

УДК 532.5

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

*Институт математики НАН Украины, Киев**Получено 14.03.2003*

Предложенная автором ранее модель 2-мерных колебаний жидкости в прямоугольном баке развивается на случай 3-мерных колебаний в цилиндрическом баке. Модель основана на точных интегро-дифференциальных уравнениях типа Гамильтона, в отличие от различных моделей, основанных на оценках порядка малости искомого величин. Точные уравнения представлены в матричной форме, установлена блочная структура их матричных коэффициентов, особое внимание уделено связи одинарных и двойных индексов в представлениях потенциала скоростей и свободной поверхности через простые и двойные суммы. Разработан алгоритм численного решения этих уравнений, который тестируется на задаче о нелинейных колебаниях жидкости в вертикальном цилиндрическом баке во время его разгона по горизонтали.

Запропоновану автором раніше 2-вимірну модель коливань рідини у прямокутному резервуарі розвинуто на випадок 3-вимірних коливань у циліндричному резервуарі. Модель базується на точних інтегро-диференціальних рівняннях типу Гамільтона, на відміну від моделей, що використовують оцінки порядку малості шуканих величин. Точні рівняння подано у матричному вигляді, встановлено блочну структуру їхніх матричних коефіцієнтів, особливу увагу приділено зв'язку одинарних та подвійних індексів у представленнях потенціалу швидкостей та вільної поверхні через прості та подвійні суми. Розроблено алгоритм чисельного розв'язування цих рівнянь, котрий тестується на задачі про нелінійні коливання рідини у вертикальному циліндричному резервуарі під час його прискорення у горизонтальному напрямі.

The earlier offered by author model of two-dimensional sloshing in a rectangular tank is extended on the case of three-dimensional sloshing in a cylinder tank. This model is based on the exact integro-differential equations of Hamilton's type in contrast to the simplified equations of a different smallness order. This exact equations is represented in the matrix form, the block structure of their matrix coefficients is showed, particular attention has been given to the relation between single and double indices in the representation of a velocity potential and free surface in the form of the single and double sums. The algorithm of a numerical integration of this equations has been worked out and tested in the case of nonlinear sloshing in the vertical cylinder tank which is accelerated in the horizontal direction.

## ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы – построение на основе вариационного принципа Бейтмена–Люка–Уизема и оценка вычислительных возможностей компьютерной модели нелинейных колебаний жидкости в подвижном вертикальном цилиндрическом баке. Соответствующая математическая модель представляет собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Гамильтона и тестируется на задаче о нелинейных колебаниях жидкости в вертикальном баке, разгоняемом по горизонтали с постоянным ускорением из положения равновесия. Работа продолжает исследования, начатые в [1] для случая прямоугольного бака.

Динамика жидкости в цилиндрических баках является одним из наиболее разработанных разделов теории относительного движения жидкости [2] – [6]. (Обширная библиография вплоть до 1996 года имеется в [7]). Что касается приложений, то известен большой ряд приближенных методов ре-

шения практических задач (метод теории возмущений, вариационный метод, метод конечных элементов и т.д.), каждый из которых имеет свою область применения, но ни один не является универсальным и изученным до конца. В данной статье развивается вариационный метод, основанный на функционале давления и восходящий (в применении к задачам динамики ограниченного объема жидкости) к работам [2, 3].

Основной общий вопрос, решению которого посвящена настоящая статья (как и предыдущая [1]), – насколько эффективна модель, построенная на основе точных уравнений типа Гамильтона. Проблема непосредственного использования именно точных уравнений возникает в связи с тем, что обычно практикуемое разложение в ряды Тейлора коэффициентов точных уравнений с последующим удержанием в уравнениях только слагаемых определенного порядка малости (см., например, [2, 3]), оказывается эффективным лишь до определенного момента, так как при увеличении числа удерживаемых слагаемых сложность модели возрастает и становится соизмеримой со сложностью исходной

точной задачі. В то же время, состояние теории таково, что для многих задач невозможно наперед указать необходимое число подлежащих удержанию слагаемых и предсказать последствия отбрасывания тех или иных нелинейных членов уравнений. Все это диктует необходимость изучения точных уравнений и, естественно, основанных на них расчетных моделей.

Сформулированный основной вопрос анализируется на примере цилиндрического сосуда, совершающего поступательные движения. Рассматривается задача о нелинейных колебаниях тяжелой идеальной однородной несжимаемой жидкости в ускоряемом по горизонтали вертикальном цилиндрическом баке, который первоначально двигался с постоянной скоростью или покоился. Основная особенность этой задачи – разрывное движение бака, при котором его скорость непрерывна, а ускорение терпит разрыв 1-го рода. Задача сложна для аналитического решения и одновременно представляет определенный практический интерес. В частности, она имеет прямое отношение к анализу импульсных движений жидкости, возникающих, например, в хранилищах нефтепродуктов при подземных толчках во время землетрясений.

Настоящее исследование выполнено по плану работы [1], но с учетом специфики формы бака. Если в случае прямоугольного бака возможны 2-мерные течения, то в цилиндрической полости движения жидкости только 3-мерные. Это повлекло естественные доработки модели, начиная с перехода в исходных начально-краевой и вариационной задачах от декартовых координат к цилиндрическим и кончая переделкой соответствующих фрагментов компьютерной программы. Точные интегро-дифференциальные уравнения типа Гамильтона представлены в матричной форме, исследована структура матричных коэффициентов этих уравнений, особое внимание уделено связи одинарных и двойных индексов в формулах для аппроксимирующих выражений свободной поверхности и потенциала скоростей. Для конкретной системы на основе предлагаемого алгоритма выполнен численный анализ поведения жидкости в мгновенно ускоряемом цилиндрическом баке.

## 1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается круглый цилиндрический недеформируемый бак радиусом  $R$ , высотой  $l$ , с плоским дном, который расположен вертикально и частично заполнен идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$  (уровень заполне-

ния  $H$ ). С баком жестко связана правая декартова система координат  $Oxyz$ , начало  $O$  которой размещено в его центре, ось  $Oz$  направлена вдоль продольной оси симметрии бака вверх, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  расположены в плоскости поперечного сечения. Вся система "бак-жидкость" находится в поле силы тяжести и движется относительно некоторой инерциальной системы координат  $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$ , ось  $O^*\zeta^*$  которой направлена по вектору  $g_0$  ускорения силы тяжести в противоположном ему направлении. Оси систем координат  $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$  и  $Oxyz$  всегда параллельны, а начала  $O^*$  и  $O$ , естественно, могут не совпадать.

Бак совершает поступательное движение, которое состоит из двух этапов. На первом этапе он движется равномерно (в частности, покоится), причем вектор скорости  $v_0$  в проекциях на оси  $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$  имеет вид

$$v_0 = (0, v, 0) \quad (v = \text{const}).$$

На втором этапе бак совершает равноускоренное движение с вектором ускорения (в проекциях на оси  $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$ )

$$w_0 = (0, w, 0) \quad (w = \text{const}).$$

Ускоренное движение бака протекает на конечном отрезке времени  $[0, t_1]$ , длительность которого, вообще говоря, произвольна, но при малых её значениях можно говорить о так называемом импульсном режиме движения бака.

Предполагается, что:

- 1) движение свободной поверхности жидкости относительно бака является 3-мерным,
- 2) поле абсолютной скорости жидкости допускает потенциал,
- 3) сосуд открытый,
- 4) свободная поверхность  $\Sigma(t)$  может быть представлена явным уравнением

$$z = \zeta(x, y, t), \quad (1)$$

- 5) в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость покоится относительно сосуда, а её свободная поверхность задана уравнением

$$z = h_0, \quad h_0 = H - \frac{l}{2},$$

- 6) дно сосуда ни при каких  $t$  не обнажается,
- 7) функция  $\zeta(x, y, t)$  может принимать значения, соизмеримые с глубиной заполнения сосуда  $H$ .

Требуется рассчитать волновые движения жидкости на этапе ускоренного движения бака, а именно: для любого момента времени  $t \in [0, t_1]$  найти

форму свободной поверхности  $\Sigma(t)$ , т.е. функцию  $\zeta(x, y, t)$  из уравнения (1).

По ходу решения этой задачи можно определить и относительную скорость  $u(x, y, z, t)$  жидкости, и поле давлений  $P(x, y, z, t)$  в жидкости вплоть до границы  $S(t)$  жидкой области ( $S(t)$  – смоченная часть внутренней поверхности бака), но в данной работе основное внимание уделяется свободной поверхности.

## 2. ИСХОДНАЯ НАЧАЛЬНО–КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Исходная начально–краевая задача для рассматриваемой гидродинамической задачи в декартовых координатах  $x, y, z$  имеет вид (случай поступательного движения бака, [10, стр.73–74])

$$\Delta\varphi(r, t) = 0, \quad r \in \Omega(t), \quad t \in (t_0, t_1], \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \quad r \in S(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}, \quad r \in \Sigma(t), \quad (4)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - (g_0 - w_0) \cdot r = C(t) - \frac{p_0}{\rho}, \quad r \in \Sigma(t), \quad (5)$$

$$\varphi(r, t_0) = \varphi^0(r), \quad (\Delta\varphi^0(r) = 0, \quad r \in \Omega(t_0)), \quad (6)$$

$$\zeta(x, y, t_0) = \zeta^0(x, y), \quad (6)$$

$$\int_{\Omega(t)} d\Omega(t) = V = \text{const}. \quad (7)$$

Здесь  $\varphi(r, t)$  – потенциал относительной скорости  $u(r, t)$  жидкости, так что  $u = \nabla\varphi$  (оператор  $\nabla$  действует по переменным  $x, y, z$ );  $r = (x, y, z)$  – радиус-вектор произвольной жидкой частицы в системе координат  $Oxyz$ ;  $\Omega(t)$  – занятая жидкостью в момент  $t$  пространственная область с границей  $S(t) + \Sigma(t)$ ;  $\nu(r, t)$  – орт внешней нормали к границе области  $\Omega(t)$ ;  $p_0 = \text{const}$  – постоянное давление на свободной поверхности жидкости;  $\varphi^0(r)$ ,  $\zeta^0(x, y)$  – значения искомых функций в начальный момент  $t = t_0$ ;  $V = \text{const}$  – объем жидкости. Нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, оператор  $\Delta$  действует по  $x, y, z$ , точка " " обозначает скалярное произведение векторов.

Неизвестными являются функции  $\varphi(r, t)$ ,  $\zeta(x, y, t)$ . Остальные параметры  $p_0, C(t), \rho, g_0, w_0, V, t_1, t_0$ , а также поверхность полости  $S(t)$  считаются заданными.

В случае цилиндрического бака естественно перейти к цилиндрическим координатам, поэтому в дальнейшем полагаем

$$x = \xi \cos \eta, \quad y = \xi \sin \eta, \quad z = z, \quad (8)$$

$$0 \leq \xi \leq R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad (8)$$

где  $\xi, \eta$  – полярные радиус и угол соответственно.

В цилиндрических координатах область  $\Omega(t)$  (без границ цилиндрической поверхности) представляет собой совокупность точек  $(\xi, \eta, z)$ , удовлетворяющих соотношению

$$\Omega(t) = \{(\xi, \eta, z) :$$

$$0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad -\frac{l}{2} < z \leq \zeta(\xi, \eta, t)\}. \quad (9)$$

(Здесь и в дальнейшем за свободной поверхностью  $\zeta(\xi, \eta, t)$  и другими функциями аргументов  $\xi, \eta, z$  сохраняются те же обозначения, что и за соответствующими функциями аргументов  $x, y, z$ , хотя сами функциональные зависимости будут уже другими).

