УДК 517.977.56

К. Б. Мансимов*, д-р физ.-мат. наук, профессор,
М. М. Насияти**, аспирант

*Бакинский государственный университет, г. Баку,
**Институт кибернетики НАН Азербайджана, г. Баку

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ МНОГОЭТАПНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается ступенчатая задача оптимального управления, описываемая 2-D дискретными системами. При предположении открытости области управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: *дискретная двухпараметрическая система, ступенчатая задача управления, необходимое условие оптимальности, особые в классическом смысле управления, классическая экстремаль.*

Введение. Дискретные динамические модели управляемых систем представляют собой важный как в теоретическом, так и в практическом отношении, класс математических моделей, позволяющий охватить очень широкий круг реальных объектов.

Подобные модели возникают при моделировании многих реальных процессов с дискретным временем, а также при дискретизации непрерывных моделей для практических расчетов и построении различных итерационных вычислительных процедур (см., напр., [1—10]).

Среди задач оптимального управления особое место занимают многоэтапные или же ступенчатые задачи оптимального управления (см., напр., [11—18], где имеется дальнейшие ссылки).

Предлагаемая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности в одной 2-D дискретной двухпараметрической ступенчатой задаче управления.

Отметим, что различные необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных 2-D систем управления получены в работах [8; 19—24] и др.

Постановка задачи. Допустим, что управляемый процесс описывается следующей дискретной двухпараметрической системой уравнений

$$z_i(t+1,x+1)=f_i\big(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x)\big),$$
$$(t,x)\in D_i,\ i=\overline{1,3} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$z_1(t_0,x)=\alpha_1(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$
\begin{gathered}
z_1(t,x_0)=\beta_1(t), \quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \\
z_2(t_1,x)=z_1(t_1,x), \quad x=x_0,x_0+1,\dots,X, \\
z_2(t,x_0)=\beta_2(t), \quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2, \\
z_3(t_2,x)=z_2(t_2,x), \quad x=x_0,x_0+1,\dots,X, \\
z_3(t,x_0)=\beta_3(t), \quad t=t_2,t_2+1,\dots,t_3, \\
\alpha_1(x_0)=\beta_1(t_0), \; z_1(t_1,x_0)=\beta_2(t_1), \; z_2(t_2,x_0)=\beta_3(t_2).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь $D_i=\{(t,x): t=t_{i-1},t_{i-1}+1,\dots,t_i-1;\; x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\}$, $i=\overline{1,3}$, где x_0, X, t_i, $i=\overline{1,3}$ заданы, $f_i(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i)$, $i=\overline{1,3}$ заданные n-мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (z_i,a_i,b_i,u_i), $i=\overline{1,3}$ до второго порядка включительно, $\alpha_1(x)$, $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,3}$ — заданные n-мерные дискретные вектор-функции, а $u_i(t,x)$, $i=\overline{1,3}$ r-мерные вектор-функции управляющих воздействий со значениями из заданных непустых, ограниченных и открытых множеств $U_i\subset R^r$, $i=\overline{1,3}$, т.е.

$$
u_i(t,x)\in U_i\subset R^r, \; (t,x)\in D_i, \; i=\overline{1,3}. \tag{3}
$$

Тройку $u(t,x)=(u_1(t,x),\, u_2(t,x),\, u_3(t,x))'$ с вышеприведенными свойствами будем называть допустимым управлением, а соответствующее ему решение $z(t,x)=(z_1(t,x),\, z_2(t,x),\, z_3(t,x))'$ краевой задачи (1)—(2) допустимым состоянием процесса. При этом пару $(u(t,x),\, z(t,x))$ назовем допустимым процессом.

Задача заключается в минимизации функционала

$$
S(u)=\sum_{i=1}^{3}\varphi_i\left(z_i(t_i,X)\right), \tag{4}
$$

определенного на решениях краевой задачи (1)—(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_i(z_i)$, $i=\overline{1,3}$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

В дальнейшем задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)—(3) будем называть задачей (1)—(4).

Допустимый же процесс $(u(t,x),\, z(t,x))$, являющееся решением задачи (1)—(4) назовем оптимальным процессом.

Вспомогательные факты и вариации критерия качества. Пусть $\left(u(t,x),\ z(t,x)\right)$ фиксированный допустимый процесс. В дальнейшем будут использованы следующего типа обозначения:

$$H_i\left(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i,\psi_i\right)=\psi_i' f_i\left(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i\right),$$

$$\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial a_i}=\frac{\partial f_i\left(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x)\right)}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial H_i[t,x]}{\partial z_i}\equiv\frac{\partial H_i\left(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x),\psi_i(t,x)\right)}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i^2}\equiv\frac{\partial^2 H_i\left(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x),\psi_i(t,x)\right)}{\partial z_i^2},$$

