4. Литвин О.М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О. М. Литвин, В. Л. Рвачов. — К. : Наук. думка, 1973 — 122 с.
5. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Попов. — К. : Наук. думка, 1989. — 272 с.
6. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering / R. A. De Vore. — 1983. — Vol. 41. — P. 29—45.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. — Х. : Основа, 2002. — 544 с.
8. Литвин О. М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 122—131.

In paper it is constructed explosive approximating linear spline which factors are a method of least squares, for approach of function of one variable with possible ruptures of the first sort in the set knots. And the constructed explosive splines include, as a special case, classical continuous splines of the first degree.

Key words: *explosive functions, explosive spline, approximation.*

Отримано: 26.04.2011

УДК 517.91:532.26

Т. М. Пилипюк, викладач

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ — ЛЕЖАНДРА — ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя — Лежандра — Фур'є на полярній осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в умовах спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Коші, функції впливу, спектральна функція, вагова функція, спектральна щільність, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткованих в роботі [1]. Основні положення теорії ГІП закладено в роботі [2]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП із спектральним параметром в умовах спряження.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r) a_1^2 B_{\upsilon,\alpha} + \\ +\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_2) a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}, \tag{1}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3]; $a_j^2 > 0, (j = \overline{1,3})$.

У рівності (1) $\frac{d^2}{dr^2}$ — диференціальний оператор Фур'є [4], $B_{\upsilon,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\upsilon^2 - \alpha^2}{r^2}$ — диференціальний оператор Бесселя [5]; $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr}\right)$ — узагальнений диференціальний оператор Лежандра [6]; $\upsilon \geq \alpha > -\frac{1}{2}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. Областю задання ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\upsilon,\alpha}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r = R_k} = 0, \quad j, k = 1, 2; \tag{2}$$

3) існують такі числа γ_1 та γ_2, що мають місце умови обмеження

$$\lim_{r \to 0}\left[r^{\gamma_1} g_1(r)\right] = 0, \ \lim_{r \to \infty}\left[r^{\gamma_2} g_3(r)\right] = 0. \tag{3}$$

У рівностях (2) беруть участь коефіцієнти

$$\tilde{\alpha}_{jm}^{k} = \alpha_{jm}^{k} - \delta_{jm}^{k}\left(\beta^2+\gamma^2\right),\;\; \tilde{\beta}_{jm}^{k} = \beta_{jm}^{k} - \gamma_{jm}^{k}\left(\beta^2+\gamma^2\right);\;\; \gamma^2 \ge 0\,;$$

β — спектральний параметр.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^{k} \ge 0$, $\delta_{jm}^{k} \ge 0$, $\beta_{jm}^{k} \ge 0$, $\gamma_{jm}^{k} \ge 0$; $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k} - \alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}$; $c_{j2,k} = \delta_{2j}^{k}\gamma_{1j}^{k} - \delta_{1j}^{k}\gamma_{2j}^{k} = 0$; $c_{11,k}\cdot c_{21,k} > 0$, $\alpha_{1j}^{k}\gamma_{2j}^{k} - \alpha_{2j}^{k}\gamma_{1j}^{k} = \beta_{1j}^{k}\delta_{2j}^{k} - \beta_{2j}^{k}\delta_{1j}^{k}$; $j,m,k = 1,2$.

Для $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ із умов спряження випливає базова тотожність:

$$\begin{aligned}&\left[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \\ &= \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right]\Big|_{r=R_k}.\end{aligned} \tag{4}$$

Визначимо величини

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}},\;\; a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{1}{shR_2},\;\; a_3^2\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta\left(R_1-r\right)\sigma_1 r^{2\alpha+1} + \theta\left(r-R_1\right)\theta\left(R_2-r\right)\sigma_2 shr + \theta\left(r-R_2\right)\sigma_3 \tag{5}$$

та скалярний добуток

$$\begin{aligned}\left(u(r),v(r)\right) &= \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha+1}dr + \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr.\end{aligned} \tag{6}$$

Якщо в (6) замінити $u(r)$ на $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}\left[u(r)\right]$, проінтегрувати під знаком інтегралів два рази частинами, скористатися базовою тотожністю (4) та структурою $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, то встановимо рівність

$$\left(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u],v\right) = \left(u, M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[v]\right). \tag{7}$$

