

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЯХ

Методом функції впливу та функції Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є на декартових осі та півосі, а також інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками спряження.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки біології, медицини, економіки та техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї куткових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1—5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термодинаміки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6—9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних

рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породженні гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду але з різними наборами коефіцієнтів [11—16].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових та тришарових просторових областях одержано у працях автора [17—19].

У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях, які описуються декартовою системою координат.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \{(t, x, y, z); t > 0; (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle;$$

$z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j), l_0 \geq 0; l_j < l_{j+1}, l_{n+1} = +\infty\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = \quad (1)$$

$$= f_j(t, x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(x, y, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, x, y); \frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k} \Big|_{z=+\infty} = 0; k = 0, 1; \quad (3)$$

умовами спряження [16]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n} \quad (4)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2 , де a_{xj} ,

$a_{yj}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \left| \alpha_{11}^0 \right| + \left| \beta_{11}^0 \right| \neq 0; c_{1k} c_{2k} > 0;$$

$$f(t, x, y, z) = \{f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), \dots, f_{n+1}(t, x, y, z)\};$$

$$g^1(x, y, z) = \{g_1^1(x, y, z), g_2^1(x, y, z), \dots, g_{n+1}^1(x, y, z)\};$$

$$g^2(x, y, z) = \{g_1^2(x, y, z), g_2^2(x, y, z), \dots, g_{n+1}^2(x, y, z)\};$$

$g_0(t, x, y)$ — задані обмежені неперервні функції; $u(t, x, y, z) = \{u_1(t, x, y, z), u_2(t, x, y, z), \dots, u_{n+1}(t, x, y, z)\}$ — шукана функція.

Основна частина. Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури області Ω_2 .

1. $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left. \frac{\partial^k u_j}{\partial x^k} \right|_{x=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (5)$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left. \frac{\partial^k u_j}{\partial y^k} \right|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (6)$$

щодо змінної y .

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [20; 16].

До задачі (1)—(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty; +\infty)$ щодо змінної x [20]:

$$F_x [g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (7)$$

$$F_x^{-1} [\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \quad (8)$$

$$F_x \left[\frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\sigma^2 F_x [g(x)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (9)$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)—(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'_3 = \{(t, y, z); t > 0; y \in (-\infty; +\infty); z \in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{u}_j + (a_{xy}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z); z \in I_j, j = \overline{1, n+1} \quad (10)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(\sigma, y, z), \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(\sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (11)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_j \Big|_{z=l_0} = g_0(t, \sigma, y); \frac{\partial^k \tilde{u}_{n+1}}{\partial z^k} \Big|_{z=+\infty} = 0; k = 0, 1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^k \tilde{u}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=\pm\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (13)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}. \quad (14)$$

До задачі (10)—(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty; +\infty)$ щодо змінної y [20]:

$$F_y [g(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-isy} dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (15)$$

$$F_y^{-1} [\tilde{g}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(s) e^{isy} ds \equiv g(y), \quad (16)$$

$$F_y \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 F_y [g(y)] \equiv -s^2 \tilde{g}(s). \quad (17)$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайової задачі (10)—(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t, z); t > 0; z \in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial z^2} + (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yy}^2 s^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, s, z); z \in I_j \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(\sigma, s, z), \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(\sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, s); \frac{\partial^k \tilde{u}_{n+1}}{\partial z^k} \Big|_{z=+\infty} = 0; k = \overline{0, 1} \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}. \quad (21)$$

До задачі (18)—(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(l_0; +\infty)$ з n точками спряження щодо змінної z [16]:

$$F_{n,+} [g(z)] = \int_{l_0}^{+\infty} g(z) V(z, \beta) \sigma(z) dz \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (22)$$

$$F_{n,+}^{-1} [\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\beta) V(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \equiv g(z), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F_{n,+} \left[\sum_{j=1}^n a_{zj}^2 \theta(z-l_{j-1}) \theta(l_j-z) \frac{d^2 g}{dz^2} + a_{z,n+1}^2 \theta(z-l_n) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = \\ = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) \left(\alpha_{11}^0 \frac{d\tilde{g}}{d\beta} + \beta_{11}^0 \tilde{g} \right) \Big|_{z=l_0} - \\ - \sum_{j=1}^{n+1} k_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz. \end{aligned} \quad (24)$$

