1;j2}^{11}\left(b_2,R_1\right)r^{\alpha_1}\sin\left(b_2\ln r\right),$$

$$a_{(\mu),\alpha_1;j}(\beta)=Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)\delta_{\alpha_1;1j}\left(b_2,R_1,R_2\right)-Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)\delta_{\alpha_1;2j}\left(b_2,R_1,R_2\right)`,$$

$$\delta_{\alpha_1;kj}=Y_{\alpha_1;k2}^{11}\left(b_2,R_1\right)Y_{\alpha_1;j1}^{22}\left(b_2,R_2\right)-Y_{\alpha_1;k2}^{12}\left(b_2,R_1\right)Y_{\alpha_1;j1}^{21}\left(b_2,R_2\right),\ j=1,\,2,$$

$$\omega_{(\mu),(\alpha);\,j}(\beta)=a_{(\mu),\alpha_1;2}(\beta)u_{\nu,\alpha_2;12}^{2j}\left(b_3R_2\right)-a_{(\mu),\alpha_1;21}(\beta)u_{\nu,\alpha_2;22}^{2j}\left(b_3R_2\right).$$

Визначимо величини

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{shR_1}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\sigma_3=1,$$

вагову функцію

$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 \mathrm{sh}\, r + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2\, r^{2\alpha_1-1} + \theta(r - R_2)\,\sigma_2\, r^{2\alpha_2+1}$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\mu),\,(\alpha)}(\beta) = \beta b_3^{2\alpha_2}\ ([\omega_{(\mu),\,(\alpha);\,1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\mu),(\alpha);\,2}(\beta)]^2)^{-1}.$$

Наявність спектральної функції $V_{(\mu),(\alpha)}(r, \beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\mu),\,(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\mu),(\alpha)}$ та обернене $H_{(\mu),(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),(\alpha)}$ [3]:

$$H_{(\mu),(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int_{R_0}^{\infty}g(r)V_{(\mu),(\alpha)}\left(r,\beta\right)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \quad (20)$$

$$H_{(\mu),(\alpha)}^{-1}\left[\tilde{g}(\beta)\right]=\int_{0}^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_{(\mu),(\alpha)}\left(r,\beta\right)\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r), \quad (21)$$

де вектор-функція $g(r) = \{g_1(r);\ g_2(r);\ g_3(r)\}$ належить області визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),(\alpha)}$. При цьому має місце основна тотожність гібридного інтегрального перетворення ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),(\alpha)}$:

$$H_{(\mu),(\alpha)}\left[\mathcal{M}_{(\mu),(\alpha)}\left[g(r)\right]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \left[\sum_{m=1}^{3}k_m^2\tilde{g}_m(\beta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{2}h_k\left[Z^k_{(\mu),(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{(\mu),(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}\right]\right]. \qquad (22)$$

У рівності (22) прийняті позначення:

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r)V_{(\mu),(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 shr dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{(\mu),(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{(\mu),(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr,\ h_1 = \frac{\sigma_1 shR_1}{c_{11}},\ h_2 = \frac{\sigma_2 R_2^{2\alpha_1+1}}{c_{12}},$$

$$Z^k_{(\mu),(\alpha);i2}(\beta) = \left(\alpha^k_{i2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{i2}\right)V_{(\mu),(\alpha);k+1}(r,\beta)\bigg|_{r=R_k},\ i = 1,2,\ k = 1,2.$$

Єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), побудований методом запровадженого формулами (20), (21) гібридного інтегрального перетворення за відомою логічною схемою [3], має структуру:

$$u_j(r) = \int_0^{R_1}\left(\int_0^{\infty}\frac{V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\mu),(\alpha);1}(\rho,\beta)}{(\beta^2+q^2)}\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)d\beta\right)g_1(\rho)\sigma_1 sh\rho d\rho +$$
$$+ \int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^{\infty}V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\mu),(\alpha);2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\right)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_1-1}d\rho +$$
$$+ \int_{R_2}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\mu),(\alpha);3}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\right)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho + \qquad (23)$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}h_k\left[\int_0^{\infty}Z^k_{(\mu),(\alpha);12}(\beta)V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\,\omega_{2k} - \right.$$
$$\left. - \int_0^{\infty}Z^k_{(\mu),(\alpha);22}(\beta)V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\,\omega_{1k}\right],\ j = \overline{1,3},$$

де $q^2 = \max\{q_1^2;\ q_2^2;\ q_3^2\}$.