Вид уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (8) известен. В свою очередь, для представления в цилиндрических координатах краевых условий берутся проекции на оси  $x, y, z$  фигурирующих в них векторов, но эти проекции выражаются через  $\xi, \eta, z$ . В частности, используются следующие соотношения:

для градиента  $\nabla\varphi$  в области  $\Omega(t)$  –

$$\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) =$$

$$= (\varphi_\xi \cos \eta - \varphi_\eta \frac{\sin \eta}{\xi}, \quad \varphi_\xi \sin \eta + \varphi_\eta \frac{\cos \eta}{\xi}, \quad \varphi_z), \quad (10)$$

для орта  $\nu$  на боковой поверхности бака –

$$\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (\cos \eta, \sin \eta, 0),$$

$$\text{где } \xi = R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2}, \quad (11)$$

для орта  $\nu$  на дне бака –

$$\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (0, 0, -1),$$

$$\text{где } 0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = -\frac{l}{2}, \quad (12)$$

для орта  $\nu$  на свободной поверхности –

$$\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) = -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2(1 + \zeta_\xi^2) + \zeta_\eta^2}} \times$$

$$\times (\zeta_\xi \cos \eta - \zeta_\eta \frac{\sin \eta}{\xi}, \quad \zeta_\xi \sin \eta + \zeta_\eta \frac{\cos \eta}{\xi}, \quad -1),$$

где  $0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = \zeta(\xi, \eta, t),$  (13)

для радиус-вектора  $r$  любой точки жидкой области или её границы –

$$r = (x, y, z) = (\xi \cos \eta, \xi \sin \eta, z). \quad (14)$$

С учетом формул (10) – (14) исходная начально-краевая задача в декартовых координатах (2) – (7) принимает в цилиндрических координатах, после соответствующих преобразований, следующий вид:

уравнение Лапласа –

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (\xi, \eta, z) \in \Omega(t), \quad t \in (t_0, t_1], \quad (15)$$

условие на боковой поверхности бака –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2},$$

условие на дне бака –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = -\frac{l}{2}, \quad (16)$$

кинематическое условие на свободной поверхности жидкости –

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = \zeta(\xi, \eta, t), \quad (17)$$

динамическое условие на свободной поверхности жидкости –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})^2 + \frac{1}{\xi^2} (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial z})^2] - [(g_0 - w_0)_x \xi \cos \eta + (g_0 - w_0)_y \xi \sin \eta + (g_0 - w_0)_z z] = C(t) - \frac{p_0}{\rho}, \quad 0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = \zeta(\xi, \eta, t), \quad (18)$$

начальные условия –

$$\varphi(\xi, \eta, z, t_0) = \varphi^0(\xi, \eta, z), \quad (\Delta \varphi^0(\xi, \eta, z) = 0, \quad (\xi, \eta, z) \in \Omega(t_0)), \quad \zeta(\xi, \eta, t_0) = \zeta^0(\xi, \eta), \quad (19)$$

условие постоянства объема жидкости –

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \xi d\xi d\eta dz = V = const. \quad (20)$$

В динамическом условии (18) через  $(g_0 - w_0)_x, (g_0 - w_0)_y, (g_0 - w_0)_z$  обозначены проекции вектора  $(g_0 - w_0)$  кажущегося ускорения силы тяжести на оси  $x, y, z$  соответственно.

Начально-краевая задача (15) – (20) классифицируется как задача для уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, в изменяющейся со временем (неизвестной) области, с нелинейностями в кинематическом и динамическом граничных условиях и с дополнительным интегральным условием. Дальнейшее её исследование выполняется с помощью вариационного метода в форме Бейтмена – Люка – Уизема [2, 3].

### 3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Начально-краевой задаче в декартовых координатах (2) – (7) эквивалентна (в известном смысле) следующая вариационная задача:

$$J[\varphi, \zeta] \rightarrow extr, \quad \int_{\Omega(t)} d\Omega(t) = V. \quad (21)$$

Здесь  $J[\varphi, \zeta]$  является интегральным функционалом вида

$$J[\varphi, \zeta] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \varphi_t, \nabla \varphi, \zeta) dt \quad (22)$$

с интегрантом

$$L(t, \varphi_t, \nabla \varphi, \zeta) = \int_{\Omega(t)} (P(r, t, \varphi_t, \nabla \varphi) - p_0) d\Omega(t), \quad (23)$$

где

$$P(r, t, \varphi_t, \nabla \varphi) = \rho [C(t) - \varphi_t - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + (g_0 - w_0) \cdot r]. \quad (24)$$

Запись (21) означает, что необходимо найти пару функций  $(\varphi, \zeta)$ , доставляющих экстремум (минимум или максимум) функционалу (22) с одновременным выполнением интегрального условия постоянства объема жидкости.

Доказательство эквивалентности вариационной задачи (21) – (24) и начально-краевой задачи (2) – (7) (даже для более общего случая поступательных и угловых движений бака) дано И.А.Луковским [2, стр. 68] В связи с этим возникает вопрос: будет

ли вариационная задача для интегрального функционала (22) эквивалентна начально–краевой задаче (15) – (20), если в этом функционале произвести замену пространственных переменных  $x, y, z$  на  $\xi, \eta, z$ ? Этот вопрос имеет положительный ответ в силу следующих общих соображений.

Замена переменных в интеграле не изменяет величины самого интеграла, а только изменяет пределы интегрирования и подинтегральное выражение (как за счет видоизменения подинтегральной функции, так и за счет появления якобиана в выражении для элементарного объема). Если некоторая функция доставляет экстремум некоторому интегралу, то это экстремальное значение сохранится и при замене переменных под интегралом, поскольку для функций сравнения значения интегралов также сохраняются при такой же замене переменных. Наконец, если некоторая функция является решением исходной начально–краевой задачи в декартовых координатах, то она останется решением и задачи, получающейся после перехода в исходной задаче к цилиндрическим координатам. Следовательно, функция–решение задачи в цилиндрических координатах будет экстремалью интегрального функционала, получающегося из функционала для исходной задачи путем замены в нем декартовых координат на цилиндрические. А отсюда, в свою очередь, следует, что задаче в цилиндрических координатах можно поставить в соответствие вариационную задачу с интегральным функционалом в цилиндрических координатах, что и решает поставленный вопрос.

На основании изложенного в дальнейшем решается вариационная задача для функционала (22) с интегрантом (23) – (24), в котором векторы  $\nabla\varphi$  и  $r$  определяются в цилиндрических координатах с помощью формул (10), (14), а область интегрирования  $\Omega(t)$  определяется соотношением (9) (вектор  $(g_0 - w_0)$  по-прежнему берётся в проекциях на оси  $x, y, z$ ).

Применяя для решения вариационной задачи (21) – (24) прямой метод, введем следующие аппроксимации искомых функций:

$$\zeta(\xi, \eta, t) \simeq \zeta_N(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^N \beta_n(t) f_n(\xi, \eta), \quad (25)$$

$$\varphi(\xi, \eta, z, t) \simeq \varphi_M(\xi, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^M R_m(t) \varphi_m(\xi, \eta, z), \quad (26)$$

где

$$\{f_n(\xi, \eta)\}_{n=0}^N, \quad \{\varphi_m(\xi, \eta, z)\}_{m=0}^M$$

– системы координатных функций, которые будут выбраны ниже;  $\beta_n(t)$  – обобщенные координаты свободной поверхности;  $R_m(t)$  – обобщенные квазискорости жидкости (термин “квазискорости” оправдан тем, что величины  $R_m$  являются линейными комбинациями обобщенных скоростей  $\dot{\beta}_n$ );  $N, M$  – целые положительные числа. Задача заключается в нахождении функций  $\beta_n(t), R_m(t)$ . Построим систему соотношений, определяющих эти функции. Подстановка выражений (25), (26) в (23) с учетом (24) даёт следующее выражение для интегранта:

$$L(t, \varphi_t, \nabla\varphi, \zeta) \simeq L_1(t, \beta, \bar{R}), \quad (27)$$

где введены обозначения

$$\beta = (\beta_0, \dots, \beta_N), \quad \bar{R} = (R_0, \dots, R_M),$$

$$L_1(t, \beta, \bar{R}) = \rho \int_{\Omega(t)} [C(t) - \frac{p_0}{\rho} - \sum_{m=0}^M \frac{dR_m}{dt} \varphi_m - \frac{1}{2} (\sum_{m=0}^M R_m \nabla \varphi_m)^2 + (g_0 - w_0) \cdot r] d\Omega(t). \quad (28)$$

Известно, далее, что система уравнений Эйлера вариационной задачи (21) с интегрантом  $L$  может быть представлена в виде уравнений Лагранжа второго рода относительно функции  $L$ . Учитывая формулу (27), запишем эти уравнения Лагранжа как

$$\frac{\partial L_1}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{R}_k} - \frac{\partial L_1}{\partial R_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M. \quad (30)$$

Преобразуем эти уравнения. Для этого представим в выражении (28) объёмный интеграл через повторный, используя цилиндрические координаты. Тогда получим выражение

$$L_1(t, \beta, \bar{R}) = [C(t) - \frac{p_0}{\rho}] V(\zeta) - L_1(\dot{R}_m, \zeta) - L_1(R_m, \zeta) + (g_0 - w_0) \cdot l(\zeta), \quad (31)$$

где введены обозначения

$$V(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \xi dz d\eta d\xi, \quad (32)$$

$$L_1(\dot{R}_m, \zeta) =$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \sum_{m=0}^M \dot{R}_m \varphi_m(\xi, \eta, z) \xi dz d\eta d\xi, \quad (33)$$

$$L_1(R_m, \zeta) = \frac{1}{2} \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \left[ \left( \sum_{m=0}^M R_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{\xi^2} \left( \sum_{m=0}^M R_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \sum_{m=0}^M R_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right)^2 \right] \xi dz d\eta d\xi, \quad (34)$$

$$l(\zeta) = (l_x(\zeta), l_y(\zeta), l_z(\zeta)),$$

$$l_x(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \xi^2 \cos \eta dz d\eta d\xi,$$

$$l_y(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \xi^2 \sin \eta dz d\eta d\xi,$$

$$l_z(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \xi z dz d\eta d\xi. \quad (35)$$

Из этих формул виден характер зависимости функции  $L_1(t, \beta, \bar{R})$  от переменных  $\beta_i$ ,  $R_m$ ,  $\dot{R}_m$ , по которым производится дифференцирование в уравнениях Лагранжа (29), (30). Именно, функция  $L_1(t, \beta, R)$  линейна по  $\dot{R}_m$ , является квадратичной формой по  $R_m$  и довольно сложным образом зависит от  $\beta_i$ , которые входят в пределы интегрирования всех интегралов в силу равенства

$$\zeta(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^N \beta_n(t) f_n(\xi, \eta).$$

Теперь, выполняя соответствующие дифференцирования в соотношениях (32)–(35) и используя формулу дифференцирования интеграла по параметру в виде (функция  $s(\xi, \eta, z)$  – произвольна)

$$\frac{d}{d\beta_i} \int_{-l/2}^{\zeta} s(\xi, \eta, z) dz = f_i(\xi, \eta) s(\xi, \eta, \zeta),$$

находим, что ( $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ )

$$\frac{\partial V(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \xi d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial V(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} \equiv 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} \equiv 0, \quad \frac{\partial V(\zeta)}{\partial R_k} \equiv 0; \quad (36)$$

$$\frac{\partial L_1(\dot{R}_m, \zeta)}{\partial \beta_i} = \sum_{m=0}^M \frac{\partial A_m(\zeta)}{\partial \beta_i} \dot{R}_m,$$

$$\frac{\partial L_1(\dot{R}_m, \zeta)}{\partial \dot{R}_k} = A_k(\zeta), \quad \frac{\partial L_1(\dot{R}_m, \zeta)}{\partial R_k} \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1(\dot{R}_m, \zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \sum_{j=0}^N \frac{\partial A_k(\zeta)}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j; \quad (37)$$

$$\frac{\partial L_1(R_m, \zeta)}{\partial \beta_i} = \frac{1}{2} \sum_{m,j=0}^M \frac{\partial A_{m,j}}{\partial \beta_i} R_m R_j,$$

$$\frac{\partial L_1(R_m, \zeta)}{\partial \dot{R}_k} \equiv 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1(R_m, \zeta)}{\partial \dot{R}_k} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial L_1(R_m, \zeta)}{\partial R_k} = \sum_{m=0}^M R_m A_{mk}(\zeta); \quad (38)$$

$$\frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \xi^2 \cos \eta d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \xi^2 \sin \eta d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \sum_{n=0}^N \beta_n \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) f_n(\xi, \eta) \xi d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial R_k} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial R_k} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \dot{R}_k} = \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial R_k} \equiv 0, \quad (39)$$

Здесь использованы обозначения

$$A_m(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \varphi_m(\xi, \eta, z) \xi dz d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial A_m(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \varphi_m(\xi, \eta, \zeta) \xi d\eta d\xi, \quad (40)$$

$$A_{mk}(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_k \xi dz d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial A_{mk}(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) [\nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_k]_{z=\zeta} \xi d\eta d\xi,$$

$$\begin{aligned} & \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_k = \\ & = \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \end{aligned} \quad (41)$$

Подставим в уравнения (29), (30) выражение (31) и выполним необходимые преобразования с учетом соотношений (32) – (39). Тогда получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $R_m(t)$ ,  $\beta_n(t)$  из аппроксимаций (25), (26):

$$\sum_{m=0}^M \frac{\partial A_m(\zeta)}{\partial \beta_i} \frac{dR_m}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{m,j=0}^M \frac{\partial A_{m,j}(\zeta)}{\partial \beta_i} R_m R_j =$$

$$\begin{aligned}
 &= (g_0 - w_0)_x \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_i} + (g_0 - w_0)_y \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_i} + \\
 &+ (g_0 - w_0)_z \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_i} + [C(t) - \frac{p_0}{\rho}] F_i, \\
 &\quad i = 0, 1, \dots, N, \tag{42} \\
 &\sum_{i=0}^N \frac{\partial A_k(\zeta)}{\partial \beta_i} \frac{d\beta_i}{dt} - \sum_{j=0}^M A_{kj}(\zeta) R_j = 0, \\
 &\quad k = 0, 1, \dots, M. \tag{43}
 \end{aligned}$$

Здесь, в дополнение к (40) – (41), обозначено

$$F_i = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \xi d\eta d\xi, \quad i = 0, 1, \dots, N. \tag{44}$$

Начальные условия общей начально-краевой задачи (15) – (20) в цилиндрических координатах естественным образом преобразуются в начальные условия для систем интегро-дифференциальных уравнений (42), (43). В силу условий (19) в начальный момент имеем

$$\varphi(\xi, \eta, z, t_0) = \varphi^0(\xi, \eta, z).$$

Представляя правую часть этого равенства в виде конечной суммы ряда Фурье по координатным функциям  $\{\varphi_m(\xi, \eta, z)\}$ , т.е.

$$\varphi^0(\xi, \eta, z) = \sum_{m=0}^M a_m \varphi_m(\xi, \eta, z),$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых формах  $\varphi_m$  в суммах (26) и  $\varphi^0(\xi, \eta, z)$ , приходим к таким начальным условиям:

$$R_m(t_0) = a_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \tag{45}$$

Аналогично,

$$\beta_n(t_0) = b_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \tag{46}$$

где  $b_n$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье по координатным функциям  $\{f_n(\xi, \eta)\}$  заданной функции  $\zeta^0$ , т.е.

$$\zeta^0(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^N b_n f_n(\xi, \eta).$$

Итак, исходная начально-краевая задача для уравнения в частных производных (15)–(20) сведена к задаче Коши для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (42), (43). Эта система уравнений относится к классу нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных. Она будет неавтономной,

если ускорение  $w_0$  и функция  $C(t)$  переменны, и автономной, если  $w_0$  и  $C$  постоянны (что возможно при покое, равномерно или равноускоренно движущемся баке). Порядок системы равен  $N + M + 2$ .

