Автори розглядають у просторі $L^2(D),\, D = R\times[-1,1]$ транспортний оператор

$$Lf = -i\mu\frac{\partial f}{\partial x} + a(x)b_1(\mu)\int_{-1}^{1} b(\mu')f(x,\mu')d\mu'.$$

Щоб отримати вигляд розвязку рівняння $\dot{u} = iLu,\, u\big|_{t=0} = u(0)$ автори вводять деякий інтеграл (у вигляді відомого виразу резольвенти через півгрупу) і доводять прямо, що цей інтеграл є відповідною півгрупою. Щоб спростити обчислення, автори зводять оператор L до деякої моделі Фрідріхса, використовуючи перетворення Фур'є.

Ключові слова: *спектр ,транспортний оператор, модель Фрідріхса, півгрупа.*

Отримано 16.10.2010

УДК 519.21

В. К. Ясинский*, д-р фіз-мат. наук,
В. Ю. Береза*, канд. фіз.-мат. наук,
Е. В. Ясинский**, аналітик-програміст
*Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, м. Чернівці,
**Університет Атабаска, м. Едмонтон, Канада

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВТОРОГО МОМЕНТА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАРКОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ И ЕГО ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Для стохастической задачи Коши линейного уравнения в частных производных с непрерывным марковским процессом доказано существование решения в среднем квадратическом, получены достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратическом решения этой задачи.

Ключевые слова: *задача Коши, стохастические дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных, асимптотическая устойчивость, устойчивость в среднем квадратическом, марковский процесс.*

Введение. Доказательству существования и асимптотического поведения решений детерминированных уравнений в частных производных посвящено достаточное число монографий и статей, которые можно найти в монографиях [13], [15], [22].

Когда было введено понятие стохастического дифференциала и интеграла, как функции верхнего предела, замены переменных Ито для стохастического дифференциала, введения понятия стохастического дифференциального уравнения (СДУ) как интегрального уравнения с интегралом Ито и Скорохода известными учеными Гихманом И. И., Скороходом А. В., Хасьминским Р. З., Колмановским В. Б. и Царьковым Е. Ф. в монографиях [1], [7], [8], [17], [19], [20], стало возможным изучение асимтотического поведения сильного решения СДУ в частных производных [4]—[6], [9], [14] и др.

Дальнейшее изучение СДУ в ЧП шло по пути рассмотрения в этих уравнениях случайных параметров, которые представляли бы более точную математическую модель реальных сложных систем [7], [14], [20] и др.

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения сильного решения линейного СДУ в ЧП с учетом непрерывного марковского процесса.

1. Постановка задачи

На вероятностном базовом пространстве $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}, \mathbb{P}\right)$ [3] рассмотрим задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных (ЛСДУ в ЧП) [14]

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A\left(\xi(t)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\right] = Q\left(B\left(\xi(t)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) + \\ + \frac{\partial}{\partial t} Q\left(C\left(\xi(t)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \frac{dw(s)}{dt}\end{gathered} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Q\left(A\left(\xi(t)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\bigg|_{t=0} = [Qu]_0 . \tag{2}$$

Здесь

$$Q\left(A(\cdot), q, p\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\left(\xi(t)\right) q^k p^j ,\ Q\left(B(\cdot), q, p\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{kj}\left(\xi(t)\right) q^k p^j ,$$

$$Q\left(C(\cdot), q, p\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{kj}\left(\xi(t)\right) q^k p^j ,$$

где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ — матрицы размерности $n \times m$, содержащие соответствующие беровские функции, которые зависят от $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{Y}$ для произвольного $t \geq t_0, \omega \in \Omega$ — стохастически непрерывный феллеровский марковский процесс с непрерывными справа реализациями на компактном фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ [10], [12], [16].

Обозначим через $w(t) \equiv w(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, $T>0$ [3], а через $\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}$ обозначен «белый шум» (производная от $w(t,\omega)$ с вероятностью единица не существует [12], [16]).