где $\psi_i=\psi_i(t,x)$, $i=\overline{1,3}$ n-мерные вектор-функции сопряженных переменных, являющихся решениями задачи

$$\psi_i(t-1,x-1)=\frac{\partial H_i[t,x]}{\partial z_i}+\frac{\partial H_i[t-1,x]}{\partial a_i}+\frac{\partial H_i[t,x-1]}{\partial b_i},\ i=\overline{1,3}, \quad (5)$$

$$\psi_1(t_1-1,X-1)=\psi_2(t_1-1,X-1)-\frac{\partial\varphi_1\left(z_1(t_1,X)\right)}{\partial z_1},$$

$$\psi_1(t_1-1,x-1)=\psi_2(t_1-1,x-1)+\frac{\partial H_1[t_1-1,x]}{\partial a_1}-\frac{\partial H_2[t_1-1,x]}{\partial a_2},$$

$$\psi_1(t-1,X-1)=\frac{\partial H_1[t-1,X-1]}{\partial b_1},$$

$$\psi_2(t_2-1,X-1)=\psi_3(t_2-1,X-1)-\frac{\partial\varphi_2\left(z_2(t_2,X)\right)}{\partial z_2},$$

$$\psi_2(t_2-1,x-1)=\psi_3(t_2-1,x-1)+\frac{\partial H_2[t_2-1,x]}{\partial a_2}-\frac{\partial H_3[t_2-1,x]}{\partial a_3},$$

$$\psi_2(t-1,X-1)=\frac{\partial H_2[t,X-1]}{\partial b_2},\ \psi_3(t_3-1,X-1)=-\frac{\partial\varphi_3\left(z_3(t_3,X)\right)}{\partial z_3},$$

$$\psi_3(t_3-1,x-1)=\frac{\partial H_3[t_3-1,x]}{\partial a_3},\ \psi_3(t-1,X-1)=\frac{\partial H_3[t,X-1]}{\partial b_3}. \quad (6)$$

Используя схему, например, из [20; 25; 26] можно показать, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала (4) имеют соответственно вид

$$\delta^1 S(u;\ \delta u) = -\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\frac{\partial H_i'[t,x]}{\partial u_i}\delta u_i(t,x)\right], \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u;\delta u) &= \sum_{i=1}^{3}\delta z_i'(t_i,X)\frac{\partial^2\varphi_i(z_i(t_i,X))}{\partial z_i^2}\delta z_i(t_i,X)-\\
&-\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\delta z_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i^2}\delta z_i(t,x)+\delta z_i'(t+1,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i\,\partial z_i}\delta z_i(t,x)+\right.\right.\\
&+\delta z_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i\,\partial a_i}\delta z_i(t+1,x)+\delta z_i'(t+1,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i^2}\delta z_i(t+1,x)+\\
&+\delta z_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i\,\partial b_i}\delta z_i(t,x+1)+\delta z_i'(t,x+1)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial b_i\,\partial z_i}\delta z_i(t,x)+\\
&+\delta z_i'(t,x+1)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial b_i^2}\delta z_i(t,x+1)+\delta z_i'(t+1,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i\,\partial b_i}\delta z_i(t,x+1)+\\
&+\delta z_i'(t,x+1)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial b_i\,\partial a_i}\delta z_i(t+1,x)+2\,\delta u_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial u_i\,\partial z_i}\delta z_i(t,x)+\\
&+2\,\delta u_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial u_i\,\partial a_i}\delta z_i(t+1,x)+2\,\delta u_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial u_i\,\partial b_i}\delta z_i(t,x+1)+\\
&\left.\left.+\delta u_i'(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial u_i^2}\delta u_i(t,x)\right]\right],
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta u_i(t,x)\in R^r$, $(t,x)\in D_i$, $i=\overline{1,3}$ произвольная ограниченная вектор функция, называемая допустимой вариацией управления $u_i(t,x)$, $i=\overline{1,3}$, а $\delta z_i(t,x)$ вариация траектории $z_i(t,x)$, являющиеся решением уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}
\delta z_i(t+1,x+1) &= \frac{\partial f_i[t,x]}{\partial z_i}\delta z_i(t,x)+\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial a_i}\delta z_i(t+1,x)+\\
&+\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial b_i}\delta z_i(t,x+1)+\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial u_i}\delta u_i(t,x),\quad i=\overline{1,3},
\end{aligned} \tag{9}$$

с краевыми условиями

$$\delta z_1(t_0,x)=0,\quad x=x_0,x_0+1,...,X,$$

$$\delta z_1(t,x_0)=0,\quad t=t_0,t_0+1,...,t_1,$$

$$\begin{gathered}\delta z_2(t_1,x)=\delta z_1(t_1,x),\ \ x=x_0,x_0+1,\ldots,X,\\ \delta z_2(t,x_0)=0,\ \ t=t_1,t_1+1\ldots,t_2,\\ \delta z_3(t_2,x)=\delta z_2(t_2,x),\ x=x_0,x_0+1,\ldots,X,\\ \delta z_3(t,x_0)=0,\ t=t_2,t_2+1,\ldots,t_3.\end{gathered}\tag{10}$$

Система разностных уравнений (9) является линейной и неоднородной.