Теперь для анализа динамики жидкости можно применить один из численных методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, что во многих отношениях выгодней численного решения уравнений в частных производных.

Из формул (35), (40), (41) видно, что величины  $l_x, l_y, l_z, A_k, A_{kj}$  являются функциями переменных  $\beta_0, \dots, \beta_N$  и не зависят от  $R_0, \dots, R_M$ . Следовательно, коэффициенты при производных  $R_k, \beta_i$  также зависят только от неизвестных  $\beta_i$ .

Система уравнений (42), (43) совпадает с точностью до обозначений и слагаемого

$$[C(t) - \frac{p_0}{\rho}] F_i$$

с системой уравнений (11.25), (11.26) работы [2, стр. 78], если в последней положить угловые скорости бака  $\omega_i$  равными нулю и учесть, что для цилиндрического бака

$$\frac{d}{dt} A_k = \sum_{i=0}^N \frac{\partial A_k}{\partial \beta_i} \frac{d\beta_i}{dt}.$$

Заметим, что формулы настоящей работы (35), (40), (41) для коэффициентов  $l_x, l_y, l_z, A_k, A_{kj}$  являются аналогами формул (11.19) из [2, стр.75–76], записанных в декартовых координатах. В цитируемой работе соответствующие соотношения в цилиндрических координатах не приведены.

Уравнения (42), (43) довольно сложны. Один из методов их приближенного решения заключается в замене с помощью уравнений (42) параметров  $R_k$  линейными формами от  $d\beta_i/dt$  и последующего сведения всей системы к системе уравнений 2-го порядка относительно функций  $\beta_i$  [2, стр. 58]. Однако, как показывают исследования, этот метод сопряжен с громоздкими выкладками при получении конкретных выражений упомянутых линейных форм для  $R_k$  и нахождении их производных  $dR_k/dt$  для перехода от (43) к уравнениям 2-го порядка относительно  $\beta_i$ . О характере возникающих при этом трудностей можно судить по результатам решения задачи для кольцевого цилиндра, когда в аппроксимациях свободной поверхности  $\zeta$  и потенциала  $\varphi$  удерживалось по пять слагаемых [2, стр. 104]. Альтернативный метод заключается в численном интегрировании системы уравнений (42), (43) без предварительного сведения ее к

системе уравнений 2-го порядка. Разработка этого метода и алгоритма его численной реализации на компьютерах (в случае цилиндрического бака) осуществляется ниже.

#### 4. КООРДИНАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Определимся с координатными функциями  $f_i(\xi, \eta)$  и  $\varphi_m(\xi, \eta, z)$  в аппроксимациях (25), (26). В качестве таковых выберем решения известной задачи о свободных колебаниях жидкости в покоящемся цилиндрическом баке, т. е. следующей спектральной задачи с параметром в граничном условии:

уравнение Лапласа –

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0,$$

$$0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad -\frac{l}{2} < z < h_0, \quad (47)$$

условие на боковой поверхности бака –

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2},$$

условие на дне бака –

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = -\frac{l}{2}, \quad (48)$$

кинематическое условие на свободной поверхности жидкости (линеаризованное) –

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = \sigma \psi(\xi, \eta),$$

$$0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = h_0, \quad (49)$$

динамическое условие на свободной поверхности жидкости (линеаризованное) –

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = \varkappa \tilde{\varphi}, \quad (\varkappa = \frac{\sigma^2}{g}),$$

$$0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad z = h_0, \quad (50)$$

условие ограниченности решения на оси цилиндра –

$$|\tilde{\varphi}(0, \eta, z)| < \infty, \quad (51)$$

условие периодичности решения по полярному углу  $\eta$  –

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta + 2\pi, z) = \tilde{\varphi}(\xi, \eta, z). \quad (52)$$

Здесь  $\sigma$ ,  $\psi(\xi, \eta)$  – частота и форма свободных колебаний жидкости, определяемых соотношениями

$$\varphi(\xi, \eta, z, t) = \cos(\sigma t) \tilde{\varphi}(\xi, \eta, z),$$

$$\zeta(\xi, \eta, t) = \sin(\sigma t) \psi(\xi, \eta);$$

$\varkappa$  – спектральный параметр. Функция  $\psi(\xi, \eta)$  входит только в кинематическое условие (49) и выражается через функцию  $\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z)$ . В дальнейшем, однако, функция  $\psi(\xi, \eta)$  не используется.

Краевая задача (47) – (52) решается методом разделения переменных. Относящиеся сюда результаты являются классическими, поэтому отметим лишь те из них, которые проясняют гидродинамическое содержание задачи и важны для дальнейшего.

В разложении решения на множители

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z) = Y(\xi) f(\eta) Z(z)$$

функции  $Z(z)$ ,  $f(\eta)$ ,  $Y(\xi)$  являются решениями следующих краевых задач:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0,$$

$$Z'(-l/2) = 0, \quad Z'(h_0) = \varkappa Z(h_0), \quad (53)$$

(граничные условия на дне бака и на невозмущенной свободной поверхности),

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + m^2 f = 0, \quad f(\eta + 2\pi) = f(\eta), \quad (54)$$

(условие периодичности по  $\eta$ ),

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dY}{d\xi} + (k^2 - \frac{m^2}{\xi^2}) Y = 0.$$

$$Y'(R) = 0, \quad |Y(0)| < \infty \quad (55)$$

(граничное условие на боковой поверхности бака и условие ограниченности решения на оси). Штрихи в краевых условиях (53), (55) обозначают производные по соответствующим переменным.

Уравнения перечисленных краевых задач выводятся из уравнения Лапласа, поэтому произведение  $Y(\xi) f(\eta) Z(z)$  будет гармонической функцией. Параметры  $k$ ,  $m$  являются константами разделения и определяются из дополнительных условий. Наиболее слабые ограничения налагаются на решения  $f(\eta)$ , которые поэтому имеют наиболее общий вид

$$f(\eta) = B_1 \cos(\pm m\eta) + B_2 \sin(\pm m\eta), \quad (56)$$

зависящий от двух (максимально возможное число) произвольных констант  $B_1$ ,  $B_2$ . Из условия периодичности получается, что

$$m = 0, 1, 2, \dots$$



Более жесткие условия налагаются на решение  $Z(z)$ , которое представляется как

$$Z(z) = \frac{A}{\operatorname{ch}(k\frac{l}{2})} \operatorname{ch}[k(z + \frac{l}{2})] \quad (57)$$

и зависит лишь от одного произвольного параметра  $A$ . В дальнейшем принимается

$$A = \frac{\operatorname{ch}(k\frac{l}{2})}{\operatorname{ch}(kH)},$$

что приводит к нормировке функции  $Z(z)$ , использованной в [2, стр. 101]. Краевая задача для  $Z(z)$  дает также выражение для спектрального параметра  $\kappa$  в зависимости от  $k$ , а именно:

$$\kappa = k \operatorname{th}(kH).$$

Отсюда следует формула для собственной частоты колебаний жидкости:

$$\sigma = \sqrt{kg \operatorname{th}(kH)}. \quad (58)$$

Наконец, решение краевой задачи (55) для уравнения Бесселя может, в силу условия его ограниченности на оси цилиндра, включать только функции Бесселя 1-го рода  $J_{\pm m}(k\xi)$ . Индекс  $m$  этих функций Бесселя является целым и совпадает с параметром  $m$  в решении для  $f(\eta)$ .

*Замечание.* В дальнейшем, не нарушая общности, рассматриваем лишь неотрицательные порядки функций Бесселя, поскольку, как известно, при целых  $m$  функции  $J_{+m}(k\xi)$  и  $J_{-m}(k\xi)$  линейно зависимы [5] (стр. 180). Ясно, что линейно зависимыми являются также функции  $\cos(+m\eta)$  и  $\cos(-m\eta)$ ,  $\sin(+m\eta)$  и  $\sin(-m\eta)$ . Следовательно, любое разложение некоторой функции  $\varphi(\xi, \eta, z)$  по системе функций, содержащих множителями функции  $J_{\pm m}(k\xi)$ ,  $\cos(\pm m\eta)$ ,  $\sin(\pm m\eta)$ , может быть сведено к разложению по системе функций, содержащих лишь  $J_{+m}(k\xi)$ ,  $\cos(+m\eta)$ ,  $\sin(+m\eta)$ .

Параметр  $k$ , в соответствии с первым из условий в (55), определяется как корень уравнения

$$\left. \frac{dJ_m(k\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=R} = 0.$$

Обозначая через  $j'_{m,n}$   $n$ -й нуль ( $n = 1, 2, \dots$ ) производной  $J'_m$  от функции  $J_m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ), получаем следующую формулу для определения параметра  $k$ :

$$k = k_m^{(n)} = \frac{j'_{m,n}}{R}, \quad (59)$$

где величины  $j'_{m,n}$  являются известными. Следовательно, решения краевой задачи (55) могут быть

представлены как

$$Y(\xi) = C J_m(k_m^{(n)} \xi), \quad m = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (60)$$

где  $C$  – произвольный множитель. В дальнейшем он используется для нормировки, причем полагается

$$C = \frac{1}{J_m(k_m^{(n)} R)}.$$

Эта нормировка выбирается, как в работе [2].

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что спектральная гидродинамическая задача (47) – (52) имеет счетное двухпараметрическое множество решений вида

$$\{\varphi_{mn}(\xi, \eta, z)\} = \{\cos(m\eta)\psi_{mn}(\xi, z), \sin(m\eta)\psi_{mn}(\xi, z)\}, \quad (61)$$

где

$$\psi_{mn}(\xi, z) = \frac{J_m(k_m^{(n)} \xi)}{J_m(k_m^{(n)} R)} \frac{\operatorname{ch}[k_m^{(n)}(z + \frac{l}{2})]}{\operatorname{ch}[k_m^{(n)} H]}.$$

Используя функции  $\varphi_{mn}$  в качестве координатных в аппроксимации (26), будем искать волновой потенциал исходной нелинейной гидродинамической задачи в виде следующего разложения:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, z, t) &= \sum_{m=0}^M R_m(t) \varphi_m(\xi, \eta, z) = \\ &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J [P_{ij}(t) \cos(i\eta) + R_{ij}(t) \sin(i\eta)] \psi_{ij}(\xi, z). \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь искомыми являются функции времени  $P_{ij}(t)$ ,  $R_{ij}(t)$ . Заметим, что верхние пределы  $I, J$  двойной суммы и функции  $P_{ij}(t)$ ,  $R_{ij}(t)$  с двойными индексами в (62) должны быть согласованы с числом  $M$  и функциями  $R_m(t)$  в одинарной сумме.

Очевидно, что за счет выбора координатных функций в аппроксимации (62) потенциала  $\varphi$  оказываются удовлетворенными уравнение Лапласа, кинематические условия на твердых стенках  $S(t)$  полости и условие гармоничности начального потенциала. Остальные соотношения (кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности, условие постоянства объема) должны быть удовлетворены за счет функций  $P_{ij}(t)$ ,  $R_{ij}(t)$  и  $\zeta(\xi, \eta, t)$  (последняя определяется выбором  $\beta_i(t)$ ,  $f_i(\xi, \eta)$ ).

