Робота присвячена проблемі опису нерівноважних кореляцій квантових багаточастинкових систем. Побудовано розв'язок задачі Коші нелінійної квантової ієрархії рівнянь ББГКІ у формі розкладу по групах частинок, еволюція яких описується відповідного порядку кумулянтом груп нелінійних операторів ієрархії рівнянь фон Неймана.

Ключові слова: *нелінійна квантова ієрархія ББГКІ, ієрархія фон Неймана, кореляційний оператор, квантові багаточастинкові системи.*

Отримано: 06.05.2011

УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз-мат. наук,
Ю. В. Гнатюк, канд. фіз-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'нець-Подільський

ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компакнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *найкраща у розумінні опуклої неперервної функції рівномірна апроксимація, компакнозначне відображення, екстремальний елемент, теореми існування.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень доведено деякі теореми існування екстремального елемента, які узагальнюють на випадок цієї задачі відповідні теореми існування екстремального елемента для задачі найкращого у розумінні опуклої функції наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, встановлені у праці [1], розглянуто допоміжні твердження, які представляють і самостійний інтерес.

Постановка задачі. Нехай S -компакт, X -лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|, K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $C\left(S,K\left(X\right)\right)$ — множина багатозначних відображень компакта S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a\left(s\right)=K_s\in K\left(X\right)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K\left(X\right)$, $V\subset C\left(S,X\right)$, p — задана на X дійснозначна опукла неперервна функція.

Задачею найкращої у розумінні функції p рівномірної апроксимації відображення $a\in C\left(S,K\left(X\right)\right)$ множиною $V\subset C\left(S,X\right)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\left(a\right)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}\sup_{y\in a(s)}p\left(y-g\left(s\right)\right). \tag{1}$$

Якщо існує відображення $g^*\in V$ таке, що $\alpha_V^*\left(a\right)=$ $=\sup\limits_{s\in S}\sup\limits_{y\in a(s)}p\left(y-g^*\left(s\right)\right)$, то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Виникають задачі наближення, в яких міра відхилення між елементами лінійного нормованого простору оцінюється не з допомогою норми, а з допомогою деякої опуклої неперервної функції. Клас таких задач досить широкий. Він включає в себе задачі наближення по нормі, переднормі, функціоналу Мінковського, сублінійному функціоналу, функціоналу повільного зростання та низку інших задач (див., наприклад, [1—4]). Вищеназвані задачі є частковими випадками задачі відшукання величини (1). Результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі відшукання величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки.

Мета роботи. Для $a\in C\left(S,K\left(X\right)\right)$ встановити властивості функції $\Phi_a\left(g\right)=\sup\limits_{s\in S}\sup\limits_{y\in a(s)}p\left(y-g\left(s\right)\right),g\in C\left(S,X\right)$, та довести з їх використанням деякі теореми існування екстремального елемента для величини (1).

Деякі означення та допоміжні твердження. Нехай Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, Y^* — простір, спряжений з Y, F — дійснозначна функція, задана на Y.

Полярою F^* функції F, або функцією, спряженою з F, називається функція, задана на Y^*, означена рівністю

$$F^*\left(f\right)=\sup_{y\in Y}\left(f\left(y\right)-F\left(y\right)\right),f\in Y^*,$$

(див., наприклад, [3, с. 306]).

Множина $domp^* = \left\{ f : f \in X^*, p^*\left(f\right) < +\infty \right\}$ називається ефективною множиною функції p^* (див., наприклад, [3, с. 306]).

Нехай C — замкнена опукла множина в Y. Асимптотичним конусом C_∞ множини C називається множина таких точок $y \in Y$, що $x_0 + ty \in C$ для довільної точки $x_0 \in C$ і довільного $t > 0$ (див., наприклад, [3, с. 345]).

Нехай F — задана на Y опукла напівнеперервна знизу дійсно значна функція. Функція $F_\infty\left(y\right) = \sup\limits_{f \in dom\ F^*} f\left(y\right),\ y \in Y,$ називається асимптотичною функцією для F (див., наприклад, [3, с. 346, 347]).

Твердження 1. Нехай $\left\{h_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ — сім'я заданих на лінійному нормованому просторі Y опуклих неперервних дійснозначних функцій, де A — деякий компакт. Якщо відображення $\left(\alpha, x\right) \in A \times Y \to h_\alpha\left(x\right)$ неперервне на $A \times Y,$ то для функції $h\left(x\right) = \max\limits_{\alpha \in A} h_\alpha\left(x\right),\ x \in Y$, має місце рівність

$$h_\infty\left(y\right) = \sup_{\alpha \in A}\left(h_\alpha\right)_\infty\left(y\right) = \sup_{\alpha \in A}\ \sup_{f \in dom\, h_\alpha^*} f\left(y\right) = \sup_{f \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} dom\, h_\alpha^*} f\left(y\right), y \in Y. \quad (2)$$

Доведення. Перш за все зазначимо, що функція $h\left(x\right),\ x \in Y$, є опуклою та неперервною на Y функцією (див., наприклад, [3, с. 330]).