Обозначим далее через $\mathcal{M}_T$ пространство функций

$$u(t,x,\omega):[0,T]\times\mathbb{R}^1\times\Omega\to\mathbb{R}^1,$$

измеримых по t и x с вероятностью единица относительно σ-алгебры борелевских множеств фазового пространства $\mathcal{B}\left([0,T],\mathbb{R}^1\right)$ и для которых существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left\{\left|u(t,x,\omega)\right|^2\right\}dx<\infty, \tag{3}$$

при любых $t\in[0,T], \mathbb{E}\{\cdot\}$ — знак математического ожидания.

Для дальнейших исследований введем с вероятностью единица нормы, свойства которых легко проверить:

$$\left\|u(t,x,\omega)\right\|_{L_2R}^2\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(t,x,\omega)\right|^2dx, \tag{4}$$

$$\left\|u(t,x,\omega)\right\|_T^2\equiv\int_0^T\left|u(t,x,\omega)\right|^2dt, \tag{5}$$

и

$$\mathbb{E}_u(t)\equiv\mathbb{E}\left\{\left\|u(t,x,\omega)\right\|_{L_2R}^2\right\}. \tag{6}$$

Далее под L_{2R}, L_T будем понимать пространства функций $u(t,x,\omega)$, имеющие соответствующие нормы (4), (5).

В пространстве $\mathcal{M}_T$ наконец введем норму согласно (6):

$$\left\|u(t,x,\omega)\right\|^2\equiv\int_0^T\mathbb{E}_u(t)dt=\int_0^T\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(t,x,\omega)\right|^2dx\right]^2dt. \tag{7}$$

Под решением задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1), (2) будем понимать функцию $u(t,x)\equiv u(t,x,\omega):[0,T]\times\mathbb{R}^1\times\Omega\to\mathbb{R}^1$, которая согласована с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ [3] и такую, что с вероятностью единица при каждом (t,x) удовлетворяет уравнению

$$
\begin{gathered}
Q\left(A\left(\xi(t)\right),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=[Qu]_0+\int_0^t Q\left(B\left(\xi(s)\right),\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(s,x)\,ds+ \\
+\int_0^t Q\left(C\left(\xi(s)\right),\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(s,x)\,dw(s)
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Отметим, что случайная функция $u(t,x)$ с вероятностью 1 непрерывна по $t\in[0,T]$ в силу конструкции $Q\left(\bullet,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и непрерывности по t интеграла Ито и интеграла Римана, как функций верхнего предела [3].

2. Существование решения стохастической задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1), (2)

Будем рассматривать задачу о существовании решения в среднем квадратическом стохастической задачи Коши (1), (2) в пространстве $\mathcal{M}_T^1\subset\mathcal{M}_T$, для элементов которого для произвольной матрицы $A(y),\, y\in\mathbb{Y}$, имеет место включение

$$
Q\left(A(y),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)\in\mathcal{M}_T
$$

Лемма 1. Преобразование Фурье по x для случайной функции $u(t,x)\equiv\ u(t,x,\omega)$, а именно:

$$
v(t,\sigma)\equiv v(t,\sigma,\omega)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\sigma x}u(t,x,\omega)\,dx,
$$

не выводит его из пространства $\mathcal{M}_T$ для произвольного конечного $0<T<\infty$ с вероятностью единица, а именно имеет место равенство

$$
\left\|v(t,\sigma)\right\|_{\mathcal{M}_T}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|u(t,x)\right\|_{\mathcal{M}_T}. \tag{9}
$$

Доказательство. Существование с вероятностью единица преобразования Фурье [2], [11] вытекает из принадлежности $u(t,x)$ пространству L_{2R} для произвольного $t\in[0,T]$, поскольку верно неравенство Чебишева П. Л.

$$
\mathbb{P}\left\{\omega:\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(t,x,\omega)\right|dx>N\right\}\le\frac{\mathbb{E}_u(t)}{N}\to 0 \text{ при } N\to\infty .
$$

Согласно теореме順Планшереля [11] имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|v(t,\sigma,\omega)\right|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|u(t,x,\omega)\right|^2 dx,$$

то есть $\left\|v(t,\sigma)\right\|_{L_2R} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|u(t,x)\right\|_{L_2R}$. Далее, взяв математическое ожидание и проинтегрировав по $t \in [0,T]$, получим (9), что и доказывает лемму.