Порівнюючи розв'язки (12) та (23) в силу теореми єдиності, одержуємо формули обчислення невласних інтегралів:

$$\int_0^\infty V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\mu),(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta = \frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);jk}(r,\rho,q),$$

$$j,k=\overline{1,3}, \tag{24}$$

$$\int_0^\infty Z^k_{(\mu),(\alpha);12}(\beta)V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta = \frac{1}{h_k}\mathcal{R}^j_{(\mu),(\alpha);2k}(r,q),$$

$$k=1,2,\ j=\overline{1,3}, \tag{25}$$

$$\int_0^\infty Z^k_{(\mu),(\alpha);22}(\beta)V_{(\mu),(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta = -\frac{1}{h_k}\mathcal{R}^j_{(\mu),(\alpha);1k}(r,q),$$

$$k=1,2,\ j=\overline{1,3}. \tag{26}$$

Функції впливу $\mathcal{H}_{(\mu),(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (11), функції Гріна $\mathcal{R}^j_{(\mu),(\alpha);nk}(r,q)$ — формулами (10).

Якщо $q^2 = q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2$. У цьому випадку $b_1=\beta$, $b_2=(\beta^2+q_1^2-q_2^2)^{1/2}$, $b_3=(\beta^2+q_1^2-q_3^2)^{1/2}$.

Якщо $q^2 = q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2 \ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2 \ge 0$. У цьому випадку $b_1=(\beta^2+q_2^2-q_1^2)^{1/2}$, $b_2=\beta$, $b_3=(\beta^2+q_2^2-q_3^2)^{1/2}$.

Якщо $q^2 = q_3^2$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2 \ge 0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2 \ge 0$, $k_3^2=0$. У цьому випадку $b_1=(\beta^2+q_3^2-q_1^2)^{1/2}$, $b_2=(\beta^2+q_3^2-q_2^2)^{1/2}$, $b_3=\beta$.

Підсумком викладеного вище є твердження.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];\ B^*_{\alpha_1}[g_2(r)];\ B_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+, функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) та має місце умова (9) однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2), то справджуються формули (24)—(26) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),(\alpha)}$, визначеного рівністю (13).

Висновок. Результати статті поповнюють довідкову математичну літературу й можуть бути використані при обчисленні невласних інтегралів за власними елементами ГДО , які з'являються при моделюванні фізико-технічних процесів у відповідних неоднорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.

2. Ленюк М. П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2005. — Т. 5. — 368 с.
3. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економічна думка, 2004. — Ч. 1. — 368 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

By the method of comparison of decisions, built on the arctic landmark with the two point of interface for the separate system of differential equalizations of Lezhandra, Bessel and Euler by the method of functions Koshi and by the method of the proper hybrid integral transformation, polyparametric family of known integrals is calculated.

Key words: *Not own integrals, functions Koshi, the main decisions, hybrid integrated transformation, the basic identity, condition of unequivocal resolvabitili, the logic scheme.*

Отримано: 05.06.2011

УДК 519.21

Я. М. Чабанюк, д-р фіз.-мат. наук,
С. А. Семенюк, аспірант

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів

STOCHASTIC APPROXIMATION PROCEDURE WITH IMPULSIVE MARKOV PERTURBATIONS

In this paper we discuss asymptotic behavior of the stochastic approximation procedure in case when the regression function is perturbed by the Markov impulsive process. Also we consider the stochastic approximation procedure stability conditions in the terms of existence of Lyapunov's function for the averaged evolution system.

Key words: *stochastic approximation procedure, Markov process, impulsive perturbation.*

Introduction. The goal of the Robbins-Monro Stochastic Approximation Procedure (SAP) [1] is to find the solution of the equation $C(u) = 0$ in the case when the measurements of regression function $C(u)$ are made with some errors. It is widely used in the mathematical statistics [2], control theory, image, signal and voice recognition theory [3], etc.

Let us consider the situation when estimated function errors are defined by impulsive process. Then the continuous SAP is defined by the differential equation