Обратимся к координатным функциям  $f_i(\xi, \eta)$ . Выберем их следующим образом:

$$\{f_k(\xi, \eta)\}_{k=0}^N = \{\varphi_{mn}(\xi, \eta, z)|_{z=h_0}\}. \quad (63)$$

Тогда, в силу уравнения (25), свободная поверхность  $\Sigma(t)$  представится в виде

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, \eta, t) &= \sum_{n=0}^N \beta_n(t) f_n(\xi, \eta) = \\ &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J [p_{ij}(t) \cos(i\eta) + r_{ij}(t) \sin(i\eta)] \psi_{ij}(\xi, h_0). \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь неизвестными являются функции  $p_{ij}(t)$ ,  $r_{ij}(t)$ , которые должны быть согласованы с функциями  $\beta_n(t)$  в одинарной сумме.

### 5. УСЛОВИЕ ПОСТОЯНСТВА ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ

Аппроксимация свободной поверхности выражением (64) обеспечивает выполнение условия постоянства объема жидкости. Действительно, из условия (20) находим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, t)} \xi dz d\eta d\xi = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \zeta(\xi, \eta, t) + \frac{l}{2} \right] \xi d\eta d\xi. \end{aligned}$$

В то же время, объём жидкости, очевидно, будет

$$V = \pi R^2 \left( \frac{l}{2} + h_0 \right).$$

С учетом этих выражений условие (20) имеет вид

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \zeta(\xi, \eta, t) + \frac{l}{2} \right] \xi dz d\eta d\xi = \pi R^2 \left( \frac{l}{2} + h_0 \right). \quad (65)$$

Рассмотрим левую часть этого равенства и подставим в нее выражение (64). Тогда получим соотношение

$$\begin{aligned} &\int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \zeta(\xi, \eta, t) + \frac{l}{2} \right] \xi d\eta d\xi = \\ &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J [p_{ij}(t) C_{ij} + r_{ij}(t) D_{ij}] + \pi R^2 \frac{l}{2}, \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \cos(i\eta) \frac{J_i(k_i^{(j)} \xi)}{J_i(k_i^{(j)} R)} \xi d\eta d\xi, \\ D_{ij} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sin(i\eta) \frac{J_i(k_i^{(j)} \xi)}{J_i(k_i^{(j)} R)} \xi d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Вычислим величины  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ , заметив, что во всех случаях двойные интегралы сводятся к повторным. Выполнив интегрирование, находим, что

$$C_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

При  $i = 0$  получаем ( $k_0^{(1)} = 0$ ,  $J_0(k_0^{(1)} \xi) \equiv 1$ )

$$C_{01} = \pi R^2,$$

$$C_{0j} = 2\pi \int_0^R \frac{J_0(k_0^{(j)} \xi)}{J_0(k_0^{(j)} R)} \xi d\eta d\xi, \quad j = 1, \dots, J.$$

Пользуясь известной формулой для функций Бесселя

$$\int x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x),$$

( $x$  – некоторый аргумент), получаем соотношение

$$C_{0j} = 2\pi \frac{R J_1(k_0^{(j)} R)}{k_0^{(j)} J_0(k_0^{(j)} R)}, \quad j = 1, \dots, J.$$

Но, как известно,

$$J_0'(x) = -J_1(x).$$

Следовательно, при любом  $j$

$$J_1(k_0^{(j)} R) = -J_0'(k_0^{(j)} R) = 0.$$

Учитывая это, находим окончательно, что

$$C_{0j} = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Далее, интегралы с  $\sin(i\eta)$  в формулах для  $D_{ij}$  равны нулю для всех  $i$ . Поэтому

$$D_{ij} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

Таким образом, из соотношения (66), с учетом найденных значений коэффициентов  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ , получаем выражение

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \zeta(\xi, \eta, t) + \frac{l}{2} \right] \xi d\eta d\xi = \pi R^2 [p_{01}(t) + \frac{l}{2}].$$

Подставляя его в условие (65), находим, что условие постоянства объема жидкости будет выполнено, если

$$p_{01}(t) \equiv h_0, \quad (67)$$

а остальные функции  $p_{ij}(t)$ ,  $r_{ij}(t)$  произвольны.

Итак, в дальнейшем полагаем

$$\beta_0(t) = p_{01}(t) \equiv h_0, \quad (68)$$

что, как будет видно из дальнейшего, не противоречит рассматриваемым уравнениям (42), (43). Заметим, что при

$$\beta_0(t) = h_0, \quad \beta_1(t) = \dots = \beta_N(t) = 0$$

уравнение  $z = \zeta(\xi, \eta, t)$  описывает горизонтальную плоскость, проходящую через точку  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $z = h_0$ .

**6. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА**

Точные уравнения типа Гамильтона (42), (43) в случае цилиндрического бака имеют такую же простую для программирования структуру, как и в случае прямоугольного бака [1]. Покажем это, учитывая специфику задачи в цилиндрических координатах.

Представим уравнения (42), (43) в матричном виде:

$$A^T(\beta) \frac{d\bar{R}}{dt} = K(\beta) \cdot [g_0 - w_0(t)] + [C(t) - \frac{p_0}{\rho}] F - \frac{1}{2} \nabla_{\beta} [\bar{R}^T \cdot B(\beta) \cdot \bar{R}], \quad (69)$$

$$A(\beta) \frac{d\beta}{dt} = B(\beta) \cdot \bar{R}. \quad (70)$$

Здесь введены следующие матрицы (верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование матрицы):  $A(\beta) - (M + 1) \times (N + 1)$ -матрица с элементами

$$a_{ki}(\beta) = \frac{\partial A_k(\beta)}{\partial \beta_i}, \quad k = 0, \dots, M, \quad i = 0, \dots, N; \quad (71)$$

$B(\beta) - (M + 1) \times (M + 1)$ -матрица с элементами

$$b_{ki}(\beta) = A_{ki}(\beta), \quad k, i = 0, \dots, M; \quad (72)$$

$\nabla_{\beta}$  - оператор градиента по переменным  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ ;  $K(\beta)$  - транспонированная  $3 \times (N + 1)$ -матрица Якоби отображения  $l(\beta)$ , т.е.

$$K_{((N+1) \times 3)}(\beta) = \left[ \frac{\partial(l_1, l_2, l_3)}{\partial(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N)} \right]^T; \quad (73)$$

$$F = [F_0, F_1, \dots, F_N]^T$$

- вектор-столбец с компонентами  $F_i$ , определяемыми по формулам (44);  $\nabla_{\beta}(R^T \cdot B(\beta) \cdot R)$  - градиент квадратичной формы от переменных  $R_0, R_1, \dots, R_M$  с матрицей  $B(\beta)$ .

Уравнения (69), (70) сравнительно просто зависят от искомого функций  $R_k(t)$ , но сложным образом включают искомые функции  $\beta_i(t)$ , которые входят и в подынтегральные функции, и в пределы интегрирования. Выполняя дальнейшие преобразования системы (69), (70), поменяем местами составляющие ее матричные уравнения и представим матричное произведение  $K(\beta) \cdot [g_0 - w_0(t)]$  в виде суммы:

$$K(\beta) \cdot [g_0 - w_0(t)] = K_1[g_0 - w_0(t)]_x + K_2[g_0 - w_0(t)]_y + K_0[g_0 - w_0(t)]_z \cdot \beta, \quad (74)$$

где  $K_1, K_2$  - вектор-столбцы размера  $(N + 1)$ , а  $K_0$  - квадратная матрица размера  $(N + 1) \times (N + 1)$ , которые будут описаны ниже. В результате система уравнений (69), (70) преобразуется к следующему достаточно удобному для программирования виду:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & A(\beta) \\ A^T(\beta) & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \beta \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} B(\beta) & 0 \\ 0 & [g_0 - w_0(t)]_z K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \beta \end{bmatrix} - \\ & - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ S(\beta, \bar{R}) \end{bmatrix} + [g_0 - w_0(t)]_x \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} + \\ & + [g_0 - w_0(t)]_y \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} + \left( C(t) - \frac{p_0}{\rho} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (75) \end{aligned}$$

Здесь для компактности записи введен вектор квадратичных форм по переменным  $R_k$ , определяемый формулой

$$S(\beta, \bar{R}) = \nabla_{\beta} (\bar{R}^T \cdot B(\beta) \cdot \bar{R}).$$

Этот вектор имеет размерность  $N + 1$ , а каждая его компонента является квадратичной формой по  $R_k$  с матрицей, обозначаемой в дальнейшем через  $S^{(i)}, i = 0, 1, \dots, N$ .

Докажем равенство (74) и заодно выведем формулы для элементов векторов  $K_1, K_2$  и матрицы  $K_0$ . Расписав матрицу Якоби (73) и воспользовавшись формулами (39), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} K(\beta) &= \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_0} & \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_0} & \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_N} & \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_N} & \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_N} \end{bmatrix} = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0 \xi \cos \eta & f_0 \xi \sin \eta & \sum_{n=0}^N \beta_n f_0 f_n \\ f_1 \xi \cos \eta & f_1 \xi \sin \eta & \sum_{n=0}^N \beta_n f_1 f_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_N \xi \cos \eta & f_N \xi \sin \eta & \sum_{n=0}^N \beta_n f_N f_n \end{bmatrix} \xi d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Здесь считается, что интеграл от матрицы равен матрице из интегралов от ее элементов. Далее, третий столбец в матрице справа можно, очевидно, представить в виде произведения некоторой матрицы  $K_0$  на вектор  $\beta$ . Тогда, рассматривая матрицу как совокупность столбцов, получим формулу

$$K(\beta) = [K_1, K_2, K_0 \cdot \beta],$$

где

$$K_1 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0(\xi, \eta) \\ f_1(\xi, \eta) \\ \vdots \\ f_N(\xi, \eta) \end{bmatrix} \xi^2 \cos(\eta) d\eta d\xi,$$

$$K_2 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0(\xi, \eta) \\ f_1(\xi, \eta) \\ \vdots \\ f_N(\xi, \eta) \end{bmatrix} \xi^2 \sin(\eta) d\eta d\xi,$$

$$K_0 = (k_{ij}) = \left( \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) f_j(\xi, \eta) \xi d\eta d\xi \right),$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (76)$$

Отсюда следует, что равенство (74) верно, а элементы векторов  $K_1$ ,  $K_2$  и матрицы  $K_0$  вычисляются по формулам (76).

Остальные коэффициенты определяются следующими формулами, вытекающими из (40), (41): матрица  $A = (a_{ki})$  –

$$a_{ki} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \varphi_k \left[ \xi, \eta, \sum_{n=0}^N \beta_n f_n(\xi, \eta) \right] \xi d\eta d\xi,$$

$$k = 0, 1, \dots, M, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (77)$$

матрица  $B = (b_{kj})$  –

$$b_{kj} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(\xi, \eta, \beta)} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \xi dz d\eta d\xi,$$

$$k, j = 0, 1, \dots, M; \quad (78)$$

матрицы  $S^{(i)} = (s_{kj}^{(i)})$  вектора квадратичных форм  $S(\beta, R)$  –

$$s_{kj}^{(i)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \left[ \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \right]_{z=\zeta(\xi, \eta, \beta)} \xi d\eta d\xi,$$

$$k, j = 0, 1, \dots, M, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (79)$$

вектор  $F = (F_i)$  –

$$F_i = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi, \eta) \xi d\eta d\xi,$$

$$i = 0, 1, \dots, N. \quad (80)$$

В соотношениях (76) – (80) координатные функции  $\varphi_k(\xi, \eta, z)$ ,  $f_i(\xi, \eta)$  определяются формулами (62), (64).

Теперь систему уравнений (75) можно классифицировать как квазилинейную систему интегродифференциальных уравнений первого порядка, в общем случае неавтономных, с симметрической матрицей при производных

$$\begin{bmatrix} 0 & A(\beta) \\ A^T(\beta) & 0 \end{bmatrix}.$$

Симметричность этой матрицы сохраняется даже при  $N \neq M$ . Элементы матрицы  $A$  зависят только от части неизвестных величин, а именно, от  $\beta_i$ . Другие члены уравнений, содержащие неизвестные функции в интегралах, также зависят только от  $\beta_i$ , причем эти величины встречаются и в подынтегральных функциях (например, в элементах  $a_{ij}$ ), и в пределах интегрирования (например, в элементах  $b_{ij}$ ). Правая часть системы содержит свободные, линейные и квадратичные члены относительно неизвестных величин  $R_k, \beta_i$ . Из формул (78), (76) для элементов матриц  $B(\beta)$ ,  $K_0$  вытекает, что эти матрицы, а следовательно, и матрица

$$\begin{bmatrix} B(\beta) & 0 \\ 0 & [g_0 - w_0(t)]_z K_0 \end{bmatrix}$$

являются симметрическими.