Теорема 1. Пусть:

1) выполнены требования постановки задачи пункта 1 и условие Липшица на коэффициенты уравнения 1;
2) беровские функции $a_{kj}(y)$, $b_{kj}(y), c_{kj}(y)$, $k=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}$ для $\forall y \in \mathbb{Y}$ удовлетворяют глобальному условию ограниченности модулей
$$\left|a_{kj}(y)\right|^2 + \left|b_{kj}(y)\right|^2 + \left|c_{kj}(y)\right|^2 \le L;$$
3) $\mathbb{E}\left\{ \left\| [Qu]_0 \right\|^l_{\mathcal{M}_T} \right\} \le K, l > 1.$

Тогда существует с вероятностью единица непрерывное решение стохастической задачи Коши $u(t,x) \equiv u(t,x,\omega)$, причем существует второй момент $\mathbb{E}\left\{ \left\| u(t,x) \right\|^2 \right\} \le K_1$, а для случайной функции $v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega)$ (см.(9)) существует l-й момент ($l>1$), как решение задачи (10), (11).

Доказательство. Применив преобразование Фурье [2] по переменной $x \in \mathbb{R}^1$ к левой и правой части ЛСДУ в ЧП (1), (2), получим формальное линейное стохастическое дифференциальное уравнение, уже не содержащее частных производных по x для случайной функции $v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega)$:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left[Q\left(A(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \right] = Q\left(B(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) + \\ +Q\left(C(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \frac{dw(t)}{dt}.\end{gathered} \tag{10}$$

$$Q\left(A(\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \Big|_{t=0} = [Qv]_0. \tag{11}$$

Полученную задачу Коши для ЛСДУ (10), (11) следует понимать как стохастическое интегральное уравнение [3], [8]

$$\begin{gathered} v(t,\sigma) = v_0(t,\sigma) + \int_0^t Q\left(B(\xi(s)),\frac{d}{ds},i\sigma\right)v(s,\sigma)\,ds + \\ + \int_0^t Q\left(C(\xi(s)),\frac{d}{ds},i\sigma\right)v(s,\sigma)\,dw(s). \end{gathered} \tag{12}$$

с начальным условием (11).

В условиях теоремы 1 существует с вероятностью 1 сильное непрерывное решение $v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega)$ при $\sigma \neq 0$ ЛСДУ (10), (11) с $\mathbb{E}\left\{\left\|v(t,\sigma)\right\|_{L_2R}^{l}\right\} < \infty,\ l > 1$ [8], [20], а значит в силу леммы 1 существует с вероятностью единица сильное непрерывное решение $u(t,x) \equiv$ $\equiv u(t,x,\omega)$ ЛСДУ в ЧП (1), (2) с $\mathbb{E}\left\{\left\|u(t,\sigma)\right\|_{\mathcal{M}_T}^{2}\right\} < \infty.$

3. Асимптотическое поведение тривиального решения линейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных

3.1. Вначале обсудим асимптотику поведения ЛСДУ (12) тривиального решения $v(t,\sigma) \equiv 0$ при $\sigma \neq 0$ с начальными условиями (11). Заметим, что для поставленной задачи пункта 1 будем применять метод стохастической функции Ляпунова [1] для исследования асимптотической устойчивости в среднем квадратическом, l — устойчивости $(l > 1)$, экспоненциальной l — устойчивости, глобально экспоненциально l — устойчивости в целом [12].