Рівність (7) означає, що ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ є самоспряжений. Отже, його спектр дійсний. Оскільки на множині I_2^+ ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ має одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр неперервний [2]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$\begin{aligned}V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) &= \theta(r)\theta\left(R_1-r\right)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) + \theta\left(r-R_1\right)\times \\ &\times\theta\left(R_2-r\right)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) + \theta\left(r-R_2\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta).\end{aligned} \tag{8}$$

При цьому функції $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B_{\upsilon,\alpha}+b_1^2\right)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)=0,\ r\in\left(0,R_1\right),$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)=0,\ r\in\left(R_1,R_2\right), \tag{9}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)=0,\ r\in\left(R_2,\infty\right),$$

умови спряження (2) та умови обмеження (3); $b_j^2=a_j^{-2}\left(\beta^2+k_j^2\right)$, $k_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha}+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції Бесселя $J_{\upsilon,\alpha}(b_1r)$ та $N_{\upsilon,\alpha}(b_1r)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)v=0$ складають дві дійсні функції $A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_2^*=-1/2+ib_2(\beta)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)v=0$ утворюють тригонометричні функції $v_1=\cos b_3r$ та $v_2=\sin b_3r$ [4].

Якщо в силу лінійності задачі (9), (2), (3) покласти

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)=A_1J_{\upsilon,\alpha}\left(b_1r\right)+B_1N_{\upsilon,\alpha}\left(b_1r\right),\ r\in\left(0,R_1\right),$$
$$V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)=A_2A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)+B_2B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr), r\in\left(R_1,R_2\right), \tag{10}$$
$$V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)=A_3\cos b_3r+B_3\sin b_3r, r\in\left(R_2,\infty\right),$$

то умова обмеження в точці $r=0$ вимагає, щоб $B_1=0$. Умови спряження (2) для визначення величин $A_j\,(j=\overline{1,3})$ та $B_k\,(k=2,3)$ дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$u_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}\left(b_1R_1\right)A_1-Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)A_2-Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu);12}\left(chR_1\right)B_2=0, j=1,2; \tag{11}$$
$$Y_{\upsilon_2^*;j1}^{(\mu);21}\left(chR_2\right)A_2+Y_{\upsilon_2^*;j1}^{(\mu);22}\left(chR_2\right)B_2-v_{j2}^{21}\left(b_3R_2\right)A_3-v_{j2}^{22}\left(b_3R_2\right)B_3=0.$$

Алгебраїчна система (11) завжди сумісна [7].

При $A_1\neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2:

$$Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)A_2+Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu);12}\left(chR_1\right)B_2=A_1u_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}\left(b_1R_1\right). \tag{12}$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$q_{(\mu)}(b_2) \equiv Y^{(\mu);11}_{\upsilon_2^*;12}(chR_1)Y^{(\mu);12}_{\upsilon_2^*;22}(chR_1) -$$

$$-Y^{(\mu);11}_{\upsilon_2^*;22}(chR_1)Y^{(\mu);12}_{\upsilon_2^*;12}(chR_1) = \frac{c_{11,2}}{S_{(\mu)}(b_2)shR_1} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (12) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_2 = \frac{A_1}{q_{(\mu)}(b_2)}\left[u^{11}_{\upsilon,\alpha;11}\left(b_1R_1\right)Y^{(\mu);12}_{\upsilon_2^*;22}\left(chR_1\right) - u^{11}_{\upsilon,\alpha;21}\left(b_1R_1\right)Y^{(\mu);12}_{\upsilon_2^*;12}\left(chR_1\right)\right],$$

$$B_2 = \frac{A_1}{q_{(\mu)}(b_2)}\left[u^{11}_{\upsilon,\alpha;21}\left(b_1R_1\right)Y^{(\mu);11}_{\upsilon_2^*;12}\left(chR_1\right) - u^{11}_{\upsilon,\alpha;11}\left(b_1R_1\right)Y^{(\mu);11}_{\upsilon_2^*;22}\left(chR_1\right)\right]. \qquad (13)$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$v^{21}_{j2}\left(b_3R_2\right)A_3 + v^{22}_{j2}\left(b_3R_2\right)B_3 = A_1\left[q_{(\mu)}(b_2)\right]^{-1} a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(\beta),\ j = 1,2. \qquad (14)$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$q_2(b_3) \equiv v^{21}_{12}\left(b_3R_2\right)v^{22}_{22}\left(b_3R_2\right) - v^{21}_{22}\left(b_3R_2\right)v^{22}_{12}\left(b_3R_2\right) = c_{21,2}b_3 \neq 0\,.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_3 = \omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\beta),\quad B_3 = -\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\beta),\quad A_1 = q_{(\mu)}(b_2)q_2(b_3) > 0\,; \qquad (15)$$

$$\omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(\beta) = a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)v^{2j}_{22}\left(b_3R_2\right) - a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)v^{2j}_{12}\left(b_3R_2\right),\quad j = 1,2\,.$$