У формулах (22)—(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \beta) = \sum_{k=1}^n V_k(z, \beta) \theta(z-l_{k-1}) \theta(l_k-z) + V_{n+1}(z, \beta) \theta(z-l_n);$$

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^n \sigma_k \theta(z-l_{k-1}) \theta(l_k-z) + \sigma_{n+1} \theta(z-l_n); \Omega_n(\beta) =$$

$$= \frac{\beta}{b_{n+1}(\beta) \omega_n(\beta)}; V_m(z, \beta) = \prod_{j=m}^n c_{2j} a_{z,j+1}^{-1} b_{j+1}(\beta) G_m(z, \beta);$$

$$m = \overline{1, n}; V_{n+1}(z, \beta) = \omega_{n2}(\beta) \cos\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right) - \omega_{n1}(\beta) \sin\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right);$$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \prod_{j=k}^n \frac{c_{1j} \cdot a_{z,n+1}}{c_{2j} \cdot a_{zj}^2}; \sigma_n = \frac{c_{1n} \cdot a_{z,n+1}}{c_{2n} \cdot a_{zn}}; \sigma_n = \frac{1}{a_{z,n+1}}; G_k(z, \beta) = \\ &= \omega_{k-1,2}(\beta) \cos\left(\frac{b_k z}{a_{zk}}\right) - \omega_{k-1,1}(\beta) \sin\left(\frac{b_k z}{a_{zk}}\right); k = \overline{1, n}; b_j(\beta) = \\ &= (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}; j = \overline{1, n+1}; \omega_n(\beta) = \omega_{n1}^2(\beta) + \omega_{n2}^2(\beta); \\ \omega_{01}(q_1 l_0) &= -\nu_{11}^{01}(q_1 l_0); \omega_{02}(q_1 l_0) = -\nu_{11}^{02}(q_1 l_0); \omega_{jm}(\beta) = \\ &= \omega_{j-1,2}(\beta) \Psi_{1m}^j(q_j l_j; q_{j+1} l_j) - \omega_{j-1,1}(\beta) \Psi_{2m}^j(q_j l_j; q_{j+1} l_j); \\ m &= 1, 2; \Psi_{jm}^k(q_k l_k; q_{k+1} l_k) = \nu_{11}^{kj}(q_k l_k) \nu_{22}^{km}(q_{k+1} l_k) - \\ &\quad - \nu_{21}^{kj}(q_k l_k) \nu_{12}^{km}(q_{k+1} l_k); \end{aligned}$$

$$\nu_{ij}^{k1}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k \right) \cos(q_s z) \Big|_{z=l_m} = -\alpha_{ij}^k q_s \sin(q_s l_m) + \beta_{ij}^k \cos(q_s l_m);$$

$$\nu_{ij}^{k2}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k \right) \sin(q_s z) \Big|_{z=l_m} = \alpha_{ij}^k q_s \cos(q_s l_m) + \beta_{ij}^k \sin(q_s l_m);$$

$\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [22].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma, s) \right) \tilde{u}_1(t, \sigma, s, z) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma, s) \right) \tilde{u}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma, s) \right) \tilde{u}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t, \sigma, s, z) \\ \tilde{f}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{f}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(t, \sigma, s, z) \\ \tilde{u}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1^1(\sigma, s, z) \\ \tilde{g}_2^1(\sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1}^1(\sigma, s, z) \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1(t, \sigma, s, z) \\ \tilde{u}_2(t, \sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1}(t, \sigma, s, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1^2(\sigma, s, z) \\ \tilde{g}_2^2(\sigma, s, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1}^2(\sigma, s, z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де

$$q_j^2(\sigma, s) = a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yx}^2 s^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \beta) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \beta) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \beta) \sigma_{n+1} dz \right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + q_j^2(\sigma, s) + k_j^2 \right) \tilde{u}_j(t, \sigma, s, \beta) = \quad (28)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_j(t, \sigma, s, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) \tilde{g}_0(t, \sigma, s),$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_j \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_j^1(\sigma, s, \beta), \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_j \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_j^2(\sigma, s, \beta), \quad (29)$$