Тоді (див., наприклад, [3, с. 346, 347])

$$h_\infty\left(y\right) = \sup_{t > 0} \frac{h\left(x_0 + ty\right) - h\left(x_0\right)}{t} = \sup_{y \in dom\, h^*} f\left(y\right),$$

де x_0 — довільна фіксована точка простору Y.

Оскільки $dom\, h_\alpha^* \subset dom\, h^*, \alpha \in A,$ то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} dom\, h_\alpha^* \subset dom\, h^*.$

Звідси випливає, що

$$\left(h_\alpha\right)_\infty\left(y\right) = \sup_{f \in dom\, h_\alpha^*} f\left(y\right) \le \sup_{f \in dom\, h^*} f\left(y\right) = h_\infty\left(y\right), y \in Y.$$

Тому $\sup\limits_{\alpha \in A}\left(h_\alpha\right)_\infty\left(y\right) \le h_\infty\left(y\right), y \in Y.$ Переконаємось, що

$$\sup_{\alpha \in A}\left(h_\alpha\right)_\infty\left(y\right) = h_\infty\left(y\right), y \in Y. \quad (3)$$

Припустимо, що для деякого $y \in Y$ $\sup\limits_{\alpha \in A}\left(h_\alpha\right)_\infty\left(y\right) < h_\infty\left(y\right).$

Тоді існує таке число a, що $\sup\limits_{\alpha\in A}(h_\alpha)_\infty(y) < a < h_\infty(y)$.

Звідси випливає, що $(h_\alpha)_\infty(y) < a$ для всіх $\alpha \in A$. Тому

$$\sup_{t>0}\frac{h_\alpha(x_0+ty)-h_\alpha(x_0)}{t} < a, \alpha \in A,$$

і, отже,

$$\frac{h_\alpha(x_0+ty)-h_\alpha(x_0)}{t} < a, \alpha \in A, t > 0. \tag{4}$$

З другого боку

$$a < h_\infty(y) = \sup_{t>0}\frac{h(x_0+ty)-h(x_0)}{t} =$$

$$= \sup_{t>0}\frac{\max\limits_{\alpha\in A} h_\alpha(x_0+ty) - \max\limits_{\alpha\in A} h_\alpha(x_0)}{t}.$$

Звідси випливає, що існує $t > 0$ і $\alpha_t \in A$ такі, що

$$a < \frac{\max\limits_{\alpha\in A} h_\alpha(x_0+ty) - \max\limits_{\alpha\in A} h_\alpha(x_0)}{t} = \frac{h_{\alpha_t}(x_0+ty) - \max\limits_{\alpha\in A} h_\alpha(x_0)}{t} \le$$

$$\le \frac{h_{\alpha_t}(x_0+ty)-h_{\alpha_t}(x_0)}{t},$$

що суперечить (4).

Отже, для всіх $y \in Y$ справедлива рівність (3). Оскільки

$$\sup_{\alpha\in A}(h_\alpha)_\infty(y) = \sup_{\alpha\in A}\sup_{f\in dom\, h_\alpha^*} f(y) = \sup_{f\in\bigcup\limits_{\alpha\in A} dom\, h_\alpha^*} f(y), y \in Y,$$

то з (3) випливає рівність (2).

Твердження доведено.

Твердження 2. Нехай $s \in S$. Відображення $(y, g) \in X \times C(S, X) \to$ $\to p(y - g(s))$ є неперервним на $X \times C(S, X)$.

Доведення. Нехай $(y_0, g_0) \in X \times C(S, X), \varepsilon > 0.$ Оскільки функція p є неперервною на X, то вона неперервна в точці $y_0 - g_0(s)$. Тоді існує окіл $O(y_0)$ точки y_0 та окіл $O(g_0(s))$ точки $g_0(s)$ простору X такі, що

$$\left|p(y-z) - p(y_0 - g_0(s))\right| < \varepsilon, y \in O(y_0), z \in O(g_0(s)). \tag{5}$$

Оскільки відображення $g \in C(S,X) \to g(s)$ є неперервним на $C(S,X)$ то для околу $\mathrm{O}(g_0(s))$ існує окіл $\mathrm{O}(g_0)$ точки g_0 простору $C(S,X)$ такий, що $g(s) \in \mathrm{O}(g_0(s))$ для всіх $g \in \mathrm{O}(g_0)$. З урахуванням (5) звідси одержимо, що

$$\left|p(y-g(s))-p(y_0-g_0(s))\right| < \varepsilon, y \in \mathrm{O}(y_0), g \in \mathrm{O}(g_0).$$

Це й означає, що відображення

$$(y,g) \in X \times C(S,X) \to p(y-g(s)),$$

є неперервним на $X \times C(S,X)$.

Твердження доведено.

Твердження 3. Нехай $a \in C(S,K(X)), s \in S$, $y \in a(s)$. Відображення $g \in C(S,X) \to p(y-g(s))$, є опуклим та неперервним на $C(S,X)$.