У рівностях (14) беруть участь функції:

$$\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;jk}\left(chR_1, chR_2\right) = Y^{(\mu);11}_{\upsilon_2^*;j2}\left(chR_1\right)Y^{(\mu);22}_{\upsilon_2^*;k1}\left(chR_2\right) -$$

$$-Y^{(\mu);12}_{\upsilon_2^*;j2}\left(chR_1\right)Y^{(\mu);21}_{\upsilon_2^*;k1}\left(chR_2\right);\quad j,k = 1,2;$$

$$a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(\beta) = u^{11}_{\upsilon,\alpha;21}\left(b_1R_1\right)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;1j}\left(chR_1, chR_2\right) - u^{11}_{\upsilon,\alpha;11}(b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;2j}\left(chR_1, chR_2\right).$$

Підставимо визначені формулами (13) та (15) величини A_j й B_k в рівності (10). Одержимо функції

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(r,\beta) = q_{(\mu)}(b_2)q_2(b_3)J_{\upsilon,\alpha}(b_1r)\,,$$

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,\beta) = q_2(b_3)\left[u^{11}_{\upsilon,\alpha;21}\left(b_1R_1\right)f^{(\mu),1}_{\upsilon_2^*;12}\left(chR_1, chr\right) -\right.$$

$$\left. -u^{11}_{\upsilon,\alpha;11}\left(b_1R_1\right)f^{(\mu),1}_{\upsilon_2^*;22}\left(chR_1, chr\right)\right], \qquad (16)$$

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}(r,\beta) = \omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\beta)\cos b_3r - \omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(\beta)\sin b_3r\,.$$

Згідно правила (8) спектральна вектор-функції $V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(r,\beta)$ стає відомою.

Введемо до розгляду спектральну щільність

$$\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)=\beta\left[b_3(\beta)\right]^{-1}\left(\left[\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)\right]^2\right)^{-1}. \qquad (17)$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)$ та спектральної щільності $\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)$ дозволяє запровадити пряме $H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\upsilon,\alpha}^{-(\mu)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (1) [8]: для $g(r)\in G$

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[g(r)\right]=\int_0^\infty g(r)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta)\,, \qquad (18)$$

$$H_{\upsilon,\alpha}^{-(\mu)}\left[\tilde{g}(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\equiv g(r)\,. \qquad (19)$$

Математичним обґрунтуванням правил (18), (19) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо функція

$$f(r)=\left[\theta(r)\theta\left(R_1-r\right)r^{\alpha_{1/2}}+\theta\left(r-R_1\right)\theta\left(R_2-r\right)\sqrt{shr}+\theta\left(r-R_2\right)\cdot 1\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)\left(\int_0^\infty g(\rho)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left(\rho,\beta\right)\sigma(\rho)d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\,. \qquad (20)$$

Доведення теореми здійснимо методом дельта-подібної послідовності — ядро Коші: фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для сепаратної системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу [9], породженої ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$.

Побудуємо обмежений в області $D_2^+=\left\{(t,r):\ t\in(0,\infty);\ r\in I_2^+\right\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [9]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B_{\upsilon,\alpha}[u_1]=0,\ \ r\in\left(0,R_1\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}[u_2]=0,\ \ r\in\left(R_1,R_2\right), \qquad (21)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2\,\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}=0,\ \ r\in\left(R_2,\infty\right)$$

з початковими умовами

$$u_j\left(t,r\right)\big|_{t=0}=g_j(r),\ \ r\in I_2^+,\ \ j=\overline{1,3} \qquad (22)$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_k(t,r)-\right.$$
$$\left.-\left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_k}=0,\quad j,k=1,2. \tag{23}$$