Поэтому (см., [20; 23; 24]) решение задачи (9)—(10) можно представить в виде

$$\delta z_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_1[\tau,s]}{\partial u_1}\delta u_1(\tau,s),\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_1[\tau,s]}{\partial u_1}\delta u_1(\tau,s)+\\ +\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_2[\tau,s]}{\partial u_2}\delta u_2(\tau,s),\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}\delta z_3(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_2(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_1[\tau,s]}{\partial u_1}\delta u_1(\tau,s)+\\ +\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_3(t,x;\,\tau,s)\times\frac{\partial f_2[\tau,s]}{\partial u_2}\delta u_2(\tau,s)+\\ +\sum_{\tau=t_2}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_3(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_3[\tau,s]}{\partial u_3}\delta u_3(\tau,s),\end{gathered}\tag{13}$$

где по определению

$$Q_1(t,x;\,\tau,s)=R_2(t,x;\,t_1-1,x-1)R_1(t_1,x;\,\tau,s)+$$

$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[R_2(t,x;\,t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x;\,t_1-1,\beta)\frac{f_2[t_1-1,\beta]}{\partial a_2}\right]R_1(t_1,\beta;\tau,s),$$

$$Q_2(t,x;\,\tau,s)=R_3(t,x;\,t_2-1,x-1)Q_1(t_2,x;\,\tau,s)+$$

$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[\left[R_3(t,x;\,t_2-1,\beta-1)-R_3(t,x;\,t_2-1,\beta)\right]\frac{f_3[t_2-1,\beta]}{\partial a_3}\right]Q_1(t_2,\beta;\tau,s).$$

$$Q_3(t,x;\,\tau,s)=R_3(t,x;\,t_2-1,x-1)R_2(t_2,x;\,\tau,s)+$$

$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[\left[R_3(t,x;\,t_2-1,\beta-1)-R_3(t,x;\,t_2-1,\beta)\right]\frac{f_3[t_2-1,\beta]}{\partial a_3}\right]R_2(t_2,\beta;\tau,s).$$

Здесь $R_i\left(t,x;\,\tau,s\right)$, $i=\overline{1,3}$ $\left(n\times n\right)$ матричные функции, являющиеся решениями следующих задач:

$$R_i\left(t,x;\,\tau-1,s-1\right)=R_i\left(t,x;\,\tau,s\right)\frac{\partial f_i\left[\tau,s\right]}{\partial z_i}+$$

$$+R_i\left(t,x;\,\tau-1,s\right)\frac{\partial f_i\left[\tau-1,s\right]}{\partial a_i}+R_i\left(t,x;\,\tau,s-1\right)\frac{\partial f_i\left[\tau,s-1\right]}{\partial b_i},$$

$$R_i\left(t,x;\,t-1,s-1\right)=R_i\left(t,x;\,t_1-1,s\right)\frac{\partial f_i\left[t-1,s\right]}{\partial a_i},$$

$$R_i\left(t,x;\,\tau-1,x-1\right)=R_i\left(t,x;\,\tau,x-1\right)\frac{\partial f_i\left[\tau,x-1\right]}{\partial b_i},$$

$$R_i\left(t,x;\,t-1,x-1\right)=E,$$

(E — $\left(n\times n\right)$ единичная матрица).

Пусть $\left(u\left(t,x\right),\,z\left(t,x\right)\right)$ оптимальный процесс. Тогда вдоль этого процесса для всех вариаций $\delta u\left(t,x\right)$ управления $u\left(t,x\right)$ первая вариация (7) функционала (4) должна равняться нулю, а вторая (8) должен быть неотрицательный, т.е.

$$\delta^1 S\left(u;\,\delta u\right)=0, \tag{14}$$

$$\delta^2 S\left(u;\,\delta u\right)\ge 0. \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) являются неявными необходимыми условиями первого и второго порядков соответственно.

В следующем параграфе, используя эти соотношения, получены явные необходимые условия оптимальности, выраженные непосредственно через параметры поставленной задачи.

Необходимые условия оптимальности. Из (14) с учетом представления (7) в силу независимости вариаций $\delta u_i\left(t,x\right)$, $i=\overline{1,3}$ управления следует, что вдоль оптимального процесса

$$\frac{\partial H_i\left[\theta,\xi\right]}{\partial u_i}=0,\ \text{для всех}\ \left(\theta,\xi\right)\in D_i,\ i=\overline{1,3}. \tag{16}$$

Соотношение (16), представляющее собой необходимое условие оптимальности первого порядка, является аналогом уравнения Эйлера для задачи (1)—(4).

Каждое допустимое управление $u\left(t,x\right)$, удовлетворяющее уравнению Эйлера (16), назовем классической экстремалью в задаче (1)—(4).

Используя неравенство (15) в ряде случаев можно получить явное необходимое условие оптимальности второго порядка.

С этой целью предположим, что в системе (1)

$$f_i\left(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i\right)=B_i\left(t,x\right)b_i+F\left(t,x,z_i,a_i,u_i\right). \tag{17}$$