Доведення. Для $g_1, g_2 \in C(S,X), \beta \in [0,1]$ з урахуванням опуклості функції p на X одержимо, що

$$p\left(y-\left(\beta g_1+(1-\beta)g_2\right)(s)\right)=p\left(\beta(y-g_1)+(1-\beta)(y-g_2(s))\right) \le$$
$$\le \beta p(y-g_1(s))+(1-\beta)p\left(\left(y-g_2(s)\right)\right).$$

Це й означає, що відображення $g \in C(S,X) \to p(y-g(s))$ є опуклим на $C(S,X)$. Неперервність цього відображення на $C(S,X)$ випливає з твердження 2.

Твердження доведено.

Твердження 4. Нехай $a \in C(S,K(X))$. Тоді:

а) для кожного $s \in S$, $g \in C(S,X)$ існує $\max\limits_{y \in a(s)} p(y-g(s))$;

б) відображення $(s,g) \in S \times C(S,X) \to \max\limits_{y \in a(s)} p(y-g(s))$

є неперервним на $S \times C(S,X)$.

Доведення. Переконаємось у справедливості твердження а). Згідно з твердженням 2 для $s \in S$ і $g \in C(S,X)$ відображення $y \in X \to p(y-g(s))$ є неперервним на X. Оскільки $a(s)$ — компакт простору X, то відповідно до узагальненої теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [5, с. 28]) існує $\max\limits_{y\in a(s)} p\left(y-g(s)\right)$.

Доведемо твердження б). Нехай $\left(s_0, g_0\right)\in S\times C\left(S,X\right), A\in R$ і

$$\max_{y\in a(s_0)} p\left(y-g_0\left(s_0\right)\right)< A.$$

Звідси випливає, що

$$p\left(y-g_0\left(s_0\right)\right)< A, y\in a\left(s_0\right). \tag{6}$$

Внаслідок неперервності функції p на X, співвідношення (6) для $y\in a\left(s_0\right)$ існує окіл $\mathrm{O}\left(y\right)$ точки y та окіл $\mathrm{O}_y\left(g_0\left(s_0\right)\right)$ точки $g_0\left(s_0\right)$ простору X такі, що

$$p\left(z-t\right)< A, z\in \mathrm{O}\left(y\right),\ t\in \mathrm{O}_y\left(g_0\left(s_0\right)\right). \tag{7}$$

Легко переконатись, що відображення $\left(s,g\right)\in S\times C\left(S,X\right)\to g\left(s\right)$ є неперервним на $S\times C\left(S,X\right)$.

Тому існує окіл $\mathrm{O}_y\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S та окіл $\mathrm{O}_y\left(g_0\right)$ точки g_0 простору $C\left(S,X\right)$ такі, що $g\left(s\right)\in \mathrm{O}_y\left(g_0\left(s_0\right)\right)$ для всіх $s\in \mathrm{O}_y\left(s_0\right),\ g\in \mathrm{O}_y\left(g_0\right)$.

З урахуванням цього та співвідношення (7) робимо висновок, що для $y\in a\left(s_0\right)$

$$p\left(z-g\left(s\right)\right)<A, z\in \mathrm{O}\left(y\right), s\in \mathrm{O}_y\left(s_0\right), g\in \mathrm{O}_y\left(g_0\right). \tag{8}$$

Оскільки $\bigcup\limits_{y\in a(s_0)} \mathrm{O}\left(y\right)\supset a\left(s_0\right)$ і $a\left(s_0\right)$ є компактом простору X, то з відкритого покриття $\mathrm{O}\left(y\right), y\in a\left(s_0\right)$, компактна $a\left(s_0\right)$ можна виділити скінченне підпокриття $\mathrm{O}\left(y_i\right), y_i\in a\left(s_0\right), i=\overline{1,m}$, тобто

$$a\left(s_0\right)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{O}\left(y_i\right). \tag{9}$$

Нехай

$$\mathrm{O}^1\left(s_0\right)=\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{O}_{y_i}\left(s_0\right), \mathrm{O}\left(g_0\right)=\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{O}_{y_i}\left(g_0\right),$$

$$z\in\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{O}\left(y_i\right), s\in \mathrm{O}^1\left(s_0\right), g\in \mathrm{O}\left(g_0\right).$$

Тоді існує індекс $i_z\in\left\{1,\ldots,m\right\}$ такий, що $z\in \mathrm{O}\left(y_{i_z}\right)$, Зрозуміло, що $s \in \mathrm{O}_{i_z}\left(s_0\right), g \in \mathrm{O}_{y_{i_z}}\left(g_0\right)$. З урахуванням (8) звідси робимо висновок, що

$$p\left(z-g\left(s\right)\right) < A, z \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{O}\left(y_i\right), s \in \mathrm{O}^1\left(s_0\right), g \in \mathrm{O}\left(g_0\right). \qquad (10)$$

Оскільки $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$ і має місце співвідношення (9), то існує окіл $\mathrm{O}^2\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S такий, що

$$a\left(s\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{O}\left(y_i\right), s \in \mathrm{O}^2\left(s_0\right). \qquad (11)$$

Покладемо $\mathrm{O}\left(s_0\right) = \mathrm{O}^1\left(s_0\right) \bigcap \mathrm{O}^2\left(s_0\right)$. Тоді з (10), (11) одержимо, що

$$p\left(y-g\left(s\right)\right) < A, s \in \mathrm{O}\left(s_0\right), y \in a\left(s\right), g \in \mathrm{O}\left(g_0\right). \qquad (12)$$

Це й означає, що відображення

$$\left(s, g\right) \in S \times C\left(S, X\right) \to \max_{y \in a\left(s\right)} p\left(y-g\left(s\right)\right)$$

є напівнеперервним зверху у точці $\left(s_0, g_0\right)$.