Припустимо, що вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом стосовно t [10]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (21)—(23) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя, Лежандра та Фур'є для модифікованих функцій

$$\left(B_{\upsilon,\alpha}-q_1^2\right)u_1^*(p,r)=-\overline{g}_1(r),\ r\in\left(0,R_1\right),$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)u_2^*(p,r)=-\overline{g}_2(r),\ r\in\left(R_1,R_2\right), \tag{24}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)u_3^*(p,r)=-\overline{g}_3(r),\ r\in\left(R_2,\infty\right)$$

з умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p,r)-\left(\overline{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\psi_{jk}, \tag{25}$$
$$j,k=1,2.$$

У рівностях (24), (25) $\overline{g}_j=a_j^{-2}g_j(r)$, $q_j=a_j^{-1}(p+\gamma_j^2)^{1/2}$, $\operatorname{Re}q_j>0$;

$$\overline{\alpha}_{jm}^k=\alpha_{jm}^k+\delta_{jm}^k p,\qquad \overline{\beta}_{jm}^k=\beta_{jm}^k+\gamma_{jm}^k p,\qquad u_j^*(p,r)=\int_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dp,$$

$$\psi_{jk}=\delta_{j1}^k g_k'\left(R_k\right)+\gamma_{j1}^k g_k\left(R_k\right)-\left[\delta_{j2}^k g_{k+1}'\left(R_k\right)+\gamma_{j2}^k g_{k+1}\left(R_k\right)\right],\ j,k=1,2.$$

Можна в подальшому вважати: що числа $\psi_{jk}=0$. Якщо це не так, то переходимо до нових початкових даних $\overline{g}_1=g_1(r)-b_1$, $\overline{g}_2=g_2(r)-\left(a_2r+b_2\right)$, $\overline{g}_3=g_3(r)-b_3$ і числа b_1,b_2,b_3 та a_2 знаходимо із алгебраїчної системи

$$\left(\gamma_{j1}^k R_k+\delta_{j1}^k\right)a_k+\gamma_{j1}^k b_k-\left[\left(\gamma_{j2}^k R_k+\delta_{j2}^k\right)a_{k+1}+\gamma_{j2}^k b_{k+1}\right]=\psi_{jk},\ j,k=1,2, \tag{26}$$

де apriori $a_1=a_3=0$.

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (26) має єдиний розв'язок, який можна одержати або методом Гауса або за правилами Крамера [7].

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha} - q_1^2\right)v = 0$ складають модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{\upsilon,\alpha}(q_1 r)$ та 2-го роду $K_{\upsilon,\alpha}(q_1 r)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right)v = 0$ складають узагальнені приєднані функції Лежандра 1-го роду $P_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr)$ та 2-го роду $L_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\dfrac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \exp[-q_3(r - R_2)]$ та $v_2 = \exp[q_3(r - R_2)]$ [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (24), (25) методом функцій Коші [3; 4]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1 r\right) + \int_0^{R_1} E_1^*\left(p,r,\rho\right)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 P_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 L_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr) + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*\left(p,r,\rho\right)\overline{g}_2(\rho) sh\rho d\rho, \quad (27)$$

$$u_3^*\left(p,r\right) = B_3 e^{-q_3(r-R_2)} + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*\left(p,r,\rho\right)\overline{g}_3(\rho)d\rho.$$

Тут $E_j^*(p,r,\rho)$ — функції Коші [3,4]:

$$E_1^*\left(p,r,\rho\right) = \frac{q_1^{2\alpha}}{U_{\upsilon,\alpha;11}^{11}\left(q_1 R_1\right)}\begin{cases} I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1 r\right)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{1*}\left(q_1 R_1, q_1\rho\right), & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1\rho\right)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{1*}\left(q_1 R_1, q_1 r\right), & 0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \quad (28)$$

$$E_2^*(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right)} \times$$

$$\times\begin{cases} F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1, chr\right)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_2, ch\rho\right), R_1 < r < \rho < R_2, \\ F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1, ch\rho\right)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_2, chr\right), R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \quad (29)$$

$$E_3^*\left(p,r,\rho\right) = \frac{1}{q_3\left(\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2\right)} \times$$

$$\times\begin{cases} e^{-q_3(\rho-R_2)}\Phi_{12}^2\left(q_3 R_2, q_3 r\right), & R_2 < r < \rho < \infty, \\ e^{-q_3(r-R_2)}\Phi_{12}^2\left(q_3 R_2, q_3\rho\right), & R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \quad (30)$$

Функції, які беруть участь в рівностях (28)—(30) загальновідомі.

