УДК 517.9

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Отримано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}\left(q_{n-1,m} - q_{n,m}\right) - a_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n+1,m}\right) + \\ + b_{n,m-1}\left(q_{n,m-1} - q_{n,m}\right) - b_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n,m+1}\right),\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [8], [10], [11]. У статті [14] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних ґратках, а в статтях [2], [3], [12] та [13] — біжучі хвилі. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів (випадок одновимірної ґратки) вивчалося в [5] і [9], а для систем осциляторів на двовимірних ґратках — в [4]. Зауважимо, що в статті [4] доведено існування та єдиність глобального розв'язку для систем осциляторів із нелінійностями, зріст яких на нескінченності не вище 2-го степеня. Результат цієї статті поширює результат статті [4].

Метою статті є одержання умов існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Постановка задачі та основні припущення. Потенціал $U_{n,\,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,\,m}(r) = -\dfrac{d_{n,\,m}}{2}r^2 + V_{n,\,m}(r)$ і покладемо $c_{n,\,m} = = d_{n,\,m} - a_{n-1,\,m} - a_{n,\,m} - b_{n,\,m-1} - b_{n,\,m}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m}q_{n,\,m} - V'_{n,\,m}(q_{n,\,m}),\ \left(n,\, m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q)\,, \tag{4}$$

де

$$\left(Aq\right)_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + c_{n,\,m}q_{n,\,m},$$

(такі оператори вивчалися в [6, с. 597]), а нелінійний оператор B визначається формулою

$$\left(B(q)\right)_{n,\,m} = V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right), \tag{5}$$

в просторі дійсних послідовностей $q = \left\{q_{n,\,m}\right\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\, q^{(2)}\right) = \sum_{n,\,m\in\mathbb{Z}} q^{(1)}_{n,\,m}\, q^{(2)}_{n,\,m}.$$

Позначимо цей простір $l_{2,\,2}$. Скалярний добуток і норму в $l_{2,\,2}$ позначатимемо $\left(\cdot\,,\,\cdot\right)$ і $\left\|\cdot\right\|$ відповідно.

Далі нам також знадобиться простір l^{∞} — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\left\|q\right\|_{l^{\infty}} = \sup_{n,\,m\in\mathbb{Z}} \left|q_{n,\,m}\right|.$$

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі $l_{2,\,2}$ можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q\left(p,\, q\right), \\ \dot{q} = H'_p\left(p,\, q\right); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H\left(p,\, q\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|p\right\|^2 - \left(Aq,\, q\right)\right) + \sum_{n,\,m\in\mathbb{Z}} V_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right),$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в $l_{2,2}$.

Припускається, що виконуються умови:

(i) послідовності $\left\{a_{n,m}\right\}$ і $\left\{c_{n,m}\right\}$ дійсних чисел обмежені;

(ii) $V_{n,m}(r)$ — функція класу C^1 на $\mathbb{R}$, причому $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ і для будь-якого $R > 0$ існує таке $C = C(R) > 0$, що для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\left|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)\right| \le C\left|r_1 - r_2\right|, \quad \left|r_1\right|, \left|r_2\right| \le R. \tag{6}$$

З умови (i) випливає, що A є обмеженим самоспряженим оператором в $l_{2,2}$ (див., наприклад, [6, с. 509]). А для оператора B правильна лема ([4, с. 20]):

Лема 1. Нехай виконується умова (ii), тоді оператор B є обмеженим оператором в $l_{2,2}$. Більше того, оператор B є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору $l_{2,2}$.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \;\; \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{7}$$

Основний результат. Наведемо результати про існування та єдиність локального і глобального розв'язків для системи осциляторів, отримані в статті [4, с. 22-23]:

Теорема 1. Нехай виконуються умови (i) та (ii). Тоді для будь-яких $q^{(0)} \in l_{2,2}$ і $q^{(1)} \in l_{2,2}$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу C^2 , який визначений на деякому інтервалі $(-t_0; t_0)$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i) та (ii) з константою C , яка не залежить від R . Тоді для будь-яких $q^{(0)} \in l_{2,2}$ і $q^{(1)} \in l_{2,2}$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу C^2 , який визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$.