де

$$\tilde{u}_j(t, \sigma, s, \beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{u}_j(t, \sigma, s, z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1};$$

$$\tilde{f}_j(t, \sigma, s, \beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{f}_j(t, \sigma, s, z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1};$$

$$\tilde{g}_j^1(\sigma, s, \beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{g}_j^1(\sigma, s, z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1};$$

$$\tilde{g}_j^2(\sigma, s, \beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{g}_j^2(\sigma, s, z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad l_{n+1} = +\infty.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max \{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2 = q_1^2 - q_j^2$ ($j = \overline{1, n+1}$). Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + \Delta^2(\sigma, s, \beta) \tilde{u} = \tilde{f}(t, \sigma, s, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) \tilde{g}_0(t, \sigma, s), \quad (30)$$

$$\tilde{u} \Big|_{t=0} = \tilde{g}^1(\sigma, s, \beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{g}^2(\sigma, s, \beta), \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, \sigma, s, \beta) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_j(t, \sigma, s, \beta); \Delta^2(\sigma, s, \beta) = \beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + \\ &+ a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2; \tilde{f}(t, \sigma, s, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_j(t, \sigma, s, \beta), \tilde{g}^1(\sigma, s, \beta) = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_j^1(\sigma, s, \beta); \tilde{g}^2(\sigma, s, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_j^2(\sigma, s, \beta). \end{aligned}$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, \sigma, s, \beta) &= \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \tilde{g}^2(\sigma, s, \beta) + \\ &+ \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \tilde{g}^1(\sigma, s, \beta) + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)(t-\tau))}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \times \\ &\times \left[\tilde{f}(\tau, \sigma, s, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) \tilde{g}_0(\tau, \sigma, s) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$, зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1} [\dots] = \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots V_1(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_2(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}(t, \sigma, s, \beta) \right]$, де функція $\tilde{u}(t, \sigma, s, \beta)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)—(21):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j(t, \sigma, s, z) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \tilde{g}^2(\sigma, s, \beta) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \tilde{g}^1(\sigma, s, \beta) \right] V_j(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta + \\ & + \int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)(t-\tau))}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \left[\tilde{f}(\tau, \sigma, s, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} \times \right. \\ & \left. \times V_1(l_0, \beta) \tilde{g}_0(\tau, \sigma, s) \right] V_j(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta d\tau; j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

До функцій $\tilde{u}_j(t, \sigma, s, z)$, визначених формулами (34), послідовно застосуємо обернені оператори F_y^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_j(t, x, y, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) g_k^1(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) g_k^2(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_j(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau; j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{2}{\pi^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \times$$

$$\times V_j(z, \beta) V_k(\zeta, \beta) \Omega_n(\beta) \cos(|x - \xi| \sigma) \cos(|y - \eta| s) d\sigma ds d\beta$$

матриці впливу (функції впливу) на компоненти

$$W_j(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$$

аплікатної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t, x, \xi, y, \eta, z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Зауваження 1. У випадку $a_{xy}^2 = a_{yj}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 > 0$ формули (35) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)—(6) в ізотропному $(n+1)$ — шаровому напівобмеженому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дають можливість виділити із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z = l_0$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 0$), 2-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h > 0$).

Зауваження 3. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, x, y, z), g_j^1(x, y, z), g_j^2(x, y, z), g_0(t, x, y)$ проводиться безпосередньо.

2. $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; +\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови (5) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h \right) u_j \Big|_{y=0} = \omega_j(t, x, z); \quad \frac{\partial^k u_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; \quad k = 0, 1 \quad (36)$$

щодо змінної y , де h — деяка невід'ємна стала; $\omega(t, x, z) = \{ \omega_1(t, x, z), \omega_2(t, x, z), \dots, \omega_{n+1}(t, x, z) \}$ — задана обмежена неперервна функція.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(5), (36) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [20; 21; 16].