Умови спряження (25) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$U_{\upsilon,\alpha;j1}^{11}\left(q_1R_1\right)A_1 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)A_2 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);12}\left(chR_1\right)B_2 = \delta_{j2}G_{12}^{*},\quad j=1,2\,;$$

$$Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu);21}\left(chR_2\right)A_2 + Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu);22}\left(chR_2\right)B_2 + \left(\overline{\alpha}_{j2}^2 q_3 - \overline{\beta}_{j2}^2\right)B_3 = \delta_{j2}G_{23}^{*}. \quad (31)$$

У системі (31) беруть участь функції

$$G_{12}^{*} = \frac{c_{11}^{*}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\upsilon,\alpha}(q_1\rho)}{U_{\upsilon,\alpha;11}^{11}\left(q_1R_1\right)}\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho -$$

$$-\frac{c_{21}^{*}}{shR_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_2, ch\rho\right)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right)}\overline{g}_2(\rho)sh\rho d\rho,$$

$$G_{23}^{*} = \frac{c_{12}^{*}(p)}{shR_2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1, ch\rho\right)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right)}\overline{g}_2(\rho)sh\rho d\rho -$$

$$-c_{22}^{*}(p)\int_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2}\overline{g}_3(\rho)d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12}=0$, $\delta_{22}=1$).

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(p) = U_{\upsilon,\alpha;11}^{11}\left(q_1R_1\right)\Delta_{\upsilon_2;2j}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right) - U_{\upsilon,\alpha;21}^{11}\left(q_1R_1\right)\Delta_{\upsilon_2;1j}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right),$$

$$B_{(\mu);j}(p) = \left(\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2\right)\Delta_{\upsilon_2;j2}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right) - \left(\overline{\alpha}_{22}^2 q_3 - \overline{\beta}_{22}^2\right)\Delta_{\upsilon_2;j1}^{(\mu)}\left(chR_1, chR_2\right),$$

$$\Theta_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,p) = U_{\upsilon,\alpha;11}^{11}\left(q_1R_1\right)F_{\upsilon_2;22}^{(\mu);1}\left(chR_1, chr\right) - U_{\upsilon,\alpha;21}^{12}\left(q_1R_1\right)F_{\upsilon_2;12}^{(\mu);1}\left(chR_1, chr\right),$$

$$\Theta_{(\mu);2}(r,p) = \left(\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2\right)F_{\upsilon_2;21}^{(\mu);2}\left(chR_2, chr\right) - \left(\overline{\alpha}_{22}^2 q_3 - \overline{\beta}_{22}^2\right)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu);2}\left(chR_2, chr\right).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для $p = \sigma + is$ із $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 — абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im} p = s \in (-\infty, +\infty)$ визначник алгебраїчної системи (31)

$$\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p) \equiv U_{\upsilon,\alpha;11}^{11}\left(q_1R_1\right)B_{(\mu);2}(p) - U_{\upsilon,\alpha;21}^{11}\left(q_1R_1\right)B_{(\mu);1}(p) =$$
$$= \left(\overline{\alpha}_{12}^2 q_3 - \overline{\beta}_{12}^2\right)A_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(p) - \left(\overline{\alpha}_{22}^2 q_3 - \overline{\beta}_{22}^2\right)A_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(p) \neq 0. \quad (32)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (24) функції впливу:

$$H_{\upsilon,\alpha;11}^{(\mu)*}\left(p,r,\rho\right) = \frac{q_1^{2\alpha}}{\Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p)}\begin{cases} I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1r\right)\Big[B_{(\mu);2}(p)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{1*}\left(q_1R_1, q_1\rho\right) - \\ I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1\rho\right)\Big[B_{(\mu);2}(p)\Psi_{\upsilon,\alpha;11}^{1*}\left(q_1R_1, q_1r\right) - \end{cases}$$

$$-B_{(\mu);1}(p)\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;21}\left(q_1R_1,q_1\rho\right)\Big],\ 0<r<\rho<R_1,$$