Положим

$$\begin{aligned}
K_1\left(\tau,s\right)=&-R_1'\left(t_1,X;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,X\right)\right)}{\partial z_1^2}R_1\left(t_1,X;\theta,s\right)-\\
&-Q_1'\left(t_2,X;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,X\right)\right)}{\partial z_2^2}Q_2\left(t_2,X;\theta,s\right)-\\
&-Q_3'\left(t_3,X;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2\varphi_3\left(z_3\left(t_3,X\right)\right)}{\partial z_3^2}Q_3\left(t_3,X;\theta,s\right)+\\
&+\sum_{t=\theta+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}\left[R_1'\left(t,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_1\left[t,x\right]}{\partial z_1^2}R_1\left(t,x,\theta,s\right)+R_1'\left(t,x,\theta,\tau\right)\times\right.\\
&\left.\times\frac{\partial^2H_1\left[t,x\right]}{\partial z_1\,\partial a_1}R_1\left(t+1,x,\theta,s\right)+R_1'\left(t+1,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_1\left[t,x\right]}{\partial a_1\,\partial z_1}R_1\left(t,x,\theta,s\right)\right]+\\
&+\sum_{t=\theta}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_1'\left(t+1,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_1\left[t,x\right]}{\partial a_1^2}R_1\left(t+1,x,\theta,s\right)+\\
&+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}\left[Q_1'\left(t,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_2\left[t,x\right]}{\partial z_2^2}Q_1\left(t,x,\theta,s\right)+Q_1'\left(t,x,\theta,\tau\right)\times\right.\\
&\times\frac{\partial^2H_2\left[t,x\right]}{\partial z_2\,\partial a_2}Q_1\left(t+1,x,\theta,s\right)+Q_1'\left(t+1,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_2\left[t,x\right]}{\partial a_2\,\partial z_2}Q_1\left(t,x,\theta,s\right)+\\
&\left.+Q_1'\left(t+1,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_2\left[t,x\right]}{\partial a_2^2}Q_1\left(t+1,x,\theta,s\right)\right]+\\
&+\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}\left[Q_2'\left(t,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_3\left[t,x\right]}{\partial z_3^2}Q_2\left(t,x,\theta,s\right)+Q_2'\left(t,x,\theta,\tau\right)\times\right.\\
&\times\frac{\partial^2H_3\left[t,x\right]}{\partial z_3\,\partial a_3}Q_2\left(t+1,x,\theta,s\right)+Q_2'\left(t+1,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_3\left[t,x\right]}{\partial a_3\,\partial z_3}Q_2\left(t,x,\theta,s\right)+\\
&\left.+Q_2'\left(t+1,x,\theta,\tau\right)\frac{\partial^2H_3\left[t,x\right]}{\partial a_3^2}Q_2\left(t+1,x,\theta,s\right)\right],
\end{aligned} \tag{18}$$

$$K_2(\tau,s) = -R_2'(t_2, X;\theta,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(z_2(t_2,X))}{\partial z_2^2}R_2(t_2, X;\theta,s) -$$

$$-Q_3'(t_3, X;\theta,\tau)\frac{\partial^2\varphi_3(z_3(t_3,X))}{\partial z_3^2}Q_3(t_3, X;\theta,s) +$$

$$+\sum_{t=\theta+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}\left[R_2'(t, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2^2}R_2(t, x;\theta,s) + R_2'(t, x;\theta,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2\,\partial a_2}R_2(t+1, x;\theta,s) + R_2'(t+1, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2\,\partial z_2}R_2(t, x;\theta,s)\right] + \quad (19)$$

$$+\sum_{t=\theta}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_2'(t+1, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2^2}R_2(t+1, x;\theta,s) +$$

$$+\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}\left[Q_3'(t, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3^2}Q_3(t, x;\theta,s) + Q_3'(t, x;\theta,\tau)\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3\,\partial a_3}Q_3(t+1, x;\theta,s) + Q_3'(t+1, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3\,\partial z_3}Q_3(t, x;\theta,s) +$$

$$\left.+Q_3'(t+1, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3^2}Q_3(t+1, x;\theta,s)\right],$$

$$K_3(\tau,s) = -R_3'(t_3, X;\theta,\tau)\frac{\partial^2\varphi_3(z_3(t_3,X))}{\partial z_3^2}R_3(t_3, X;\theta,s) +$$

$$+\sum_{t=\theta}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}\left[R_3'(t, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3^2}R_3(t, x;\theta,s) + R_3'(t, x;\theta,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3\,\partial a_3}R_3(t+1, x;\theta,s) + R_3'(t+1, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3\,\partial z_3}R_3(t, x;\theta,s)\right] + \quad (20)$$

$$+\sum_{t=\theta}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_3'(t+1, x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3^2}R_3(t+1, x;\theta,s).$$

Используя, дискретные варианты линейчатых вариаций [27], доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Если множества U_i, $i=\overline{1,3}$ открыты, то при сделанных предположениях для оптимальности классической экстремали

$u(t,x)$, в задаче (1)—(4), (17) необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1} v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}K_1(\tau,s)\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s)+ \\ 1)\quad &+2\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x-1} v_1'(x)\frac{\partial^2 H_1[\theta,x]}{\partial u_1\,\partial a_1}R_1(\theta+1,x;\theta,s)\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s)\right]+ \qquad (21) \\ &+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} v_1'(x)\frac{\partial^2 H_1[\theta,x]}{\partial u_1^2}v_1(x)\le 0 \end{aligned}$$

для всех $v_1(x)\in R^r$, $x=x_0,x_0+1,\dots,X-1$, $\theta\in T_1=\{t_0,t_0+1,\dots,t_1-1\}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1} v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}K_2(\tau,s)\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s)+ \\ 2)\quad &+2\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x-1} v_2'(x)\frac{\partial^2 H_2[\theta,x]}{\partial u_2\,\partial a_2}R_2(\theta+1,x;\theta,s)\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s)\right]+ \qquad (22) \\ &+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} v_2'(x)\frac{\partial^2 H_2[\theta,x]}{\partial u_2^2}v_2(x)\le 0 \end{aligned}$$