Переконаємося, що воно напівнеперервне знизу у цій точці. Нехай $B \in R$ і

$$\max_{y \in a\left(s_0\right)} p\left(y-g_0\left(s_0\right)\right) = p\left(y_0-g_0\left(s_0\right)\right) > B,\ y_0 \in a\left(s_0\right). \qquad (13)$$

Внаслідок неперервності функції p на X та співвідношення (13) існує окіл $\mathrm{O}\left(0\right)$ точки 0 та окіл $\mathrm{O}\left(g_0\left(s_0\right)\right)$ точки $g_0\left(s_0\right)$ простору X такі, що

$$p\left(y_0-z-t\right) > B,\ z \in \mathrm{O}\left(0\right),\ t \in \mathrm{O}\left(g_0\left(s_0\right)\right). \qquad (14)$$

Оскільки $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$, а відображення

$$\left(s, g\right) \in S \times C\left(S, X\right) \to g\left(s\right)$$

є неперервним на $S \times C\left(S, X\right)$, то існує окіл $\mathrm{O}\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S та окіл $\mathrm{O}\left(g_0\right)$ точки g_0 простору $C\left(S, X\right)$ такі, що

$$a\left(s_0\right) \subset a\left(s\right) + \mathrm{O}\left(0\right),\ g\left(s\right) \in \mathrm{O}\left(g_0\left(s_0\right)\right), \qquad (15)$$

для всіх $s \in \mathrm{O}\left(s_0\right)$, $g \in \mathrm{O}\left(g_0\right)$.

Оскільки $y_0 \in a\left(s_0\right)$, то внаслідок (15) для кожного $s \in \mathrm{O}\left(s_0\right)$ існують $y_s \in a\left(s\right)$ та $z_s \in \mathrm{O}\left(0\right)$ такі, що $y_0 = y_s + z_s$.

Звідси та з (14), (15) одержимо, що

$$p\left(y_s - g(s)\right) > B,\ s \in \mathrm{O}(s_0),\ y_s \in a(s),\ g \in \mathrm{O}(g_0).$$

Тому і $\max\limits_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right) > B,\ s \in \mathrm{O}(s_0),\ g \in \mathrm{O}(g_0)$.

Цей означає, що відображення

$$(s,g) \in S \times C(S,X) \to \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$$

є напівнеперервним знизу у точці (s_0, g_0).

Вище було встановлено, що воно напівнеперервне зверху в цій точці.

Тому відображення $(s,g) \in S \times C(S,X) \to \max\limits_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$ є неперервним в точці (s_0, g_0). Оскільки точку (s_0, g_0) вибрано довільно із $S \times C(S,X)$, то воно неперервне на $S \times C(S,X)$.

Твердження доведено.

Основні результати.

Теорема 1. Нехай $a \in C(S, K(X))$. Тоді:

- для кожного $s \in S$ функція

$$g \in C(S,X) \to \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$$

є опуклою і неперервною на $C(S,X)$;

- для кожного $g \in C(S,X)$ існує $\max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$;
- функція $\Phi_a(g) = \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right),\ g \in C(S,X)$,

є опуклою та неперервною на $C(S,X)$.

Доведення. Нехай $a \in C(S, K(X)), s \in S, g \in C(S,X)$. Згідно з твердженням 4 існує $\max\limits_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$.

Для $s \in S$, $y \in a(s)$ функція $g \in C(S,X) \to p\left(y - g(s)\right)$ є опуклою та неперервною на $C(S,X)$ (див. твердження 3). Тоді функція $g \in C(S,X) \to \max\limits_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$ також є опуклою на $C(S,X)$, як максимум опуклих функцій (див., наприклад, [6, с. 180]).

Згідно з твердженням 4 відображення

$$(s,g) \in S \times C(S,X) \to \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$$

є неперервним на $S \times C(S, X)$. Звідси випливає, що для кожного $s \in S$ функція $g \in C(S, X) \to \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$ є неперервною на $C(S, X)$, для кожного $g \in C(S, X)$ функція $s \in S \to \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$ є неперервною по s на S.

Оскільки S — компакт, то відповідно до узагальненої теореми Вейєрштасса (див., наприклад, [5, с. 28]) для кожного $g \in C(S, X)$ існує $\max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$.