Посилена умова (ii) виконується для нелінійностей, зріст яких на нескінченності не вище 2-го степеня.

Лема 2. Нехай виконуються умови (i) та (ii) . Тоді $H(p, q)$ є функціоналом класу C^1 на $l_{2,2} \times l_{2,2}$.

Доведення. Квадратичні члени $\|p\|^2$ і $(Aq,\, q)$ є, очевидно, функціоналами класу C^1 (нагадаємо, що згідно (i) A — обмежений лінійний оператор). Тому достатньо показати, що

$$\varphi(q) = \sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} V_{n,\, m}\left(q_{n,\, m}\right)$$

є функціоналом класу C^1 на $l_{2,\,2}$. Нехай $q \in l_{2,\,2}$, $h \in l_{2,\,2}$ і $B(q)$ визначено рівністю (5).

За формулою Лагранжа, існують такі $\theta_{n,\, m} \in (0,\, 1)$, що

$$\varphi(q+h)-\varphi(q)-\left(B(q),\, h\right) = \sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} \left[V'_{n,\, m}\left(q_{n,\, m}+\theta_{n,\, m}h_{n,\, m}\right)-V'_{n,\, m}(q_{n,\, m})\right]h_{n,\, m}.$$

Припустимо, що $\|q\| \le R$ і $\|h\| \le R$. Тоді $\|q\|_{l^\infty} \le R,\ \|h\|_{l^\infty} \le R$ і згідно (ii):

$$\left|\varphi(q+h)-\varphi(q)-\left(B(q),\, h\right)\right| \le C \sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} \theta_{n,\, m}\left|h_{n,\, m}\right|^2 \le C\|h\|^2 = o\left(\|h\|\right).$$

Це означає, що похідна $\varphi'(q)$ існує і $\varphi'(q) = B(q)$. Оскільки, за лемою 1, оператор $B(q)$ неперервний, то $\varphi \in C^1$. Лему доведено.

Розглянемо гамільтонову систему з гамільтоніаном H:

$$\dot{p} = -H'_q(p,\, q),\ \ \dot{q} = H'_p(p,\, q). \tag{8}$$

Оскільки $H'_p\left(p,\, q\right) = p$ і $H'_q\left(p,\, q\right) = -Aq + B(q)$, то задача Коші для системи (8) еквівалентна задачі Коші для рівняння (4), а значить і для рівняння (1). Як добре відомо (див., наприклад, [1]), $H(p,\, q)$ є інтегралом системи (4) (у цьому неважко переконатися). Звідси отримуємо:

Наслідок. В умовах $(i), (ii)$ нехай $q(t)$ — розв'язок рівняння (1) зі значеннями в $l_{2,\,2}$. Тоді $H\left(\dot{q}(t),\, q(t)\right) = H\left(q^{(1)},\, q^{(0)}\right) = const.$

Теорема 3. Нехай виконуються умови (i), (ii) та оператор A недодатний, тобто $(Aq,\, q) \le 0$ для будь-якого $q \in l_{2,\,2}$. Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:

(a) $V_{n,\, m}(r) \ge 0$ *для всіх* $n,\, m \in \mathbb{Z}$ *і* $r \in \mathbb{R}$;

(b) існує така неспадна функція $h(\xi)$, визначена для $\xi \ge 0$, що $\lim\limits_{\xi\to+\infty} h(\xi) = +\infty$ і $V_{n,\, m}(r) \ge h\left(|r|\right)$ для всіх $n,\, m \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)},\, q^{(1)} \in l_{2,\,2}$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок, визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай виконується умова (a) і $q(t)$ — локальний розв'язок задачі (4), (7), що існує згідно теореми 1. Для того, щоб довести, що $q(t)$ визначена на всій осі, достатньо показати, що функція $\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\|$ залишається обмеженою на будь-якому скінченному інтервалі $(-t_0,\, t_0)$ існування розв'язку (див., наприклад, [7], теорема X.74).