Установленная симметрия уравнений нелинейных колебаний жидкости аналогична известной симметрии уравнений линейных колебаний "твердых" механических систем с конечным числом степеней свободы. Однако в случае "жидкой" колебательной системы проявляется ее специфика, связанная с зависимостью от свободной поверхности  $\zeta(\xi, \eta, \beta)$  элементов указанных симметрических матриц и с наличием квадратичной формы  $S(\beta, R)$ . Уравнения (75) кладутся в основу предлагаемого метода численного анализа нелинейных колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде.

## 7. БЛОЧНАЯ СТРУКТУРА МАТРИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Выделим в матричных коэффициентах рассматриваемых уравнений типа Гамильтона блочные структуры, которые затем будут использованы для построения алгоритмов вычисления этих матриц.

Исходные уравнения типа Гамильтона (75) получены в результате представления потенциала и

свободной поверхности в виде *простых* (однократных) сумм, а именно:

$$\varphi(\xi, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^M R_m(t) \varphi_m(\xi, \eta, z),$$

$$\zeta(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^N \beta_n(t) f_n(\xi, \eta).$$

С другой стороны, введение системы координатных функций для потенциала в виде *двойной* последовательности

$$\{\varphi_{ij}(\xi, \eta, z)\} = \{\cos(i\eta)\psi_{ij}(\xi, z), \sin(i\eta)\psi_{ij}(\xi, z)\},$$

приводит к представлению потенциала через *двойную* сумму, а именно:

$$\varphi = \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J [P_{ij}(t) \cos(i\eta) + R_{ij}(t) \sin(i\eta)] \psi_{ij}(\xi, z).$$

Аналогичное представление получается и для свободной поверхности:

$$\zeta = \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J [p_{ij}(t) \cos(i\eta) + r_{ij}(t) \sin(i\eta)] \psi_{ij}(\xi, h_0). \tag{81}$$

При обращении к формулам (76) – (80) для вычисления матричных коэффициентов  $A, B, S^{(i)}, K_0, K_1, K_2, F$  возникает вопрос о связи элементов простых последовательностей  $\{\varphi_m\}, \{f_n\}$  и двойных последовательностей  $\{\varphi_{ij}\}$ . (В случае последовательности  $\{f_n\}$  в функциях  $\varphi_{ij}$  нужно полагать  $z = h_0$ .) Этот вопрос, очевидно, равносильен вопросу о способе нумерации элементов таблицы с двумя входами

$$\begin{bmatrix} \psi_{01} & & \psi_{02} & \dots \\ \psi_{11} \cos \eta & \psi_{11} \sin \eta & \psi_{12} \cos \eta & \psi_{12} \sin \eta \\ \psi_{21} \cos 2\eta & \psi_{21} \sin 2\eta & \psi_{22} \cos 2\eta & \psi_{22} \sin 2\eta \\ \psi_{31} \cos 3\eta & \psi_{31} \sin 3\eta & \psi_{32} \cos 3\eta & \psi_{32} \sin 3\eta \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \tag{82}$$

которая порождает двойные последовательности  $\{\varphi_{ij}\}$ . В дальнейшем эта таблица (она не является матрицей, так как число элементов в ее нулевой строке отлично от числа элементов в остальных строках) называется *таблицей гармоник*. При бесконечном числе членов в аппроксимирующих суммах таблица гармоник становится бесконечной.

Элементы таблицы гармоник можно перенумеровать многими способами. В дальнейшем используется способ нумерации "по строкам", который

сравнительно просто алгоритмизируется. Заметим, что в этом случае при увеличении числа столбцов в таблице гармоник (82), т. е. при изменении вида аппроксимирующих выражений путем добавления слагаемых с возрастающим индексом  $j$ , ее старым элементам, начиная с первой строки, необходимо присваивать новые номера (старые элементы в нулевой строке свои номера сохраняют). Когда в этой таблице увеличивается только число строк при сохранении числа столбцов, номера старых элементов не изменяются.

Как видно из (82), все элементы таблицы гармоник распадаются на две группы, в одну из которых входят элементы, не зависящие от угловой координаты  $\eta$ , а в другую – элементы с  $\cos(i\eta)$  и  $\sin(i\eta)$ . Точнее, первая группа состоит из элементов нулевой строки, которые не зависят от  $\eta$ , а вторая – из элементов строк с первой по последнюю, у которых номера  $i = 1, \dots, I$ . В соответствии с этим каждый из матричных коэффициентов  $A, B, S^{(i)}, K_0$  разбивается на 4 блока, два диагональных и два внедиагональных. В верхних диагональных блоках подинтегральные функции не содержат координатных функций  $f_k, \varphi_k$  с множителями  $\cos(i\eta), \sin(i\eta)$ , в нижних диагональных блоках каждая из координатных функций  $f_k, \varphi_k$ , стоящая под соответствующим интегралом, содержит множителем либо  $\cos(i\eta)$ , либо  $\sin(i\eta)$ , а во внедиагональных блоках только одна из координатных функций  $f_k, \varphi_k$  под интегралами содержит множителем либо  $\cos(i\eta)$ , либо  $\sin(i\eta)$ . Другими словами, подинтегральные функции в верхних диагональных блоках содержат множителями одночлены от функций  $\cos(i\eta), \sin(i\eta)$  нулевой степени, в нижних диагональных блоках – второй степени, во внедиагональных блоках – первой степени.

**Замечание.** Подынтегральные функции могут содержать  $\cos(i\eta), \sin(i\eta)$  вне указанных одночленов. Это имеет место в случаях, когда под интегралом производится замена  $z = \zeta(\xi, \eta, t)$ , но в этих случаях функции  $\cos(i\eta), \sin(i\eta)$  из  $\zeta(\xi, \eta, t)$  не влияют на блочное разбиение матриц. Например, при  $M = N = 7$  подинтегральная функция в элементе

$$a_{22} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_2(\xi, \eta) \varphi_2(\xi, \eta) \sum_{n=0}^N \beta_n f_n \xi d\eta d\xi$$

из нижнего диагонального блока матрицы  $A$  содержит одночленный множитель  $\cos^2(\eta)$ , поскольку координатные функции  $f_2$  и  $\varphi_2$  имеют множителями  $\cos(\eta)$ . Кроме того, подинтегральная функция зависит также от функций  $\cos(i\eta), \sin(i\eta)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), стоящих в аргументе  $z$  функции  $\varphi_2$  в

силу замены  $z = \zeta(\xi, \eta, t)$ , но на блочное разбиение матрицы  $A$  это не влияет.

Сделанное замечание относится и к матрицам  $S^{(i)}$ . Подынтегральные же функции матриц  $B, K_0, K_1, K_2, F$  содержат  $\cos(i\eta), \sin(i\eta)$  только в виде одночленов соответствующих степеней, поскольку замена  $z = \zeta(\xi, \eta, t)$  в них не производится.

Отмеченные особенности структуры матричных коэффициентов учтены в подпрограммах-функциях, обеспечивающих вычисление элементов этих матричных коэффициентов.

### 8. СВЯЗЬ ОДИНАРНЫХ И ДВОЙНЫХ ИНДЕКСОВ

Установим необходимые для дальнейшего формулы связи одинарных и двойных индексов. Для этого рассмотрим сначала таблицу нулей  $k_i^{(j)}$ , определяемых формулой (59), следующего вида:

$$\begin{bmatrix} k_0^{(1)} & k_0^{(2)} & \dots & k_0^{(m_0)} \\ k_1^{(1)} & k_1^{(2)} & \dots & k_1^{(m_1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_I^{(1)} & k_I^{(2)} & \dots & k_I^{(m_I)} \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Номера  $i$  строк в этой таблице изменяются от 0 до  $I$ , а число элементов в каждой строке задается набором чисел

$$(m_0, m_1, \dots, m_I),$$

где  $m_i$  – число элементов в  $i$ -й строке. Размеры таблицы нулей (83) однозначно определяются размерами таблицы гармоник (82). Действительно, число элементов в ее нулевой строке равно числу элементов в нулевой строке таблицы гармоник, а число  $m_i$  элементов в ее  $i$ -ой строке, начиная с первой, в два раза меньше числа  $n_i$  элементов в  $i$ -ой строке таблицы гармоник, т.е.  $n_i = 2m_i$ . Это обусловлено тем, что каждому элементу  $k_i^{(j)}$  из таблицы нулей соответствует, как видно из (82), две гармоники  $\cos(i\eta)\psi_{ij}, \sin(i\eta)\psi_{ij}$  из  $i$ -ой же строки таблицы гармоник. Таблицы с переменным числом элементов в строках соответствуют, в отличие от (81), аппроксимации свободной поверхности двойной суммой вида

$$\zeta = \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{m_i} [p_{ij}(t) \cos(i\eta) + r_{ij}(t) \sin(i\eta)] \psi_{ij}(\xi, h_0). \quad (84)$$

(Аналогичной суммой задается, очевидно, и потенциал.)

**Замечание.** Верхние пределы  $I, m_i$  для индексов  $i, j$  в сумме (84) независимы. Число строк в таблице гармоник и число элементов в каждой из строк определяется только выбором аппроксимирующего выражения, диктуемого конкретной вычислительной задачей.

В паре индексов  $(i, j)$  первый является номером строки, а второй – номером элемента в  $i$ -ой строке таблицы корней. По отношению же к таблице гармоник индекс  $i$  в паре  $(i, j)$  по-прежнему обозначает номер строки, а индекс  $j$  – номер пары элементов, содержащих одинаковые числа  $k_i^{(j)}$ . Задача заключается в том, чтобы одинарному индексу  $k$  элемента  $f_k$  последовательности  $\{f_k\}$  поставить в соответствие пару индексов  $(i, j)$  одного из элементов последовательности  $\{\psi_{ij}\}$ . Другими словами, нужно найти целочисленные функции  $i(k), j(k)$  целого аргумента  $k$ .

Для решения этой задачи введем дополнительный индекс  $l$ , обозначающий номер элемента в  $i$ -ой строке таблицы гармоник. В паре индексов  $(i, l)$  первый, как и раньше, обозначает номер строки, а второй – номер элемента (а не пары элементов, как в случае  $(i, j)$ ) в  $i$ -й строке. Считаем, что в  $i$ -й строке индекс  $l$  изменяется от 0 до  $n_i - 1$ , что будет иметь значение в дальнейшем. Очевидно,  $l = l(k)$ , т.е. индекс  $l$  является функцией индекса  $k$ . Индексация  $(i, l)$  соответствовала бы представлению свободной поверхности в виде

$$\zeta = \sum_{i=0}^I \sum_{l=0}^{n_i-1} p_{il}^*(t) f_{il}(\xi, \eta),$$

где функции  $p_{il}^*$  и  $f_{il}$  являются перенумерованными с помощью индексов  $(i, l)$  функциями  $p_{ij}, r_{ij}$  и  $\cos(i\eta)\psi_{ij}, \sin(i\eta)\psi_{ij}$  из аппроксимации (84) соответственно.

Поставленную задачу об индексах решают следующие утверждения (проверяются непосредственно):

1) Номер  $M$  последнего члена одинарной последовательности  $\{f_k\}_{k=0}^M$  связан с верхним пределом  $I$  и числами  $m_i$  в двойной сумме (84) соотношением

$$M + 1 = m_0 + 2 \sum_{i=1}^I m_i.$$

2) Одинарный номер  $k$  лежит в пределах

$$0 \leq k \leq m_0 - 1$$

для элементов нулевой строки из таблицы гармоник, а для элементов  $i$ -й строки он удовлетворяет неравенствам

$$a_i \leq k \leq b_i,$$

где

$$a_i = m_0 + 2 \sum_{n=1}^{i-1} m_n, \quad b_i = m_0 + 2 \sum_{n=1}^i m_n - 1.$$

3) Если одинарный индекс  $k$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq k \leq m_0 - 1$ , то соответствующие ему двойные индексы  $(i, j)$  задаются формулами

$$i(k) = 0, \quad j(k) = k + 1.$$

Если же одинарный индекс  $k$  удовлетворяет неравенству  $a_i \leq k \leq b_i$ , то соответствующие ему двойные индексы  $(i, j)$  пересчитываются по формулам

$$i(k) = i, \quad j(k) = E\left(\frac{l(k) + 2}{2}\right), \quad (85)$$

где  $E(x)$  обозначает функцию, равную наибольшему целому числу, не превосходящему  $x$ , а  $l(k)$  определяется по формуле

$$l(k) = k - a_i.$$

Таким образом, вычисление двойных индексов  $(i, j)$  по заданному одинарному индексу  $k$ , соответствующему выбранной аппроксимации с параметрами  $I, m_i$ , сводится к вычислению диапазона изменения индекса  $k$ , определению границ  $(a_i, b_i)$  изменения индекса  $k$  в пределах каждой строки таблицы гармоник и последующему применению формул (85).