Дадим соответствующее определение устойчивости тривиального решения $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$, СДУ (10), (11) с условиями на коэффициенты:

$$Q\left(B\left(y,\frac{d}{dt},i\sigma\right)\right)v(t,\sigma) \equiv 0 \text{ для } y \in \mathbb{Y}, \forall t \in [0;+\infty),$$

$$Q\left(C\left(y,\frac{d}{dt},i\sigma\right)\right)v(t,\sigma) \equiv 0 \text{ для } y \in \mathbb{Y}, \forall t \in [0;+\infty). \tag{13}$$

Определение 1. Тривиальной решение $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ задачи (10), (11) назовем:

- стохастически устойчивым, если для $\forall \varepsilon_1 > 0,\quad \forall \varepsilon_2 > 0$, существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $[Qu]_0 < \delta$ вытекает для $t_0 > 0$ и $y \in \mathbb{Y}$ неравенство:

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \sup_{t \geq 0} \left| Q\left(D(y), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \right| \geq \varepsilon_1 \right\} < \varepsilon_2, \tag{14}$$

где D имеет конструкцию $D(\xi(t)) \equiv \left\{ d_{kj}\left(\xi(t)\right)\right\}_{k,j=1}^{n,m}$, где $d_{kj}(\cdot)$ — беровские функции;

- асимптотически стохастически устойчивым, если выполнено условие (14) и существует такое $\delta_1 > 0$, что для $t_0 \leq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $[Qu]_0 < \delta$ имеет место

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \lim_{t \to 0} \left| Q\left(D(y), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \right| = 0 \right\} = 1. \tag{15}$$

Определение 2. Тривиальное решение $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ задачи (10), (11) назовем:

- l — устойчивым, если

$$\lim_{[Qv]_0 \to 0} \sup_{t \geq t_0 \geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left| Q\left(D(y), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \right|^l \right\} = 0; \tag{16}$$

- асимптотически l — устойчивым, если решение l — устойчиво и существует такое $\delta > 0$, что

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left\{ \left| Q\left(D(y), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \right|^l \right\} = 0 \tag{17}$$

$$\forall t_0 > 0, y \in \mathbb{Y} \text{ и } \left| [Qu]_{t_0} \right| < \delta$$

Определение 3. Тривиальной решение $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ задачи (10), (11) назовем:

- экспоненциально l-устойчивым, если существуют такие $\delta > 0$, $M > 0$ и $\gamma > 0$, что для произвольных $t \geq t_0 \geq 0, y \in \mathbb{Y}$ и $\left| [Qu]_{t_0} \right| < \delta$:

$$\mathbb{E}\left\{ \left| Q\left(D(y), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t,\sigma) \right|^l \right\} \leq M e^{-\gamma(t - t_0)} \left| [Qu]_{t_0} \right|^l; \tag{18}$$

- глобально экспоненциально l — устойчивым, если (18) выполняется для всех $t \ge t_0 \ge 0, y \in \mathbb{Y}$ и $\left|\left[Qu\right]_{t_0}\right| \in \mathbb{R}^1$.

Далее рассмотрим скалярную непрерывную функцию Ляпунова [1], [17], [12] по всем переменным:

$$\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times Y \to \mathbb{R}^1, \tag{19}$$

для которой выполнено глобальное условие Липшица:

$$\left|\mathbb{V}\left(t, v_1, y\right) - \mathbb{V}\left(t, v_2, y\right)\right| \le L\left|v_1 - v_2\right| \tag{20}$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^1$ и условие глобальной ограниченности $\forall y \in \mathbb{Y}$:

$$\sup_{t \ge 0}\left|\mathbb{V}\left(t, v_1, y\right) - \mathbb{V}\left(t, v_2, y\right)\right| = \alpha\left(y\right) < \infty. \tag{21}$$