За наслідком з леми 2

$$H\left(\dot{q}(t),\, q(t)\right) = H\left(q^{(1)},\, q^{(0)}\right).$$

Відповідно до умов теореми і означення гамільтоніана:

$$\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 \le H\left(q^{(1)},\, q^{(0)}\right).$$

Отже, $\|\dot{q}(t)\|$ обмежена на $(-t_0,\, t_0)$. Оскільки

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(\tau)d\tau + q^{(0)},$$

то звідси випливає обмеженість $\|q(t)\|$ і теорему в цьому випадку доведено.

Нехай виконується умова (b) і $H_0 \ge 0$ таке, що $H\left(q^{(1)},\, q^{(0)}\right) \le H_0$ і $\overline{r} > 0$ — розв'язок рівняння $h(r) = H_0$ (він, очевидно, існує). Із означення H та умов теореми випливає, що $h\left(\left|q_{n,\,m}^{(0)}\right|\right) \le H_0$ і, отже, на множині, де $h(r)$ строго зростає, виконується нерівність $\left|q_{n,\,m}^{(0)}\right| \le \overline{r}$.

На множині, де $h(r)$ стала, виберемо $H_0 \ge 0$ так, щоби $\overline{r}$ було найбільшим на даній множині, тоді автоматично $\left|q_{n,\,m}^{(0)}\right| \le \overline{r}$.

Нехай $\psi(r)$ — функція, визначена рівністю

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le \overline{r}, \\ -r + \overline{r} + 1, & \overline{r} \le r \le \overline{r} + 1, \\ 0, & r \ge \overline{r} + 1. \end{cases}$$

Покладемо $\tilde{V}_{n,\,m}(r) = \int_0^r \left[\psi(|\rho|)V'_{n,\,m}(\rho) + 2\left(1 - \psi(|\rho|)\right)\rho\right] d\rho.$

Неважко перевірити, що модифіковане рівняння (3) з потенціалом $\tilde{V}_n$ задовольняє умовам теореми 2 і, отже, має глобальний розв'язок $q(t)$ з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$. Елементарні обчислення показують, що $\tilde{V}_n(r) \ge \tilde{h}(r)$, де

$$\tilde{h}(r) = \begin{cases} h(r), & 0 \le r \le \bar{r}, \\ \left(-r + \bar{r} + 1\right) h(r) + \int\limits_{\bar{r}}^{r} h(\rho) d\rho + 2\left(\frac{r^3}{3} - \bar{r}\frac{r^2}{2} + \frac{\bar{r}^3}{6}\right), & \bar{r} \le r \le \bar{r} + 1, \\ r^2 + \int\limits_{\bar{r}}^{\bar{r}+1} h(\rho) d\rho + \left[\frac{\bar{r}^3}{3} - \frac{\left(\bar{r}+1\right)^3}{3}\right], & r \ge \bar{r} + 1. \end{cases}$$

Для модифікованого гамільтоніана $\tilde{H}$ маємо $\tilde{H}\left(p(t), q(t)\right) = \tilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right)$. Оскільки $\left|q_{n,m}^{(0)}\right| \le \bar{r}$, то $\tilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) \le H_0$. Отже, $\tilde{h}\left(\left|q_{n,m}\right|\right) \le H_0$.

Оскільки $\tilde{h}(r) \ge \tilde{h}(\bar{r}) = h(\bar{r}) = H_0$, то $\left|q_{n,m}\right| \le \bar{r}$. Оскільки для $q(t)$ модифіковане рівняння співпадає з вихідним, то $q(t)$ є глобальним розв'язком вихідної задачі. Теорему доведено.

Таким чином, у цій статті одержано умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці (теорема 3), які поширюють результат статті [4].

Список використаних джерел:

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М. : Наука, 1989. — 472 с.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154—175.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 60—65.
4. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18—24.

5. Бак С. Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 723—729.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. Рид М. Методы современной математической физики : в 4-х т. / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1978. — Т. 2. — 395 с.
8. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — P. 201—250.
9. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79—86.
10. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — P. 1—108.
11. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
12. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20. — P. 319—341.
13. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1. — P. 105—114.
14. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118—122.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence and uniqueness of global solution to the Cauchy problem.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, Cauchy problem, global solution.*

Отримано: 24.04.2011