**Пример.** Пусть выбранная аппроксимация свободной поверхности характеризуется таблицей гармоник вида

$$\begin{bmatrix} \psi_{01} & \psi_{02} \\ \psi_{11} \cos \eta & \psi_{11} \sin \eta \\ \psi_{21} \cos 2\eta & \psi_{21} \sin 2\eta \\ \psi_{31} \cos 3\eta & \psi_{31} \sin 3\eta \end{bmatrix}.$$

Ей соответствует таблица нулей

$$\begin{bmatrix} k_0^{(1)} & k_0^{(2)} \\ k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \\ k_3^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что таблица гармоник имеет параметры

$$I = 3, \quad (m_0, m_1, m_2, m_3) = (2, 1, 1, 1).$$

Из соотношения для  $M$  находим, что одинарный индекс  $k$  изменяется в пределах от 0 до 7. Таким

образом, рассматриваемая аппроксимация, выраженная через одинарную и двойную суммы, имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= h_0 + \sum_{k=1}^7 \beta_k(t) f_k(\xi, \eta) = \\ &= h_0 + p_{02}(t) \psi_{02}(\xi, h_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^1 [p_{ij}(t) \cos(i\eta) + r_{ij}(t) \sin(i\eta)] \psi_{ij}(\xi, h_0). \end{aligned} \quad (86)$$

(Здесь положено  $f_0(\xi, \eta) = 1$ , что следует из выражения (84) и (6.1), так как  $k_0^{(1)} = 0$ . Кроме того,  $\beta_0(t) = h_0$  в силу (68).) Это так называемая "семи-модовая" аппроксимация свободной поверхности.

Используя формулы для  $a_i, b_i$ , находим, что одинарный индекс  $k$  распределен по строкам следующим образом:

$$a_0 = 0 \leq k \leq b_0 = 1, \quad a_1 = 2 \leq k \leq b_1 = 3,$$

$$a_2 = 4 \leq k \leq b_2 = 5, \quad a_3 = 6 \leq k \leq b_3 = 7.$$

Наконец, по формулам (85) получаем такую конкретную реализацию функции  $\{k\} \rightarrow \{(i(k), j(k))\}$ , задающей соответствие одинарных и двойных индексов:

$$\begin{aligned} &\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \\ &\rightarrow \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}. \end{aligned}$$

В дальнейшем наличие этой функции дает возможность при вычислении интегралов автоматически сопоставлять гармоникам  $f_k(\xi, \eta), \varphi_k(\xi, \eta, z)$  необходимые комбинации тригонометрических функций синуса, косинуса, косинуса гиперболического, функций Бесселя и чисел  $k_i^{(j)}$ .

## 9. МАТРИЦА $K_0$ И ВЕКТОРЫ $K_1, K_2, F$

Элементы матрицы  $K_0$  и векторов  $K_1, K_2, F$  могут быть представлены простыми точными формулами (без интегрирований), что удобно для вычислений. Выведем эти формулы.

Проанализируем сначала матрицу  $K_0$ , используя ее блочную структуру и симметрию. Ввиду симметричности ограничимся ее наддиагональной частью, в которую включим и диагональ. Блочная структура влечет разбиение наддиагональной части на 3 блока, два из которых состоят из наддиагональных элементов верхнего и нижнего диагональных блоков матрицы  $K_0$ , а третий совпадает с ее верхним внедиагональным блоком. Таким

образом, дело сводится к рассмотрению верхней треугольной матрицы

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ & C_{22} \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Блок  $C_{12} = 0$ . Действительно, элементы этого блока содержат под интегралами одночлены от  $\cos(i\eta)$ ,  $\sin(i\eta)$  первой степени, а, как видно из формул (76), интегрирование по аргументу  $\eta$  выполняется на отрезке  $(0, 2\pi)$ . Следовательно, эти элементы равны нулю.

Блок  $C_{11}$  является диагональным. Действительно, элементы этого блока содержат под интегралами одночлены от  $\cos(i\eta)$ ,  $\sin(i\eta)$  в нулевой степени, так как составляются из элементов только нулевой строки матрицы гармоник. Следовательно, элементы любой  $i$ -ой строки этого блока не зависят от  $\eta$  и, как видно из формул (76), будут содержать сомножителями интегралы от функций Бесселя  $J_0$  вида

$$\int_0^R J_0(k_0^{(i)}\xi) J_0(k_0^{(j)}\xi) \xi d\xi, \quad j \geq i. \quad (88)$$

Но из теории функций Бесселя вытекает, что функции  $J_0(k_0^{(i)}\xi)$  и  $J_0(k_0^{(j)}\xi)$  ортогональны с весом  $\xi$  на интервале  $(0, 2\pi)$  при  $i \neq j$ . Следовательно, внедиагональные элементы блока  $C_{11}$  равны нулю. Для диагональных же элементов этого блока получаются формулы

$$k_{mm} = \rho\pi R^2, \quad m = 0, \dots, m_0 - 1. \quad (89)$$

При выводе этого соотношения использована известная формула для квадрата нормы функций Бесселя [13, стр. 645]:

$$\int_0^R J_n^2(k_n^{(j)}\xi) \xi d\xi = \frac{R^2}{2} \left[ 1 - \frac{n^2}{(k_n^{(j)} R)^2} \right] J_n^2(k_n^{(j)} R), \quad (90)$$

в которой положено  $n = 0$ ,  $j = m + 1$ .

Рассмотрим, наконец, блок  $C_{22}$  в матрице (87). Элементы этого блока содержат под интегралами одночлены второй степени от  $\cos(i\eta)$ ,  $\sin(i\eta)$ , т.е. зависят от всевозможных попарных произведений этих тригонометрических функций. Точнее, как видно из формул (76), подынтегральная функция элемента  $k_{mn}$  из  $m$ -ой строки нижнего диагонального блока ( $m \geq m_0$ ) получается умножением функции  $f_m$  на каждую из функций  $f_n$  ( $n \geq m$ ) последовательности

$$\{f_n\}_{n=m_0}^M = \{f_{m_0}, f_{m_0+1}, \dots, f_M\}.$$

Следовательно, подынтегральная функция такого элемента  $k_{mn}$  будет иметь один из следующих четырех видов (с точностью до нормирующего множителя):

$$\begin{aligned} & \cos[i(m)\eta] \cos[i(n)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(n)}[k_{i(n)}^{(j(n))}\xi] \xi, \\ & \sin[i(m)\eta] \cos[i(n)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(n)}[k_{i(n)}^{(j(n))}\xi] \xi, \\ & \cos[i(m)\eta] \sin[i(n)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(n)}[k_{i(n)}^{(j(n))}\xi] \xi, \\ & \sin[i(m)\eta] \sin[i(n)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(n)}[k_{i(n)}^{(j(n))}\xi] \xi, \end{aligned} \quad (91)$$

где  $(i(m), j(m))$ ,  $(i(n), j(n))$  – пары двойных индексов, отвечающие одинарным индексам  $m$ ,  $n$  ( $m_0 \leq m \leq n \leq M$ ), причем

$$1 \leq i(m), i(n) \leq I,$$

$$1 \leq j(m) \leq m_{i(m)}, \quad 1 \leq j(n) \leq m_{i(n)}.$$

Здесь возможны различные случаи. Если  $m = n$ , то имеем диагональные элементы  $k_{mm}$  ( $m = m_0, \dots, M$ ) и  $i(m) = i(n)$ ,  $j(m) = j(n)$ . Поскольку второму из двойных индексов  $j(m)$  могут отвечать две гармоники, одна из которых содержит  $\cos(i(m)\eta)$ , а другая  $\sin(i(m)\eta)$ , соседние диагональные элементы блока  $C_{22}$ , начиная с  $m = m_0$ , будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} k_{mm} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \cos^2[i(m)\eta] \frac{J_{i(m)}^2[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi]}{J_{i(m)}^2[k_{i(m)}^{(j(m))}R]} \xi^2 d\eta d\xi = \\ &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \sin^2[i(m)\eta] \frac{J_{i(m)}^2[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi]}{J_{i(m)}^2[k_{i(m)}^{(j(m))}R]} \xi d\eta d\xi. \end{aligned}$$

После интегрирования, с учетом соотношения (90) для функций Бесселя, получаем следующие формулы для диагональных элементов блока  $C_{22}$ :

$$k_{mm} = \rho \frac{\pi R^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{i(m)}{k_{i(m)}^{(j(m))} R} \right)^2 \right], \quad m = m_0, \dots, M. \quad (92)$$

Теперь рассмотрим случай  $m < n$ . Гармоники  $f_n$  разобьем на две группы. В первую группу отнесем те  $f_n$ , для которых индекс  $i(n) = i(m)$  (т.е. которые лежат в одной с  $f_m$  строке таблицы гармоник). Во вторую группу отнесем  $f_n$ , для которых  $i(n) < i(m)$ , т.е. лежащие в разных с  $f_m$  строках той же таблицы. Если  $f_n$  входит в первую группу, то произведение  $f_m f_n$ , как видно из (91), будет иметь одну из форм

$$\cos[i(m)\eta] \cos[i(m)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(n))}\xi],$$



$$\begin{aligned} & \sin[i(m)\eta] \cos[i(m)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(n))}\xi], \\ & \cos[i(m)\eta] \sin[i(m)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(n))}\xi], \\ & \sin[i(m)\eta] \sin[i(m)\eta] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(m))}\xi] J_{i(m)}[k_{i(m)}^{(j(n))}\xi]. \end{aligned}$$

Здесь тригонометрические функции имеют одинаковый аргумент  $i(m)\eta$ , а функции Бесселя  $J$  имеют одинаковый порядок  $i(m)$ . Для функций  $f_n$  первой группы, лежащих в одной с  $f_m$  строке таблицы гармоник, может быть либо  $j(n) = j(m)$ , либо  $j(n) > j(m)$  (последнее в силу  $n > m$ ). Если  $j(n) = j(m)$ , то произведение  $f_m f_n$  имеет вторую из приведенных форм, а соответствующий элемент  $k_{mn} = 0$  в силу равенства нулю интеграла по  $\eta$ . Если же  $j(n) > j(m)$ , то  $f_m f_n$  имеет первую, третью или четвертую из приведенных форм. Но тогда элементы  $k_{mn}$ , соответствующие первой и четвертой формам, равны нулю в силу ортогональности (с весом  $\xi$ ) функций Бесселя  $J_{i(m)}$  от различных аргументов, а соответствующие третьей форме равны нулю в силу ортогональности синусов и косинусов от различных аргументов.

Пусть теперь гармоники  $f_n$  принадлежат второй группе, т.е. находятся в строках матрицы гармоник, отличных от строки с  $f_m$ . Но тогда все произведения  $f_m f_n$  содержат взаимно ортогональные синусы и косинусы, что приводит к равенству нулю соответствующих элементов  $k_{mn}$ . Отсюда следует, что блок  $C_{22}$  также является диагональным.

Таким образом, в самом общем случае матрица  $K_0$  имеет очень простую структуру, а именно: она является диагональной, причем ее элементы в первых  $m_0$  строках определяются по формулам (89), а в остальных строках попарно равны между собой и задаются формулами (92).