З урахуванням вищезазначеного та теореми 6.4.9 [3, с. 330] функція $\Phi_a(g) = \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$, $g \in C(S, X)$, є неперервною та опуклою на $C(S, X)$ як максимум неперервних та опуклих функцій $g \in C(S, X) \to \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$, де $s \in S$, таких, що відображення $(s, g) \in S \times C(S, X) \to \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$ є неперервним на $S \times C(S, X)$.

Теорему доведено.

З урахуванням теореми 1 для $a \in C(S, K(X))$ задачу відшукання величини (1) можна записати у такому вигляді

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \; p(y - g(s)). \tag{16}$$

Елемент $g^* \in V$ будемо називати екстремальним для величини (16), якщо $\alpha_V^*(a) = \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} \; p(y - g^*(s))$.

Надалі, як і вище, для $a \in C(S, K(X))$ через Φ_a будемо позначати функцію на $C(S, X)$, яка задається рівністю

$$\Phi_a(g) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p(y - g(s)), \; g \in C(S, X).$$

Твердження 5. Для будь-якого $h \in C(S, X)$ справедлива рівність

$$(\Phi_a)_\infty(h) = \sup_{s \in S} p_\infty(-h(s)). \tag{17}$$

Доведення. Маємо, що $\Phi_a(g) = \max\limits_{s \in S} \Phi_a^s(g)$, $g \in C(S, X)$, де для $s \in S$ $\Phi_a^s(g) = \max\limits_{y \in a(s)} p(y - g(s))$, $g \in C(S, X)$.

Оскільки $\left\{\Phi_a^s\right\}_{s\in S}$ — сім'я заданих на лінійному нормованому просторі $C\left(S,X\right)$ опуклих неперервних дійснозначних функцій (див. теорему 1), для якої відображення $\left(s,g\right)\in S\times C\left(S,X\right)\to\Phi_a^s\left(g\right)$ неперервне на $S\times C\left(S,X\right)$ (див. твердження 4), то згідно з твердженням 1

$$\left(\Phi_a\right)_\infty\left(h\right)=\sup_{s\in S}\left(\Phi_a^s\right)_\infty\left(h\right),\ h\in C\left(S,X\right). \tag{18}$$

Маємо, що для $s\in S$ $\Phi_a^s\left(g\right)=\max_{y\in a(s)}\Phi_a^{s,y}\left(g\right)$, $g\in C\left(S,X\right)$, де для кожного $y\in a\left(s\right)$ $\Phi_a^{s,y}\left(g\right)=p\left(y-g\left(s\right)\right)$, $g\in C\left(S,X\right)$.

Оскільки $\left\{\Phi_a^{s,y}\right\}_{y\in a(s)}$ — сім'я заданих на $C\left(S,X\right)$ опуклих неперервних дійснозначних функцій (див. твердження 3), для якої відображення $\left(y,g\right)\in X\times C\left(S,X\right)\to\Phi_a^{s,y}\left(g\right)$, є неперервним на $X\times C\left(S,X\right)$ (див. твердження 2), $a\left(s\right)$ — компакт, то згідно з твердженням 1 та твердженням 6.8.3 [3, с. 346] для $s\in S$

$$\begin{aligned}\left(\Phi_a^s\right)_\infty\left(h\right)&=\sup_{y\in a(s)}\left(\Phi_a^{s,y}\right)_\infty\left(h\right)=\\&=\sup_{y\in a(s)}\sup_{t>0}\frac{\Phi_a^{s,y}\left(g_0+th\right)-\Phi_a^{s,y}\left(g_0\right)}{t}=\\&=\sup_{y\in a(s)}\sup_{t>0}\frac{p\left(y-\left(g_0\left(s\right)+th\left(s\right)\right)\right)-p\left(y-g_0\left(s\right)\right)}{t}=\\&=\sup_{y\in a(s)}p_\infty\left(-h\left(s\right)\right)=p_\infty\left(-h\left(s\right)\right),\end{aligned} \tag{19}$$

де g_0 — довільний фіксований елемент простору $C\left(S,X\right)$.

З (18), (19) випливає рівність (17).

Твердження доведено.

Твердження 6. Нехай V — опукла замкнена локально компактна множина, в тому числі і скінченновимірний простір, $\left\{g_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ — необмежена послідовність множини V, для якої числова послідовність $\left\{\Phi_a\left(g_m\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена зверху. Тоді існує ненульовий елемент h множини V_∞ такий, що $\sup_{s\in S}p_\infty\left(-h\left(s\right)\right)\le 0$.

Доведення. Оскільки функція $\Phi_a\left(g\right)$, $g \in C\left(S, X\right)$, є опуклою і неперервною на $C\left(S, X\right)$ (див. теорему 1), то згідно з лемою 2 [1] існує ненульовий елемент h множини V_∞ такий, що $\left(\Phi_a\right)_\infty\left(h\right) \le 0.$

Відповідно до твердження 5 $\left(\Phi_a\right)_\infty\left(h\right) = \sup\limits_{s\in S} p_\infty\left(-h\left(s\right)\right)$.