для всех $v_2(x)\in R^r$, $x=x_0,x_0+1,\dots,X-1$, $\theta\in T_2=\{t_1,t_1+1,\dots,t_2-1\}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1} v_3'(\tau)\frac{\partial f_3'[\theta,\tau]}{\partial u_3}K_3(\tau,s)\frac{\partial f_3[\theta,s]}{\partial u_3}v_3(s)+ \\ 3)\quad &+2\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x-1} v_3'(x)\frac{\partial^2 H_3[\theta,x]}{\partial u_3\,\partial a_3}R_3(\theta+1,x;\theta,s)\frac{\partial f_3[\theta,s]}{\partial u_3}v_3(s)\right]+ \qquad (23) \\ &+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} v_3'(x)\frac{\partial^2 H_3[\theta,x]}{\partial u_3^2}v_3(x)\le 0 \end{aligned}$$

для всех $v_3(x)\in R^r$, $x=x_0,x_0+1,\dots,X-1$, $\theta\in T_3=\{t_2,t_2+1,\dots,t_3-1\}$.

Доказательство. Используя произвольность допустимых вариаций управления $u(t,x)=(u_1(t,x),\,u_2(t,x),\,u_3(t,x))$, положим

$$\delta u_1^*(t,x)=\begin{cases} v_1(x), & t=\theta\in T_1;\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X-1, \\ 0, & t\ne\theta;\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X-1. \end{cases} \qquad (24)$$

$$\delta u_i^*(t,x)=0,\quad (t,x)\in D_i,\quad i=1,2\,.$$

Здесь $v_1(x) \in R^r$, $x = x_0, x_0+1, \dots, X-1$ произвольная ограниченная вектор-функция, а $\theta \in T_1 = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}$ произвольная точка.

Через $\delta z^*(t,x) = \left(\delta z_1^*(t,x),\ \delta z_2^*(t,x),\ \delta z_3^*(t,x)\right)$ обозначим решения задач (9)—(10) соответствующие, специальной вариации (24) управления. Из представлений (11)—(13) следует, что

$$\delta z_1^*(t,x) = \begin{cases} 0, \quad t = t_0, t_0+1, \dots, \theta; \quad x = x_0, x_0+1, \dots, X, \\ \sum\limits_{s=x_0}^{x-1} R_1(t,x;\theta,s) \dfrac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1} v_1(s),\ t \ge \theta+1;\ x = x_0, x_0+1, \dots, X, \end{cases} \tag{25}$$

$$\delta z_2^*(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t,x;\theta,s) \frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1} v_1(s),\ t = t_1, t_1+1, \dots, t_2;\ x = x_0, \dots, X, \tag{26}$$

$$\delta z_3^*(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_2(t,x;\theta,s) \frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1} v_1(s),\ t = t_2, t_2+1, \dots, t_3;\ x = x_0, \dots, X. \tag{27}$$

С учетом (8), (20), (24) из (15) получаем, что для оптимальности классически особого управления $u(t,x) = \left(u_1(t,x),\ u_2(t,x),\ u_3(t,x)\right)$ в задаче (1)—(4), (17) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{3} \delta z_i^{*'}(t_i,X) \frac{\partial^2 \varphi_i(z_i(t_i,X))}{\partial z_i^2} \delta z_i^*(t_i,X) - \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[\delta z_i^{*'}(t,x) \frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i^2} \delta z_i^*(t,x) + \delta z_i^{*'}(t,x) \frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i\, \partial a_i} \times \right.\right. \\ \times \delta z_i^*(t+1,x) + \delta z_i^{*'}(t+1,x) \frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i\, \partial z_i} \delta z_i^*(t,x) + \delta z_i^{*'}(t+1,x) \times \\ \left.\left. \times \frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i^2} \delta z_i^*(t+1,x) \right]\right] - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta u_1^{*'}(t,x) \frac{\partial^2 H_1[t,x]}{\partial u_1\, \partial z_1} \delta z_1^*(t,x) + \right. \\ \left. + \delta u_1^{*'}(t,x) \frac{\partial^2 H_1[t,x]}{\partial u_1\, \partial a_1} \delta z_1^*(t+1,x) \right] - \sum_{x=x_0}^{X-1} v_1'(x) \frac{\partial^2 H_1[t,x]}{\partial u_1^2} v_1(x) \ge 0, \end{gathered} \tag{28}$$

выполнялось для всех $v_1(x) \in R^r$, $x = x_0, x_0+1, \dots, X-1$.