До задачі (1)—(5), (36) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty; +\infty)$ щодо змінної x . Інтегральний опе-

ратор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайової задачі (1)—(5), (36) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t, y, z); t > 0; y \in (0; +\infty); z \in I_n^+\}$ розв'язку системи рівнянь (10) з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right)\tilde{u}_j \Big|_{y=0} = \tilde{\omega}_j(t, \sigma, z); \frac{\partial^k \tilde{u}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1} \quad (37)$$

та умовами спряження (14).

До задачі (10)—(12), (37), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0; +\infty)$ щодо змінної y [21]:

$$F_{+y}[g(y)] = \int_0^{+\infty} g(y)K_y(y, s)dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (38)$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(y)K_y(y, s)ds \equiv g(y), \quad (39)$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -s^2 \tilde{g}(s) + K_y(0, s)\left(-\frac{dg}{dy} + hg\right) \Big|_{y=0}, \quad (40)$$

де ядро перетворення

$$K_y(y, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(sy) + h \sin(sy)}{\sqrt{s^2 + h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (38) внаслідок тотожності (40) початково-крайової задачі (10)—(12) (37), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t, z); t > 0; z \in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial z^2} + (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_j = \tilde{F}_j(t, \sigma, s, z) \quad (41)$$

з початковими умовами (19), крайовими умовами (20) та умовами спряження (21), де

$$\tilde{F}_j(t, \sigma, s, z) = \tilde{f}_j(t, \sigma, s, z) + a_{yj}^2 K_y(0, s) \tilde{\omega}_j(t, \sigma, z); j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (41), (19)—(21) збігається із задачею (18)—(21). Отже, відповідно до формул (34), єдиний розв'язок задачі (41), (19)—(21) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j(t, \sigma, s, z) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \tilde{g}_2^2(\sigma, s, \beta) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \tilde{g}_1^1(\sigma, s, \beta) \right] V_j(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta + \\ & + \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)(t-\tau))}{\Delta(\sigma, s, \beta)} \left[\tilde{F}(\tau, \sigma, s, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} \times \right. \\ & \left. \times V_1(l_0, \beta) \tilde{g}_0^2(\tau, \sigma, s) \right] V_j(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta d\tau; j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_j(t, \sigma, s, z)$, визначених формулами (42), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1} , одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_j(t, x, y, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) g_k^1(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) g_k^2(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_j(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yjk}(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_k(\tau, \xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta d\tau; j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (43)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(5), (36).

У формулах (43) застосовано компоненти

$$\begin{aligned} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = & \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\sigma, s, \beta)t)}{\Delta(\sigma, s, \beta)} V_j(z, \beta) \times \\ & \times V_k(\zeta, \beta) \Omega_n(\beta) \cos(|x-\xi|\sigma) K_y(y, s) K_y(\eta, s) d\sigma ds d\beta \end{aligned}$$

матриці впливу, компоненти $W_j(t, x, \xi, y, \eta, z)$ аплікатної матриці Гріна та компоненти

$$W_{yjk}(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$$

ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_{yjk}(t, x, \xi, y, z, \zeta)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (43), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (36) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої гіперболічної крайової задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (43) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $u=0$ крайових умов 1-го ($h \rightarrow \infty$) та 2-го роду ($h \rightarrow 0$); 3) аналіз розв'язку (43) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, x, y, z)$, $g_j^1(x, y, z)$, $g_j^2(x, y, z)$, $g_0(t, x, y)$, $\omega_j(t, x, z)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях, які описуються декартовою системою координат. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.
6. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.

9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
11. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
12. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
13. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
14. Громик А. П. Стационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2008. — 120 с.
15. Громик А. П. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. — 120 с.
16. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
17. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2010. — Вип. 19, ч. 1. — С. 47—59.
18. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 55—71.
19. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр. / НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
20. Снеддон И. Преобразования Фурье / И Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
21. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
22. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

The method of influence functions and Green's function (key solutions) developed integral image of accurate analytical solutions of algorithmic nature in hyperbolic boundary value problems in semi-confined piecewise-homogeneous spatial regions. To build major integrated solutions, corresponding Fourier transform to Cartesian axis and semi-axis are involved, and integral Fourier transform on the Cartesian semi-axis with n coupling points.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, matching, integral transformation, main solution.*

Отримано: 15.03.2011