Тому $\sup\limits_{s\in S} p_\infty\left(-h\left(s\right)\right) \le 0.$

Твердження доведено.

Твердження 7. Нехай V — опукла замкнена локально компакна множина, в тому числі і скінченновимірний підпростір,

$$\lim_{\substack{g\in V,\\ \|g\|\to\infty}} \max_{s\in S} p\left(-g\left(s\right)\right) = +\infty. \tag{20}$$

Якщо $g_m \in V$, $m = 1,2,...,$ і числова послідовність $\left\{\Phi_a\left(g_m\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена зверху, то послідовність $\left\{g_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю.

Доведення. Припустимо, що послідовність $\left\{g_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ необмежена. Тоді внаслідок твердження 6 існує ненульовий елемент $h \in V_\infty$ такий, що $\sup\limits_{s\in S} p_\infty\left(-h\left(s\right)\right) \le 0.$

Тому (див., наприклад, [3, с. 347])

$$\sup_{t>0} \frac{\Phi_0\left(g_1 + th\right) - \Phi_0\left(g_1\right)}{t} = \left(\Phi_0\right)_\infty\left(h\right) = \sup_{s\in S} p_\infty\left(-h\left(s\right)\right) \le 0.$$

Звідси випливає, що

$$\Phi_0\left(g_1 + th\right) \le \Phi_0\left(g_1\right), t > 0. \tag{21}$$

Оскільки $h \in V_\infty$ і $g_1 \in V$, то $g_1 + th \in V$ при $t \ge 0,$ причому

$$\left\|g_1 + th\right\| \ge t\left\|h\right\| - \left\|g_1\right\| \to +\infty \text{ при } t \to +\infty .$$

Тоді згідно з (20)

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_0\left(g_1 + th\right) = \lim_{t\to\infty} \max_{s\in S} p\left(-\left(g_1\left(s\right) + th\left(s\right)\right)\right) = +\infty ,$$

що суперечить (21).

Одержана суперечність доводить, що послідовність $\left\{g_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою.

Твердження доведено.

Надалі будемо позначати через

$$M = \left\{ f \in dom p^* : \sup_{g \in V} \max_{s \in S} f\left(g\left(s\right)\right) < +\infty \right\}.$$

Твердження 8. Якщо $M \neq \varnothing$, то $\alpha_V^*\left(a\right) > -\infty$ для всіх $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$.

Доведення. Нехай $f_0 \in M$ і $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$. Тоді для всіх $s \in S$, $y \in a\left(s\right), g \in V$ з урахуванням теореми Фенхеля-Моро (див., наприклад, [6, с. 186]) одержимо, що

$$p\left(y - g\left(s\right)\right) = \max_{f \in dom\ p^*}\left(f\left(y\right) - f\left(g\left(s\right)\right) - p^*\left(f\right)\right) \geq$$

$$\geq f_0\left(y\right) - f_0\left(g\left(s\right)\right) - p^*\left(f_0\right).$$

Тому

$$\max_{s \in S}\max_{y \in a(s)} p\left(y - g\left(s\right)\right) \geq \max_{s \in S}\max_{y \in a(s)} f_0\left(y\right) - \max_{s \in S} f_0\left(g\left(s\right)\right) - p^*\left(f_0\right).$$

Звідки для всіх $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$

$$\alpha_V^*\left(a\right) = \inf_{g \in V}\max_{s \in S}\max_{y \in a(s)} \quad p\left(y - g\left(s\right)\right) \geq$$

$$\geq \max_{s \in S}\max_{y \in a(s)} f_0\left(y\right) - \sup_{g \in V}\max_{s \in S} f_0\left(g\left(s\right)\right) - p^*\left(f_0\right) > -\infty,$$

оскільки $\sup_{g \in V}\max_{s \in S} f_0\left(g\left(s\right)\right) < +\infty$.

Твердження доведено.

Наслідок 1. Якщо $0 \in dom\ p^*$, то $\alpha_V^*\left(a\right) > -\infty$ для всіх $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$.

Теорема 2. Нехай V — опукла замкнена локально компактна множина, в тому числі і скінченновимірний підпростір, $M \neq \varnothing$, $\lim\limits_{\substack{g \in V, \\ \|g\| \to \infty}} \max\limits_{s \in S} p\left(-g\left(s\right)\right) = +\infty,$ то для будь-якого $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$ V є множиною існування екстремального елемента для величини (16).

Доведення. Нехай $\left\{g_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ є мінімізуючою послідовністю для величини (16), тобто

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_a\left(g_m\right) = \alpha_V^*\left(a\right), g_m \in V, m = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Оскільки $M \neq \varnothing$, то $\alpha_V^*(a) \in R$. Зі співвідношення (22) тоді випливає, що послідовність $\left\{\Phi_a(g_m)\right\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою. Згідно з твердженням 7 обмеженою буде також послідовність $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Оскільки V є локально компактною множиною, то існує збіжна підпослідовність $\left\{g_{m_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$. Нехай $\lim\limits_{j\to\infty} g_{m_j} = g^*$. Внаслідок замкнености V $g^* \in V$. Оскільки $\lim\limits_{j\to\infty} \Phi_a\left(g_{m_j}\right) = \alpha_V^*(a)$ і функція $\Phi_a(g)$, $g \in C(S,X)$, є неперервною на $C(S,X)$ (див., теорему 1), то

$$\Phi_a\left(g^*\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) = \alpha_V^*(a).$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (16).