Далее используя представления (25)—(27) получаем, что

$$\sum_{i=1}^{3} \delta z_i^{*'}(t_i,X) \frac{\partial^2 \varphi_i(z_i(t_i,X))}{\partial z_i^2} \delta z_i^*(t_i,X) = \sum_{\tau=x_0}^{X-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} v_1'(\tau) \frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1} \times$$

$$\times\Bigg[R_1'\left(t_1,X;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,X\right)\right)}{\partial z_1^2}R_1\left(t_1,X;\theta,s\right)+Q_1'\left(t_2,X;\theta,\tau\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,X\right)\right)}{\partial z_2^2}Q_1\left(t_2,X;\theta,s\right)+Q_2'\left(t_3,X;\theta,\tau\right)\times \tag{29}$$
$$\times\frac{\partial^2\varphi_3\left(z_3\left(t_3,X\right)\right)}{\partial z_3^2}Q_2\left(t_3,X;\theta,s\right)\Bigg]\frac{\partial f_1\left[\theta,s\right]}{\partial u_1}v_1\left(s\right).$$

По схеме работ [22; 23] и др. будем иметь

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_1^{*'}\left(t,x\right)\frac{\partial^2 H_1\left[t,x\right]}{\partial z_1^2}\delta z_1^*\left(t,x\right)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'\left(\tau\right)\frac{\partial f_1'\left[\theta,\tau\right]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_1'\left(t,x;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2 H_1\left[t,x\right]}{\partial z_1^2}R_1\left(t,x;\theta,s\right)\right]\frac{\partial f_1\left[\theta,s\right]}{\partial u_1}v_1\left(s\right),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}\left(t,x\right)\frac{\partial^2 H_2\left[t,x\right]}{\partial z_2^2}\delta z_2^*\left(t,x\right)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}v_1'\left(\tau\right)\frac{\partial f_1'\left[\theta,\tau\right]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_1'\left(t,x;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2 H_2\left[t,x\right]}{\partial z_2^2}Q_1\left(t,x;\theta,s\right)\right]\frac{\partial f_1\left[\theta,s\right]}{\partial u_1}v_1\left(s\right),$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}\left(t,x\right)\frac{\partial^2 H_3\left[t,x\right]}{\partial z_3^2}\delta z_3^*\left(t,x\right)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}v_1'\left(\tau\right)\frac{\partial f_1'\left[\theta,\tau\right]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_2'\left(t,x;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2 H_3\left[t,x\right]}{\partial z_3^2}Q_2\left(t,x;\theta,s\right)\right]\frac{\partial f_1\left[\theta,s\right]}{\partial u_1}v_1\left(s\right), \tag{30}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_1^{*'}\left(t,x\right)\frac{\partial^2 H_1\left[t,x\right]}{\partial z_1\,\partial a_1}\delta z_1^*\left(t+1,x\right)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'\left(\tau\right)\frac{\partial f_1'\left[\theta,\tau\right]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_1'\left(t,x;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2 H_1\left[t,x\right]}{\partial z_1\,\partial a_1}R_1\left(t+1,x;\theta,s\right)\right]\frac{\partial f_1\left[\theta,s\right]}{\partial u_1}v_1\left(s\right),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_1^{*'}\left(t+1,x\right)\frac{\partial^2 H_1\left[t,x\right]}{\partial a_1\,\partial z_1}\delta z_1^*\left(t,x\right)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'\left(\tau\right)\frac{\partial f_1'\left[\theta,\tau\right]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_1'\left(t+1,x;\theta,\tau\right)\frac{\partial^2 H_1\left[t,x\right]}{\partial a_1\,\partial z_1}R_1\left(t,x;\theta,s\right)\right]\frac{\partial f_1\left[\theta,s\right]}{\partial u_1}v_1\left(s\right),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2\,\partial a_2}\delta z_2^{*}(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_1'(t,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2\,\partial a_2}Q_1(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2\,\partial z_2}\delta z_2^{*}(t,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_1'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2\,\partial z_2}Q_1(t,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s),$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3\,\partial a_3}\delta z_3^{*}(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_2'(t,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3\,\partial a_3}Q_2(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s),$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3\,\partial z_3}\delta z_3^{*}(t,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_2'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3\,\partial z_3}Q_2(t,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_1^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_1[t,x]}{\partial a_1^2}\delta z_1^{*}(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_1'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_1[t,x]}{\partial a_1^2}R_1(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2^2}\delta z_2^{*}(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_1'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2^2}Q_2(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s),$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3^2}\delta z_3^{*}(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_1'(\tau)\frac{\partial f_1'[\theta,\tau]}{\partial u_1}\times$$

$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} Q_2'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3^2}Q_3(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s).$$

Далее, на основании дискретного аналога теоремы Фубини (см., напр., [20; 28; 29]), получаем

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta u_1^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_1[t,x]}{\partial u_1\,\partial a_1}\delta z_1^*(t+1,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x-1} v_1'(x)\frac{\partial^2 H_1[\theta,x]}{\partial u_1\,\partial a_1}R_1(t+1,x;\theta,s)\frac{\partial f_1[\theta,s]}{\partial u_1}v_1(s)\right]= \quad (31)$$

$$=\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{s=x+1}^{X-1} v_1'(s)\frac{\partial^2 H_1[\theta,s]}{\partial u_1\,\partial a_1}R_1(t+1,s;\theta,x)\right]\frac{\partial f_1[\theta,x]}{\partial u_1}v_1(x),$$

Принимая во внимания соотношения (29)—(31) и обозначение (14) в соотношении (28) приходим к неравенству (21).

Теперь специальную вариацию управления $u(t,x)$ определим по формуле

$$\begin{cases}\delta u_i^*(t,x)=0, \quad (t,x)\in D_i, \quad i=1,3,\\ \delta u_2^*(t,x)=\begin{cases}v_2(x), & t=\theta\in T_2;\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1,\\ 0, & t\neq\theta;\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1.\end{cases}\end{cases} \quad (32)$$

Здесь $v_2(x)\in R^r$, $x=x_0,x_0+1,\dots,X-1$ — произвольная r-мерная ограниченная вектор-функция, а $\theta\in T_2=\{t_1,t_1+1,\dots,t_2-1\}$ — произвольная точка.