$$-B_{(\mu);1}(p)\Psi^{1*}_{\upsilon,\alpha;21}\left(q_1R_1,q_1r\right)\Big],\ 0<\rho<r<R_1,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;12}\left(p,r,\rho\right)=\frac{\overset{*}{c}_{21}(p)}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1r\right)\Theta_{(\mu);2}\left(\rho,p\right),$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;13}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{\overset{*}{c}_{21}\overset{*}{c}_{22}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1r\right)e^{-q_3\left(\rho-R_2\right)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;21}\left(p,r,\rho\right)=\frac{\overset{*}{c}_{11}(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}I_{\upsilon,\alpha}\left(q_1\rho\right)\Theta_{(\mu);2}\left(r,p\right), \qquad (33)$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;22}\left(p,r,\rho\right)=\frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(r,p\right)\Theta_{(\mu);2}\left(\rho,p\right),\ R_1<r<\rho<R_2,\\ \Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(\rho,p\right)\Theta_{(\mu);2}\left(r,p\right),\ R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;23}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{\overset{*}{c}_{22}(p)}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(r,p\right)e^{-q_3\left(\rho-R_2\right)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;31}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{\overset{*}{c}_{11}(p)\overset{*}{c}_{12}(p)}{R_1^{2\alpha+1}B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}I_{\upsilon,\alpha}(q_1\rho)e^{-q_3\left(r-R_2\right)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;32}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{\overset{*}{c}_{12}(p)}{shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(\rho,p\right)e^{-q_3\left(r-R_2\right)},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;33}\left(p,r,\rho\right)=\frac{1}{q_3\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}e^{-q_3\left(\rho-R_2\right)}\Big[A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(p)\Phi^2_{12}\left(q_3R_2,q_3r\right)-\\ e^{-q_3\left(r-R_2\right)}\Big[A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(p)\Phi^2_{12}\left(q_3R_2,q_3\rho\right)-\end{cases}$$

$$-A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(p)\Phi^2_{22}\left(q_3R_2,q_3r\right)\Big],\ R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(p)\Phi^2_{22}\left(q_3R_2,q_3\rho\right)\Big],\ R_2<\rho<r<\infty.$$

Підставивши визначені із алгебраїчної системи (31) величини A_1, A_2, B_2, B_3 у формули (27), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (24), (25):

$$u_j^*\left(p,r\right)=\int_0^{R_1}H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;j1}\left(p,r,\rho\right)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;j2}\left(p,r,\rho\right)\overline{g}_2(\rho)sh\rho d\rho+\int_{R_2}^{\infty}H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;j3}\left(p,r,\rho\right)\overline{g}_3(\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}. \qquad (34)$$

Повертаючись у формулах (34) до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (21)—(23):

$$u_j(t,r)=\int_0^{R_1} H_{\upsilon,\alpha;j1}^{(\mu)}\left(t,r,\rho\right)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} H_{\upsilon,\alpha;j2}^{(\mu)}\left(t,r,\rho\right)\overline{g}_2(\rho)sh\rho d\rho+\int_{R_2}^{\infty} H_{\upsilon,\alpha;j3}^{(\mu)}\left(t,r,\rho\right)\overline{g}_3(\rho)d\rho,\quad j=\overline{1,3}. \tag{35}$$

У рівностях (35) за означенням [10]

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}\left(t,r,\rho\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}\left(p,r,\rho\right)e^{pt}d\rho,\quad j,k=\overline{1,3}. \tag{36}$$

Особливими точками функцій впливу $H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}\left(p,r,\rho\right)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ $(j=\overline{1,3})$ та $p=\infty$. Метод контурного інтегралу в поєднанні з лемою Жордана та теоремою Коші [10] приводить формули (36) до розрахункових:

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\,\mathrm{Im}\left[H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}\left(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho\right)\right]\beta d\beta;$$
$$j,k=\overline{1,3}. \tag{37}$$

Тут $\mathrm{Im}(\cdots)$ означає уявну частину виразу $(\cdots)$, $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$.