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай V — опукла замкнена локально компакна множина, в тому числі і скінченновимірний підпростір, $M \neq \varnothing$, $\sup\limits_{s\in S} p_\infty\left(-h(s)\right) > 0$ для всіх $h \in V_\infty, h \neq 0,$ то для будь-якого $a \in C\left(S, K(X)\right)$ V є множиною існування екстремального елемента для величини (16).

Доведення. Переконаємось, що за умов теореми

$$\lim_{\substack{g\in V,\\ \|g\|\to\infty}} \max_{s\in S} p\left(-g(s)\right) = +\infty. \tag{23}$$

Припустимо супротивне. Тоді існує $c \in R$ та послідовність $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$, $g_m \in V$, $m = 1,2,...,$ $\lim\limits_{m\to\infty} \|g_m\| = \infty$, такі, що

$$\max_{s\in S} p\left(-g_m(s)\right) \leq c.$$

Згідно з твердженням 6 існує ненульовий елемент $h \in V_\infty$, для якого $\sup\limits_{s\in S} p_\infty\left(-h(s)\right) \leq 0$, що суперечить умові теореми. Отже, рівність (23) має місце. Згідно з теоремою 2 V є множиною існування.

Теорему доведено.

Наслідок 2. Якщо V — опукла замкнена локально компактна множина, що містить 0, в тому числі і скінченновимірний підпростір, $M \neq \varnothing$, $\sup\limits_{s\in S} p_\infty\left(-g(s)\right) > 0$ для всіх $g \in V$, $g \neq 0,$ то для будь-якого

$a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$ V є множиною існування екстремального елемента для величини (16).

Доведення. Нехай $h \in V_\infty$, $h \neq 0$. Тоді $0 + th = th \in V$ для всіх $t \geq 0$ в тому числі і для $t = 1$. Отже $h \in V$, $h \neq 0$. Згідно з умовою теореми $\sup\limits_{s \in S} p_\infty\left(-h\left(s\right)\right) > 0$. Тоді згідно з теоремою 3 V є множиною існування екстремального елемента для величини (16).

Наслідок доведено.

Теорема 4. Нехай V — скінченновимірний підпростір простору $C\left(S, X\right)$, $V_1 = \left\{g \in V : p_\infty\left(g\left(s\right)\right) \leq 0, s \in S\right\}$ — підпростір, $M \neq \varnothing$. Тоді для будь-якого $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$ V є множиною існування екстремального елемента для величини (16).

Доведення. Нехай V_2 — підпростір V, що доповнює V_1 до V. Тоді кожна точка $g \in V$ подається у вигляді $g = g_1 + g_2$, де $g_1 \in V_1$, $g_2 \in V_2$.

Тому, враховуючи теорему Фенхеля-Моро (див., наприклад, [6, с. 186]), властивості точної верхньої межі і зазначене вище для $s \in S$, $y \in a\left(s\right)$ та $g = g_1 + g_2 \in V$, $g_1 \in V_1$, $g_2 \in V_2$, можна записати наступні співвідношення

$$p\left(y - g\left(s\right)\right) = p\left(y - g_1\left(s\right) - g_2\left(s\right)\right) =$$

$$= \max_{f \in dom\, p^*}\left(f\left(y - g_2\left(s\right)\right) - p^*\left(f\right) - f\left(g_1\left(s\right)\right)\right) \geq$$

$$\geq \max_{f \in dom\, p^*}\left(f\left(y - g_2\left(s\right)\right) - p^*\left(f\right)\right) - \sup_{f \in dom\, p^*} f\left(g_1\left(s\right)\right) =$$

$$= p\left(y - g_2\left(s\right)\right) - p_\infty\left(g_1\left(s\right)\right) \geq p\left(y - g_2\left(s\right)\right).$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \alpha_V^*\left(a\right) &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a\left(s\right)} p\left(y - g\left(s\right)\right) \geq \\ &\geq \inf_{g_2 \in V_2} \max_{s \in S} \max_{y \in a\left(s\right)} p\left(y - g_2\left(s\right)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

З іншого боку, оскільки $V_2 \subset V$, то

$$\begin{aligned} \alpha_V^*\left(a\right) &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a\left(s\right)} p\left(y - g\left(s\right)\right) \leq \\ &\leq \inf_{g_2 \in V_2} \max_{s \in S} \max_{y \in a\left(s\right)} p\left(y - g_2\left(s\right)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

З (23), (24) маємо, що

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\Big(y - g(s)\Big) = \\ = \inf_{g_2\in V_2} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\Big(y - g_2(s)\Big). \qquad (25)$$

Звідси випливає, що для завершення доведення теореми достатньо переконатися, що існує екстремальний елемент для величини

$$\inf_{g_2\in V_2} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\Big(y - g_2(s)\Big). \qquad (26)$$

Нехай $g_2 \in V_2$ і $g_2 \neq 0$. Оскільки підпростір V_2 доповнює підпростір V_1 до V, то $-g_2 \notin V_1$.