Рассмотрим теперь векторы  $K_1$ ,  $K_2$  и  $F$ , определяющие свободные члены в правой части уравнений (75). Сначала подставим в формулы (76) выражения координатных функций  $f_n$  из (64). Тогда для первых  $m_0$  компонент векторов  $K_1$  и  $K_2$ , соответствующих функциям  $f_n$  из нулевой строки таблицы гармоник, получаются выражения

$$K_1^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \cos(\eta) \frac{J_0(k_0^{(k+1)}\xi)}{J_0(k_0^{(k+1)}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_2^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin(\eta) \frac{J_0(k_0^{(k+1)}\xi)}{J_0(k_0^{(k+1)}R)} d\eta d\xi.$$

Отсюда видно, что

$$K_1^{(k)} = 0, \quad K_2^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m_0 - 1. \quad (93)$$

Компоненты векторов  $K_1$  и  $K_2$ , соответствующие функциям  $f_n$  из 2-й и последующих строк таблицы гармоник, определяются одной из следующих формул:

$$K_1^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \cos(\eta) \cos[i(k)\eta] \frac{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}\xi)}{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_1^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \cos(\eta) \sin[i(k)\eta] \frac{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}\xi)}{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_2^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin(\eta) \cos[i(k)\eta] \frac{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}\xi)}{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_2^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin(\eta) \sin[i(k)\eta] \frac{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}\xi)}{J_{i(k)}(k_{i(k)}^{(j(k))}R)} d\eta d\xi.$$

Поскольку для 2-й и последующих строк первый из двойных индексов  $i(k) > 1$ , из этих формул следует, что

$$K_1^{(k)} = 0, \quad K_2^{(k)} = 0, \quad k = m_0 + 2m_1, \dots, M. \quad (94)$$

Наконец, рассмотрим компоненты векторов  $K_1$ ,  $K_2$ , соответствующие функциям  $f_k$  из первой строки таблицы гармоник. Они, очевидно, определяются одной из следующих формул:

$$K_1^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \cos^2(\eta) \frac{J_1(k_1^{(j(k))}\xi)}{J_1(k_1^{(j(k))}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_1^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \cos(\eta) \sin(\eta) \frac{J_1(k_1^{(j(k))}\xi)}{J_1(k_1^{(j(k))}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_2^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin(\eta) \cos(\eta) \frac{J_1(k_1^{(j(k))}\xi)}{J_1(k_1^{(j(k))}R)} d\eta d\xi,$$

$$K_2^{(k)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin^2(\eta) \frac{J_1(k_1^{(j(k))}\xi)}{J_1(k_1^{(j(k))}R)} d\eta d\xi.$$

$$k = m_0, \dots, m_0 + 2m_1 - 1, \quad j(k) = 1, \dots, m_1.$$

Компоненты, содержащиеся под интегралами функцию  $\sin(\eta) \cos(\eta)$ , равны, очевидно, нулю. Для отличных от нуля компонент после интегрирования получаются следующие формулы:

$$K_1^{(k)} = c_j, \quad K_2^{(k+1)} = c_j,$$

$$k = m_0, m_0 + 2, m_0 + 4, \dots, m_0 + 2m_1 - 2, \quad j = j(k),$$

где

$$c_j = \frac{\rho\pi R^2}{k_1^{(j)}} \frac{J_2(k_1^{(j)}R)}{J_1(k_1^{(j)}R)} \quad j = 1, 2, \dots, m_1. \quad (95)$$

Таким образом, у векторов  $K_1, K_2$  могут быть отличны от нуля только компоненты, соответствующие координатным функциям  $f_k$  из первой строки таблицы гармоник. Количество таких отличных от нуля компонент полностью определяется числом  $m_1$  элементов в первой строке таблицы нулей. У вектора  $K_1$  отличны от нуля только четные после  $k = m_0 - 1$  компоненты, а у вектора  $K_2$  – только нечетные, причем их значения на соответствующих местах совпадают, т.е.  $K_1^{(k)} = K_2^{(k+1)} = c_j$  ( $j = j(k)$ ).

Рассмотрим теперь вектор  $F$  и подставим в (80) координатные функции  $f_k$  из (64). Принимая во внимание, что корень  $k_0^{(1)} = 0$  и  $J_0(0) = 1$ , получаем после интегрирования  $F_0 = \rho\pi R^2$ . Для остальных элементов этого вектора, соответствующих функциям  $f_k$  из нулевой строки таблицы гармоник, получаются соотношения

$$F_k = 2\rho\pi \int_0^R \xi \frac{J_0(k_0^{(k+1)}\xi)}{J_0(k_0^{(k+1)}R)} d\xi, \quad k = 1, \dots, m_0 - 1.$$

Но при указанных значениях  $k$  функции Бесселя  $J_0(k_0^{(k+1)}\xi)$  и  $J_0(k_0^{(1)}\xi) \equiv 1$  ортогональны с весом  $\xi$  на интервале  $(0, R)$  (это следует из их ортогональности на интервале  $(0, 1)$ ). Следовательно,  $F_k = 0$  ( $k = 1, \dots, m_0 - 1$ ). Остальные  $F_k$  равны нулю из-за наличия у координатных функций  $f_k$  множителей  $\sin(i(k)\eta), \cos(i(k)\eta)$ . В результате, для вектора  $F$  получается представление

$$F = (\rho\pi R^2, 0, \dots, 0)^T. \quad (96)$$

Полученные простые формулы (89), (92) для элементов матрицы  $K_0$ ; (95) – для векторов  $K_1, K_2$  и (96) – для вектора  $F$  использованы в алгоритме численного решения уравнений типа Гамильтона, предлагаемого в настоящей работе и примененного ниже для исследования конкретной гидродинамической задачи.

## 10. СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ВО ВРЕМЯ РАЗГОНА БАКА

Уравнения типа Гамильтона (75) положены в основу алгоритма расчета волновых движений жидкости в цилиндрическом баке. Этот алгоритм во многом совпадает с описанным в работе [1], поскольку для цилиндрического бака уравнения типа Гамильтона сохранили особенности, присущие

случаю прямоугольного бака. Дополнительно алгоритм включает операции, связанные с обработкой более сложных выражений для координатных функций и для аппроксимаций в виде простых и двойных сумм. Он реализован на языке Фортран и применен к сформулированной выше нелинейной задаче о волновых движениях жидкости в разгоняемом по горизонтали цилиндрическом баке.

Расчеты выполнены для системы со следующими параметрами:

$$R = 1\text{м}, \quad l = 2\text{м}, \quad h_0 = 0.5\text{м}, \quad g = 9.81\text{м} \cdot \text{с}^{-2}, \\ \rho = 1000\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad p_0 = 10^5\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Первые три собственные частоты колебаний жидкости в вертикальном неподвижном баке, рассчитанные по линейной теории (формула (58)) при заданных габаритах бака и уровне жидкости, имеют следующие значения (в рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ):

$$\omega_1 = 4.2340, \quad \omega_2 = 5.4732, \quad \omega_3 = 6.6278.$$

Соответствующие периоды (в секундах)

$$T_1 = 1.484, \quad T_2 = 1.148, \quad T_3 = 0.948.$$

Произвольная функция  $C(t)$  из интеграла Лагранжа – Коши была выбрана по методу работы [8] из условия постоянства объема жидкости и имела вид

$$C(t) = \frac{p_0}{\rho} + h_0(g + w).$$

Начальные условия (45), (46) рассматривались в момент  $t_0 = 0$ , соответствовали состоянию относительного равновесия жидкости до появления ускорения бака и во всех случаях были следующими:

$$R_m(0) = 0, \quad m = 0, \dots, M,$$

$$\beta_i(0) = h_0, \quad \beta_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задача заключается в установлении зависимости обобщенных координат  $\beta_i(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) свободной поверхности жидкости как функций времени от величины ускорения  $w$  бака.

### 10.1. Численные эксперименты с моделью

Для выбора оптимальных значений параметров модели (интервала  $[t_0, t_1]$ , шага счета  $h$ , чисел  $N, M$ ) были выполнены численные эксперименты, которые сводились к испытаниям модели (численному интегрированию методом Рунге – Кутты уравнений (75)) при различных значениях ее параметров, а именно:

$$N = M = 3; 5; 7; 9; 11, \quad h = 0.01; 0.02; 0.1; 0.2\text{с}.$$

Табл. 1. Обобщенные координаты  $\beta_i(t)$  свободной поверхности. Ускорение бака  $w = 2.0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , аппроксимации  $N=3, N=5$

$t, \text{ с}$	$\beta_0(t)$	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_0(t)$	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_4(t)$	$\beta_5(t)$
0.0	0.5	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0
0.1	0.5	0	0	-0.015	0.5	0	0	-0.015	0	0
0.2	0.5	0.001	0	-0.058	0.5	0.001	0	-0.057	-0.001	0
0.3	0.5	0.003	0	-0.120	0.5	0.003	0	-0.119	-0.003	0
0.4	0.5	0.007	0	-0.191	0.5	0.007	0	-0.190	-0.008	0
0.5	0.5	0.010	0	-0.258	0.5	0.010	0	-0.255	-0.014	0
0.6	0.5	0.011	0	-0.310	0.5	0.011	0	-0.306	-0.019	0
0.7	0.5	0.008	0	-0.338	0.5	0.008	0	-0.335	-0.022	0
0.8	0.5	0.002	0	-0.336	0.5	0.003	0	-0.337	-0.023	0
0.9	0.5	-0.003	0	-0.304	0.5	-0.002	0	-0.312	-0.021	0
1.0	0.5	-0.005	0	-0.248	0.5	-0.003	0	-0.263	-0.017	0
1.1	0.5	-0.002	0	-0.178	0.5	-0.001	0	-0.198	-0.011	0
1.2	0.5	0.004	0	-0.107	0.5	0.004	0	-0.127	-0.006	0
1.3	0.5	0.010	0	-0.049	0.5	0.009	0	-0.065	-0.002	0
1.4	0.5	0.014	0	-0.013	0.5	0.012	0	-0.021	0.001	0
1.5	0.5	0.013	0	-0.003	0.5	0.012	0	-0.003	0.002	0
1.6	0.5	0.007	0	-0.023	0.5	0.007	0	-0.014	0.003	0
1.7	0.5	-0.001	0	-0.069	0.5	0	0	-0.052	0.002	0
1.8	0.5	-0.007	0	-0.133	0.5	-0.006	0	-0.112	-0.001	0
1.9	0.5	-0.007	0	-0.205	0.5	-0.007	0	-0.182	-0.006	0
2.0	0.5	-0.002	0	-0.271	0.5	-0.002	0	-0.249	-0.014	0

Табл. 2. Обобщенные координаты  $\beta_i(t)$  при  $t = 0.8\text{с}$  в зависимости от  $N$ . Ускорение бака  $w = 2.0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$

$N$	$\beta_0(t)$	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_4(t)$	$\beta_5(t)$	$\beta_6(t)$	$\beta_7(t)$	$\beta_8(t)$	$\beta_9(t)$	$\beta_{10}(t)$	$\beta_{11}(t)$
3	0.5	0.002	0	-0.336								
5	0.5	0.003	0	-0.337	-0.023	0						
7	0.5	0.003	0	-0.338	-0.023	0	0	0.003				
9	0.5	0.003	0	-0.338	-0.023	0	0	0.003	0	0		
11	0.5	0.003	0	-0.338	-0.023	0	0	0.003	0	0	0	0

Все численные эксперименты выполнялись при  $w = 2.0\text{мс}^{-2}$  на интервале времени  $[t_0; t_1] = [0; 5]$  (в секундах). По результатам этих экспериментов были выбраны отрезок  $[t_0, t_1] = [0.0, 2.0]$ , несколько превышающий длину наибольшего периода свободных колебаний  $T_1$ , и шаг счета  $h = 0.1\text{с}$ . Для решения самого трудного вопроса – выбора параметра аппроксимации  $N$  – сравнивались значения функций  $\beta_i(t)$  при различных  $t$ , представленные в табл. 1 и 2.

Из табл. 1, где приведены значения функций  $\beta_i$

в зависимости от  $t$  при  $N = 3$  и  $N = 5$ , видно, что при всех  $t$  функция  $\beta_0(t) \equiv h_0$ , что согласуется с выражением (68). Кроме того, все  $\beta_i(t)$  колеблются по закону, близкому к гармоническому, причем наибольшие амплитуды имеет функция  $\beta_3(t)$ , соответствующая первой форме колебаний свободной поверхности. В обоих случаях максимальные значения функция  $\beta_3(t)$  достигает при  $t = 0.8 \text{ с}$ , что близко к половине периода  $T_1$  колебаний на основной частоте. При переходе от случая  $N = 3$  к  $N = 5$  значения первых трех функций  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ ,  $\beta_3(t)$  практически не изменяются, лишь ам-

плитудное значение основной функции  $\beta_3(t)$  увеличивается на единицу в третьем знаке после запятой. В табл. 2 представлены все функции  $\beta_i(t)$  при  $N = 3, 5, 7, 9, 11$  в момент  $t = 0.8$  с, когда основная функция  $\beta_3(t)$  принимает амплитудное значение. Как видно из этой таблицы, начиная с  $N = 7$  значения всех функций  $\beta_i(t)$  стабилизируются. На основании приведенных данных для дальнейших расчетов было выбрано значение параметра аппроксимации  $N = 7$ , обеспечивающее требуемую точность расчетов в данной задаче и приемлемое в отношении затрат машинного времени. Заметим, что при  $N = 7$  требуются элементы таблицы нулей (см. пример в п.8), имеющие, в соответствии с формулой (59) и [5], следующие значения:  $k_0^{(1)} = 0.000$ ,  $k_0^{(2)} = 3.8317059702$ ,  $k_1^{(1)} = 1.841118$ ,  $k_2^{(1)} = 3.05424$ ,  $k_3^{(1)} = 4.201119$ . Значение  $k_0^{(2)}$  берется с 10-ю знаками после запятой, чтобы обеспечить нужную точность при использовании рекуррентных формул для функций Бесселя. Отметим также, что все вычисления выполнялись с двойной точностью. Время счета – 1 минута на одном шаге  $h = 0.1$  с при  $N = 7$  (персональный компьютер с тактовой частотой процессора 1100 МГц и оперативной памятью 120 МБайт).