Виконавши зазначені у формулах (37) операції, знаходимо, що

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\upsilon,\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2;$$
$$j,k=\overline{1,3}. \tag{38}$$

Розв'язок (35) даної параболічної задачі набуває вигляду:

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times\left(\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha+1}d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta+ \tag{39}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2 sh\rho d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3 d\rho\right)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3}.$$

Внаслідок початкових умов та властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності отримуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(r,\beta\right)\left(\int_0^{R_1} g_1(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(\rho,\beta\right)\sigma_1\rho^{2\alpha+1}d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta, \quad (40)$$

$$g_2(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}\left(r,\beta\right)\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}\left(\rho,\beta\right)\sigma_2 sh\rho d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta, \quad (41)$$

$$g_3(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}\left(r,\beta\right)\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}\left(\rho,\beta\right)\sigma_3 d\rho\right)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta. \quad (42)$$

Якщо помножити рівність (40) на $\theta(r)\theta(R_1 - r)$, рівність (41) — на $\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)$, а рівність (42) — на $\theta(r - R_2)$ й додати, то матимемо інтегральне зображення (20).

Доведення теореми завершене.

Зауваження 1. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в точках розриву $g(r)$ треба замінити на $\frac{1}{2}\left[g(r-0) + g(r+0)\right]$.

В основі застосування запровадженого формулами (18), (19) ГІП знаходиться основна тотожність ГІП ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}\cdot c^{-1}_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2\sigma_2 shR_2\cdot c^{-1}_{11,2},$$

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}\left(r,\beta\right)\sigma_1 r^{2\alpha+1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}\left(r,\beta\right)\sigma_2 shrdr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}\left(r,\beta\right)\sigma_3 dr,$$

$$Z^{(\mu),k}_{\upsilon,\alpha;i2}(\beta) = \left(\tilde{\alpha}^k_{i2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{i2}\right)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}, \quad i,k = 1,2.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \left\{B_{\upsilon,\alpha}\left[g_1(r)\right]; \Lambda_{(\mu)}\left[g_2(r)\right]; g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{k}\right)g_{k}(r)-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk},\ \ j,k=1,2 \quad (43)$$

та умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{2\alpha+1}\left(g_1'(r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)-g_1(r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}{}'\left(r,\beta\right)\right)\right]=0, \quad (44)$$

$$\lim_{r\to \infty}\left[g_3'(r)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)-g_3(r)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}{}'\left(r,\beta\right)\right]=0, \quad (45)$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$:

$$\begin{aligned}H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[g(r)\right]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}\tilde{g}_i(\beta)k_i^2+\\+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}\right].\end{aligned} \quad (46)$$

Доведення тотожності (46) здійснюється за відомою логічною схемою [8].

Зауваження 2. При $\delta_{jk}^{m}=0$ та $\gamma_{jk}^{m}=0$ маємо звичайне (класичне) гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя — Лежандра — Фур'є на полярній осі з двома точками спряження.

Висновок. Запроваджене гібридне інтегральне перетворення поповнює множину ГІП із спектральним параметром та розширює клас задач математичної фізики неоднорідних середовищ, інтегральне зображення точних аналітичних розв'язків яких можна одержати.

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93—106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
6. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера — Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
8. Ленюк М. П. Гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера — (Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с.

9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
10. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.

The method of delta-like sequence (Cauchy kernel) inculcates hybrid integral transformation of Bessel-Legendre-Fourier type on polar axis with two points of interface in supposition, that a spectral parameter takes part in the conditions of interface.

Key words: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, Cauchy kernel, functions of influencing, spectral function, gravimetric function, spectral density, basic identity.*

Отримано: 17.05.2011

УДК 517.927

В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук,
Л. М. Семчишин, викладач

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

ДО ПИТАННЯ ЗБІЖНОСТІ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ І ПАРАМЕТРАМИ

У статті досліджується питання збіжності колокаційно-ітеративного методу до розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами. Встановлено умови збіжності методу, оцінки похибок.

Ключові слова: *крайова задача, диференціальні рівняння, інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, імпульсний вплив.*

Вступ. Переважна більшість задач прикладного та теоретичного характеру зводиться до розв'язування різних класів диференціальних, інтегральних, інтегрально-функціональних та функціонально-диференціальних рівнянь та їх систем. У більшості практичних ситуацій отримання точного аналітичного розв'язку є досить складним і потребує значних зусиль, або знайдений розв'язок є не досить зручним для використання. Тому в останні десятиріччя широкого розповсюдження набули наближені методи розв'язування таких задач. У той же час пошук нових, більш ефективних, і удосконалення вже існуючих методів продовжує залишатися досить актуальною задачею.