Через $\delta z^*(t,x)=\left(\delta z_1^*(t,x),\,\delta z_2^*(t,x),\,\delta z_3^*(t,x)\right)$ обозначим решения задач (9)—(10) соответствующие специальной вариации (35) управления.

Из представлений (11)—(13) следует, что

$$\delta z_1^*(t,x)=0,$$

$$\delta z_2^*(t,x)=\begin{cases}0, \quad t=t_1,t_1+1,\dots,\theta;\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,X,\\ \sum_{s=x_0}^{x-1} R_2(t,x;\theta,s)\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s),\ t\geq\theta+1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,X,\end{cases} \quad (33)$$

$$\delta z_3^*(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1} Q_3(t,x;\theta,s)\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s),$$

$$t=t_2,t_2+1,\dots,t_3;\ \ x=x_0,x_0+1\dots,X$$

С учетом (8), (32) из (15) получаем, что для оптимальности классической экстремали $u(t,x)=(u_1(t,x),\,u_2(t,x),\,u_3(t,x))$ в задаче (1)—(4), (17) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{i=2}^{3}\delta z_i^{*'}(t_i,X)\frac{\partial^2\varphi_i(z_i(t_i,X))}{\partial z_i^2}\delta z_i^*(t_i,X)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3}\left[\sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\delta z_i^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i^2}\delta z_i^*(t,x)+\delta z_i^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial z_i\,\partial a_i}\times\right.\right.$$
$$\times\delta z_i^*(t+1,x)+\delta z_i^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i\,\partial z_i}\delta z_i^*(t,x)+$$
$$\left.\left.+\delta z_i^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_i[t,x]}{\partial a_i^2}\delta z_i^*(t+1,x)\right]\right]- \tag{34}$$
$$-2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\delta u_2^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial u_2\,\partial a_2}\delta z_2^*(t,x)+\delta u_2^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial u_2\,\partial a_2}\delta z_2^*(t+1,x)\right]-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{X-1}v_2'(x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial u_2^2}v_2(x)\ge 0.$$

выполнялось для всех $v_2(x)\in R^r$, $x=x_0,x_0+1,\dots,X-1$.

Далее, используя представления (33) получаем, что

$$\sum_{i=1}^{3}\delta z_i^{*'}(t_i,X)\frac{\partial^2\varphi_i(z_i(t_i,X))}{\partial z_i^2}\delta z_i^*(t_i,X)=$$
$$=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\left[R_2'(t_2,X;\theta,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(z_2(t_2,X))}{\partial z_2^2}\times\right. \tag{35}$$
$$\times R_2(t_2,X;\theta,s)+Q_3'(t_3,X;\theta,\tau)\times$$
$$\left.\times\frac{\partial^2\varphi_3(z_3(t_3,X))}{\partial z_3^2}Q_3(t_3,X;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2^2}\delta z_2^*(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_2'(t,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2^2}R_2(t,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{36}$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3^2}\delta z_3^*(t,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{\tau=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_3'(t,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3^2}Q_3(t,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{37}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2\,\partial a_2}\delta z_2^*(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_2'(t,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial z_2\,\partial a_2}R_2(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{38}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2\,\partial z_2}\delta z_2^*(t,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_2'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2\,\partial z_2}R_2(t,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{39}$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3\,\partial a_3}\delta z_3^*(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_3'(t,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial z_3\,\partial a_3}Q_3(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{40}$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3\,\partial z_3}\delta z_3^*(t,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_3'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3\,\partial z_3}Q_3(t,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{41}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_2^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2^2}\delta z_2^*(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=\theta}^{t_2-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}R_2'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial a_2^2}R_2(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s), \tag{42}$$

$$\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z_3^{*'}(t+1,x)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3^2}\delta z_3^*(t+1,x)=\sum_{\tau=x_0}^{X-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}v_2'(\tau)\frac{\partial f_2'[\theta,\tau]}{\partial u_2}\times$$
$$\times\left[\sum_{t=t_2}^{t_3-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1}Q_3'(t+1,x;\theta,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t,x]}{\partial a_3^2}Q_3(t+1,x;\theta,s)\right]\frac{\partial f_2[\theta,s]}{\partial u_2}v_2(s). \tag{43}$$

Далее, используя дискретный аналог теоремы Фубини (см., напр., [20; 28; 29]), имеем

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta u_2^{*\prime}(t,x)\frac{\partial^2 H_2[t,x]}{\partial u_2\,\partial a_2}\delta z_2^*(t+1,x)=$$
$$=\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{s=x+1}^{X-1}v_2'(s)\frac{\partial^2 H_2[\theta,s]}{\partial u_2\,\partial a_2}R_2(t+1,s;\theta,x)\right]\frac{\partial f_2[\theta,x]}{\partial u_2}v_2(x). \tag{44}$$

Принимая во внимания тождества (35)—(44), а также обозначение (19) в неравенстве (34) приходим к соотношению (22).

Неравенство (23) доказывается также соответствующими рассуждениями.

Этим доказательство теоремы завершено.