Звідси випливає, що існує точка $s_{g_2} \in S$ така, для якої $p_\infty\Big(-g_2\big(s_{g_2}\big)\Big) > 0$. Тому і $\sup_{s\in S} p_\infty\big(-g_2(s)\big) > 0$.

Згідно з теоремою 3 V_2 є множиною існування екстремального елемента для величини (26). Оскільки має місце рівність (25), то кожний екстремальний елемент для величини (26) буде також екстремальним елементом для величини (16).

Теорему доведено.

Теорема 5. Якщо V — слабко компактна множина простору $C(S,X)$, $M \neq \varnothing$,то для будь-якого $a \in C\big(S, K(X)\big)$ екстремальний елемент для величини (16) існує.

Доведення. Нехай V — слабко компактна множина простору $C(S,X), a \in C\big(S,K(X)\big)$ і $\{g_m\}_{m=1}^\infty, g_m \in V, m = 1,2,...,$ — мінімізуюча послідовність для величини (16), тобто

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_a(g_m) = \lim_{m\to\infty} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\Big(y - g_m(s)\Big) = \alpha_V^*(a). \qquad (27)$$

Оскільки $M \neq \varnothing$, то $\alpha_V^*(a) \in R$ (див. твердження 8).

Внаслідок того, що V є слабко компактною множиною простору $C(S,X)$ і $g_m \in V, m = 1,2,...,$ то існує підпослідовність $\left\{g_{m_j}\right\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{g_m\}_{m=1}^\infty$, яка слабко збігається до $g^* \in V$. Переконаємося, що

$$\Phi_a\left(g^*\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\Big(y - g^*(s)\Big) = \alpha_V^*(a). \qquad (28)$$

Припустимо, що $\Phi_a\left(g^*\right) > \alpha_V^*(a)$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\Phi_a\left(g^*\right) > \alpha_V^*\left(a\right) + \varepsilon . \tag{29}$$

Розглянемо множину

$$D = \left\{ g :\ g \in C\left(S, X\right), \Phi_a\left(g\right) \le \alpha_a^*\left(V\right) + \varepsilon \right\}.$$

Згідно з (29) $g^* \notin M$. З неперервності та опуклості функції $\Phi_a\left(g\right), g \in C\left(S, X\right)$, і властивостей точної нижньої межі випливає, що множина D є непорожньою замкненою опуклою множиною.

За теоремою про відокремлення замкненої опуклої множини і точки (див., наприклад, [7, с. 31]) існують ненульовий функціонал $\Psi \in \left(C\left(S, X\right)\right)^*$ та число c такі, що

$$\Psi\left(g^*\right) > c > \Psi\left(g\right),\ g \in D . \tag{30}$$

Маємо $\lim\limits_{j\to\infty} \Phi_a\left(g_{m_j}\right) = \alpha_a^*\left(V\right)$ (див. (27)).

Звідси випливає, що існує номер $j_0 \in N$ такий, що $g_{m_j} \in D$ для всіх $j \ge j_0$.

Згідно з (30) тоді

$$\Psi\left(g^*\right) > c > \Psi\left(g_{m_j}\right),\ j \ge j_0 . \tag{31}$$

Оскільки $g_{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{сл.} g^*$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \Psi\left(g_{m_j}\right) = \Psi\left(g^*\right)$.

Тому з (31) матимемо, що $\Psi\left(g^*\right) > c \ge \Psi\left(g^*\right)$.

Одержана суперечність доводить, що має місце рівність (28). Це означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (16).

Теорему доведено.

Висновок. Для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень доведено деякі теореми існування екстремального елемента, низку допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Список використаних джерел:

1. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — 4, №5. — С. 608—613.
2. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. — Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1968. — 178 с.

3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
4. Бейко И. В. Обобщенная *L* — проблема моментов и метод ее решения / И. В. Бейко, В. А. Гнатюк, В. В. Мойко // Укр. мат. журн. — 1978. — 30, № 2. — С. 147—154.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ/ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 742 с.
6. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
7. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 352 с.

We prove some existence theorems of extreme elements for the problem of the best in the sense of convex continuous functions uniform approximation of continuous compact-valued mapping by the set of continuous single-valued mappings.

Key words: *the best in the sense of convex continuous functions uniform approximation, theorem existence, extreme element, compact-valued mapping.*

Отримано: 05.04.2011

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ЛІПШІЦЕВОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

У статті встановлено критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірна апроксимація, скінченновимірний підпростір.*

Вступ. Проблеми відновлення функціональних залежностей, які не означені точно, приводять до задачі найкращої у деякому розумінні апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень.