**10.2. Численное решение задачи**

Известно, что при равноускоренном движении бака "зеркало" жидкости отклоняется от плоскости горизонта на угол, определяемый по формуле (см., например, [10, стр.76, формула (3.6)])

$$\text{tg } \vartheta = -\frac{w}{g},$$

где  $\vartheta$  – угол отклонения от оси  $Oz$  вектора  $-(g_0 - w_0)$  внешней нормали к "зеркалу" жидкости, причем  $\vartheta > 0$ , если отклонение происходит по ходу часовой стрелки. В табл. 3 приведены значения угла  $\vartheta$  в зависимости от величины ускорения  $w$ . В ней ускорениям  $w = 4.9$ ,  $w = 14.7$  соответствуют углы  $\vartheta$ , при которых "зеркало" касается крышки и дна бака соответственно.

Механизм образования волн можно представить следующим образом. При возникновении ускорения первоначально покоящаяся жидкость обладает некоторой потенциальной энергией по отношению к новому положению равновесия. Жидкость устремляется к этому положению равновесия, потенциальная энергия превращается в кинетическую, и в дальнейшем жидкость совершает колебания около нового положения равновесия в соответствии с законом сохранения энергии. Как видно из

Табл. 3. Угол  $\vartheta$ (в град) отклонения "зеркала" в зависимости от ускорения  $w$ (в  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ ) бака

$w$	0.5	1.0	1.5	2.0	4.9	14.7
$\vartheta$	2.9°	5.8 °	8.7°	11.6 °	26.8°	56.0°

табл. 1 и 2, эти колебания происходят преимущественно на первой основной частоте.

В силу сделанных при постановке задачи предположений, должно быть  $w < 4.9\text{мс}^{-2}$ , чтобы "зеркало" не касалось крышки. Однако, очевидно, этого не достаточно, поскольку контакт жидкости с крышкой может произойти и при "зеркале", не пересекающем крышку. Если жидкость при некотором  $t$  достигает крышки, модель дает правильные результаты лишь на отрезке времени, предшествующем первому касанию крышки деформированной свободной поверхностью.

Процесс образования волн на свободной поверхности после возникновения ускорения  $w$  удобно наблюдать в 4-х диаметрально противоположных контрольных точках на поверхности бака, имеющих следующие полярные координаты  $(\xi, \eta)$ :

$$(R, 0), \quad (R, \frac{\pi}{2}), \quad (R, \pi), \quad (R, \frac{3\pi}{2}).$$

В этих точках аппликаты  $\zeta(\xi, \eta, t)$  свободной поверхности, в силу представления (64) и выбранных нормировок, будут определяться простыми формулами вида ( $N = 7$ )

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta(R, 0, t) = h_0 + \beta_1(t) + \beta_2(t) + \beta_4(t) + \beta_6(t), \\ z_2 &= \zeta(R, \frac{\pi}{2}, t) = h_0 + \beta_1(t) + \beta_3(t) - \beta_4(t) - \beta_7(t), \\ z_3 &= \zeta(R, \pi, t) = h_0 + \beta_1(t) - \beta_2(t) + \beta_4(t) - \beta_6(t), \\ z_4 &= \zeta(R, \frac{3\pi}{2}, t) = h_0 + \beta_1(t) - \beta_3(t) - \beta_4(t) + \beta_7(t). \end{aligned}$$

Из соображений симметрии должно быть  $z_1 = z_2$ , откуда следует

$$\beta_2(t) = \beta_6(t) \equiv 0,$$

что и получается по результатам счета (см. табл. 2).

Из приведенных формул для смещений свободной поверхности в контрольных точках и данных табл. 2 следует также, что в контрольных точках значения аппликат  $z_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) определяются, в основном, значениями обобщенной координаты  $\beta_3(t)$ .

Табл. 4. Значения аппликат  $z_i(t^*)$  (в м) свободной поверхности  $z = \zeta(\xi, \eta, t)$  в зависимости от ускорения  $w$  (в  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ ) бака. Числа  $t^*$  (в с) определяют время достижения максимумов функцией  $z_4(t)$ ,  $N = 7$

$w$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$z_1(t^*)$	0.499	0.497	0.492	0.485	0.475	0.478	0.486	0.481	0.475	0.490
$z_2(t^*)$	0.418	0.340	0.266	0.193	0.121	0.098	0.121	0.070	0.015	0.111
$z_3(t^*)$	0.499	0.497	0.492	0.485	0.475	0.478	0.486	0.481	0.475	0.490
$z_4(t^*)$	0.587	0.678	0.772	0.869	0.969	1.020	1.007	1.084	1.162	1.009
$t^*$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.5	0.5	0.5	0.4

В табл.4 приведены рассчитанные значения аппликат  $z_i(t)$  в зависимости от ускорения  $w$ . Значения аппликат указаны в моменты  $t = t^*$ , когда достигает максимума величина  $z_4(t)$  в задней контрольной точке. Если оказывалось  $z_4(t) > l/2$ , счет останавливался, так как это означало, что жидкость коснулась крышки.

Из табл.4 видно, что, как и следовало ожидать, в контрольных точках 1, 2 отклонения  $z_1, z_3$  свободной поверхности от горизонта одинаковы. В точке 3 свободная поверхность опускается, а в точке 4 поднимается относительно горизонта. При умеренных значениях ускорения ( $w \leq 2.5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ) свободная поверхность не доходит до крышки и совершает периодические колебания с полупериодом  $T/2 = 0.7\text{с}$ , близким к полупериоду  $T_1/2$  свободных колебаний на основной частоте. При ускорениях  $w > 2.5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  свободная поверхность достает до крышки, причем за время, меньшее полупериода  $T_1$ . Происходит удар жидкости о крышку. Чем больше ускорение бака, тем быстрее наступает удар, т. е. жидкость проходит расстояние  $l/2$  с большей скоростью, а значит имеет большую кинетическую энергию. Следовательно, с ростом ускорения растет сила удара. Первоначальное касание происходит в задней точке крышки бака.

Представление о форме свободной поверхности жидкости в момент ее контакта с крышкой бака дают графики рис. 1 и 2. На рис. 1 изображена линия пересечения свободной поверхности с плоскостью  $x = 0$ , рассчитанная по приближениям  $N = 3; 7; 11$ . Соответствующие значения параметров  $\beta_i(t^*)$ :

$$N = 3, \quad t^* = 0.7\text{с} -$$

$$\beta_0 = 0.5, \quad \beta_1 = 0.009, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -0.511;$$

$$N = 7, \quad t^* = 0.6\text{с} -$$

$$\beta_0 = 0.5, \quad \beta_1 = 0.018, \quad \beta_3 = -0.453,$$

$$\beta_4 = -0.041, \quad \beta_7 = 0.008, \quad \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0;$$

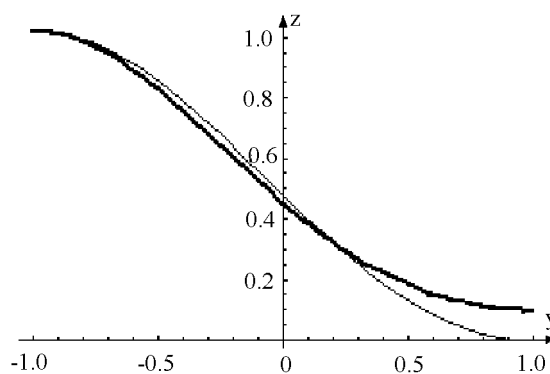


Рис. 1. Линия пересечения свободной поверхности жидкости плоскостью  $x = 0$  в момент касания крышки при ускорении бака  $w = 3.0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Жирная линия соответствует приближениям  $N = 7$  и  $N = 11$  (момент касания  $t^* = 0.6\text{с}$ ), а тонкая —  $N = 3$  (момент касания  $t^* = 0.7\text{с}$ )

$$N = 11, \quad t^* = 0.6\text{с} -$$

$$\beta_0 = 0.5, \quad \beta_1 = 0.019, \quad \beta_3 = -0.453,$$

$$\beta_4 = -0.042, \quad \beta_7 = 0.004, \quad \beta_2 = \beta_5 = 0,$$

$$\beta_6 = \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_{11} = 0.$$

При построении графиков рис. 1 использовалось то, что при  $x = 0$  полярные углы  $\eta = \pi/2, \eta = 3\pi/2$ , полярный радиус  $\xi = |y|$  и, следовательно,  $\cos \eta = 0, \sin \eta = y/|y|, \cos 2\eta = -1,$

$$\sin 3\eta = 3 \frac{y}{|y|} - 4 \left( \frac{y}{|y|} \right)^3, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Из этих графиков видно, что приближения  $N = 7$  и  $N = 11$  дают практически одинаковую форму свободной поверхности на всем отрезке  $-1 \leq y \leq 1$  и заметно уточняют ее по сравнению с приближением  $N = 3$  на отрезке  $0.3 \leq y \leq 1$ . Некоторое различие получается и в оценках момента  $t^*$  первого касания крышки свободной поверхностью.

Наконец, на рис. 2 приведен общий вид свободной поверхности, рассчитанный по приближению  $N = 7$  и соответствующий ускорению бака  $w = 3.0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Этот вид соответствует точке наблюдения  $(1, 0, 2)$  (в метрах) в системе координат  $Oxyz$ , что может иметь значение при фото- или киносъемках во время экспериментов и при сопоставлении расчетных и экспериментальных данных.

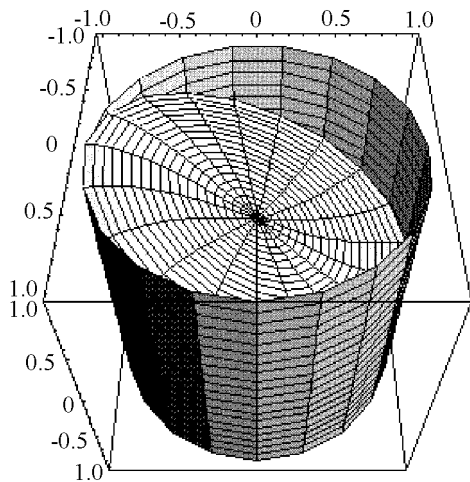


Рис. 2. Форма свободной поверхности жидкости в момент ее касания крышки бака. Ускорение бака  $w = 3.0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , момент касания  $t^* = 0.6 \text{ с}$ , приближение  $N = 7$

Заметим, что при ускорении  $w = 2.0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  "зеркало" жидкости, описываемое уравнением

$$z = 0.5 - \frac{w}{g}y,$$

имеет в точках  $y = -1$ ,  $y = 1$  аппликаты  $z(-1) = 0.704$ ,  $z(1) = 0.296$ . В то же время, из табл. 4 видно, что соответствующие аппликаты свободной поверхности имеют значения  $z_4 = 0.869$  и  $z_2 = 0.193$ . Следовательно, в соответствующий момент времени в задней точке свободная поверхность находится над "зеркалом" на высоте  $0.165 \text{ м}$ , а в передней – под ним на глубине  $0.103 \text{ м}$ . Таким образом, при ускоренном движении бака свободная поверхность жидкости совершает колебания около "зеркала" жидкости, что согласуется с описанным выше представлением о механизме возникновения волн в жидкости как о превращении потенциальной энергии жидкости относительно нового положения "зеркала" в кинетическую.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана компьютерная модель – исходные математические соотношения, алгоритм расчета, фортран-программа – колебаний жидкости в цилиндрическом баке. В основу положены точные матричные интегро-дифференциальные уравнения типа Гамильтона, для которых методом Рунге-Кутты решается задача Коши. Область применимости модели: жидкость – идеальная, однородная, несжимаемая; бак – вертикальный, недеформируемый; движения бака – поступательные, в поле силы тяжести, заданные; режим движения жидкости – безвихревой, при отсутствии контакта свободной поверхности с дном и крышкой бака. Выходные параметры модели – аппликаты свободной поверхности жидкости в любой точке и в любой момент времени. Предусмотрена возможность варьирования числа слагаемых в аппроксимирующих выражениях свободной поверхности в зависимости от конкретной задачи. Предложенная модель применена к задаче о всплесках и колебаниях жидкости в случае мгновенного ускорения бака по горизонтали из состояния покоя. Исследована зависимость формы свободной поверхности от ускорения бака и проанализирован механизм образования волн.

1. Золотенко Г. Ф. Компьютерное моделирование на основе уравнений типа Гамильтона нелинейных колебаний жидкости в прямоугольном баке // Прикладна гідромеханіка. – 2002. – 4, N 1. – С. 18–33.
2. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – К.: Наук. думка, 1990. – 295 с.
3. Miles J.W. Nonlinear surface waves in closed basins // J.Fluid Mech. – 1976. – 75, part 3. – P. 419–448.
4. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
5. Abramson H. N., Chu W. H., Kana D. D. Some studies of non-linear lateral sloshing in rigid containers // Journ. of Appl. Mech., Trans. ASME. – 1966. – 33, N 4. – P. 66–74.
6. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
7. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ "КПИ", 1997. – 338 с.  
М.: ЦНТИ "Волна", 1976. – С. 260–264.
8. Луковский И. А., Золотенко Г. Ф. Численное моделирование колебаний жидкости в закрытом подвижном прямоугольном сосуде // Гидромеханіка. – 1998. – 72. – С. 72–87.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.