Замечание. Аналогичные симметричные результаты получены и в случае, когда правая часть системы (1) имеет вид

$$f_i(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i)=A_i(t,x)a_i+Q_i(t,x,z_i,b_i,u_i).$$

Заключение. В статье рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретной двухпараметрической системой (2 D-система). При предположении открытости области управления получен аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи. Затем установлено необходимое условие оптимальности второго порядка.

Список использованной литературы:

1. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1971. — 508 с.
2. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
3. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами / В. Г. Болтянский. — М. : Наука, 1973. — 448 с.
4. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — М. : Наука, 1987. — 272 с.
5. Мордухович Б. Ш. Методы метрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления / Б. Ш. Мордухович. — М. : Наука, 1987. — 360 с.
6. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М. : Факториал Пресс. 2002. — 824 с.
7. Гайшун И. В. Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. — Мн. : Наука и техника, 1996. — 200 с.
8. Дымков М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Мн. : БГЭУ. 2005. — 363 с.
9. Krotov V. F. Global Methods in optimal control theory / V. F. Krotov. — New-York : Marcel-Dekker, 1996. — 385 p.
10. Кротов В. Ф. Оптимальное управление / В. Ф. Кротов. — М. : Высшая школа, 1990. — 431 с.

11. Захаров Г. К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода / Г. К. Захаров // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 6. — С. 32—36.
12. Никольский М. С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М. С. Никольский // Вестник МГУ. Сер. выч. мат. и кибернетика. — 1987. — № 2. — С. 36—41.
13. Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с интегральным функционалом / В. Н. Розова // Вестник РУДН. Сер. Прик. и компьютерн. мат. — 2002. — № 1 (1). — С. 131—136.
14. Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Н. Розова. — М., 1971. — 13 с.
15. Габелко К. Н. Оптимизация многоэтапных процессов : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / К.Н. Габелко. — Иркутск : ИГУ, 1975. — 18 с.
16. Исмайлов Р. Р. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления / Р. Р. Исмайлов, К. Б. Мансимов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 2006. — № 19. — С. 1758—1770.
17. Исмайлов Р. Р. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в ступенчатых задачах управления // Кибернетика и системный анализ / Р. Р. Исмайлов, К. Б. Мансимов. — 2008. — № 1. — С. 101—115.
18. Харатишвили Г. Л. Принцип максимума в оптимальных задачах с переключением / Г. Л. Харатишвили, Т. А. Тадумадзе // Труды Института Систем Управления. АН СССР. — Тбилиси : Мецниереба, 1980. — Т. 19, № 2. — С. 7—14.
19. Гайшун И. В. Дифференциально-разностные двухпараметрические системы управления / И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. — 1994. — № 6. — С. 931—938.
20. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. — Баку : Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
21. Васильев О. В. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах / О. В. Васильев, Ф. М. Кириллова // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 1. — С. 17—19.
22. Мансимов К. Б. Достаточные условия оптимальности типа условий Кротова для дискретных двухпараметрических систем / К. Б. Мансимов // Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 8. — С. 15—20.
23. Мансимов К. Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем / К. Б. Мансимов // Дифференц. уравнения. — 1991. — № 2. — С. 359—361.
24. Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в дискретных двухпараметрических системах / К. Б. Мансимов // Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-техн. и матем. наук. — 1998. — № 2. — С. 52—58.
25. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
26. Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием / К. Б. Мансимов. — Баку : ЕЛМ, 1999. — 174 с.
27. Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и метод линеаризации в задачах оптимального управления / В. А. Срочко. — Иркутск : ИГУ, 1987. — 154 с.

28. Choi S. K. Stability in variation for nonlinear Volterra difference systems / S. K. Choi, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. — 2001. — Vol. 38, № 1. — P. 101—111.
29. Zouyousefain M. Stability results for difference equations of Volterra type / M. Zouyousefain, S. Leela // Appl. Math. Comp. — 1990. — Vol. 36, № 1. — P. 51—61.

A stepwise optimal control problem described by 2-D discrete systems is considered. Under assumptions of openness of a control domain, necessary optimality conditions of first and second order are obtained.

Key words: *Discrete two-parametric system, stepwise control problem, necessary optimality conditions, singular in the classical sense controls, classical extremals.*

Отримано: 27.03.2011

УДК 517.956

О. В. Мартинюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. I

У статті визначаються нові класи функцій-символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які будуються за такими символами з допомогою прямого та оберненого перетворення Бесселя. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з початковими функціями з просторів типу розподілів Соболєва—Шварца.

Ключові слова: *перетворення Бесселя, простори основних функцій, простори узагальнених функцій, задача Коші, псевдо-Бесселеві оператори.*

Останні десятиліття інтенсивно досліджуються оператори, які формально можна подати у вигляді $A=\mathfrak{I}^{-1}_{\sigma\to x}\left[a(t,x,\sigma)\mathfrak{I}_{x\to\sigma}\right]$, де $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}^{-1}$ — певні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Фур'є—Бесселя, Фур'є на півосі та ін.), визначені в тому чи іншому просторі. Значна кількість праць присвячена вивченню властивостей оператора A, а також дослідженню еволюційних рівнянь з оператором A у випадку, коли $\mathfrak{I}=F$, де F — перетворення Фур'є. Функція a називається символом оператора A. До вказаного класу операторів належать диференціальні