Определение 4. Оператор $\left(\mathcal{L}\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right)$ назовем производной Ляпунова в силу СДУ (10), (11), если функция $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times Y \to \mathbb{R}^1$ непрерывна по s, v, y, ограничена на каждом множестве $\left[t_1, t_2\right] \times U_\delta\left(0\right) \times \mathbb{Y}$, $U_\delta\left(0\right) \equiv \left|v\left(0, \sigma\right)\right| < \delta; \sigma \ne 0$ и выполняется условие: для $\forall s \ge 0, y \in \mathbb{Y}$ і $v \in \mathbb{R}^1$ найдется такое $\Delta > 0$, что существует

$$\sup_{0 \le t \le \Delta} \frac{1}{t}\left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x + t, v\left(s + t, s\right)\right) - \mathbb{V}\left(s, v\left(s, \sigma\right)\right)\right\}\right| \le K < \infty$$

равномерно по аргументу v, а также существует предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t}\left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x + t, v\left(s + t, s\right), \xi\left(t\right)\right) - \mathbb{V}\left(s, v, y\right)\right\}\right| \equiv \mathcal{L}\mathbb{V}\left(s, v, y\right) < \infty. \tag{22}$$

Коротко для определения 4 введем обозначение $\mathbb{V} \in \mathcal{D}\left(\mathcal{L}\right)$. Если непрерывный функционал $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию Липшица по 2-ому аргументу v и условию равномерной ограниченности по первому аргументу t, то оператор $\mathcal{L}$ полностью определяется правой частью (10) и слабым инфинитезимальным оператором марковского процесса $\xi\left(t\right)$ [10], [12]

$$\mathcal{L}\mathbb{V} = \tilde{\mathcal{L}}_1\mathbb{V} + \tilde{\mathcal{L}}_2\mathbb{V},$$

где

$$\begin{gathered}\left(\tilde{\mathcal{L}}_2\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right) = \left(\nabla\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right)Q\left(B\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)\left(s, v, y\right)Q^2\left(C\left(y\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right).\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $\nabla\mathbb{V}$ — первая производная $\nabla_v;\nabla^2\mathbb{V}$ — вторая производная ∇_{v^2} [12, с. 546—549].

Определение 5. Оператор $\mathcal{L}\mathbb{V}(s,v,y)$ назовем производной Ляпунова на решениях СДУ (10), (11), а значит в силу леммы 1 и на решениях СДУ (1), (2), если функция Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}^1$ непрерывна по всем 3-м аргументам, ограничена на каждом множестве $[t_1,t_2]\times\mathbb{U}_r(0)\times\mathbb{Y}$ и выполняются условия определения 5, где

$$\mathbb{U}_r(0)\equiv\left\{v\in\mathbb{R}^1\middle|\ |v|<r\right\},r>0.$$

Обозначать этот факт будем, как уже было отмечено выше, $\mathbb{V}\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Определение 6. В условиях определения 5 верхней производной Ляпунова [17] назовем соотношение

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{0\le t\le\Delta}\frac{1}{t}\left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x+t,v(s+t,y),\xi(t)\right)-\mathbb{V}\left(s,v(s),y\right)\right\}\right|\equiv$$
$$\equiv\mathcal{L}\mathbb{V}(s,v,y)<\infty. \tag{24}$$

если для всех достаточно малых $\Delta>0$ в каждой окрестности $\mathbb{U}_r(0)\times\mathbb{Y}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta}\left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x+\Delta,v(s+\Delta),\xi(\Delta)\right)-\mathbb{V}(s,v,y)\right\}\right|<g_r(s,v,y), \tag{25}$$

где $g_r(s,v,y)$ является непрерывной функцией своих аргументов и ограничена по второму аргументу v в каждой окрестности $\mathbb{U}_r(0)$. Отметим, что при указанных ограничениях на функцию Ляпунова $\mathbb{V}$ выполняется неравенство Дынкина [10].

Лемма 2 [10]**.** Если непрерывная по всем аргументам функция Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$ удовлетворяет условиям (20), (21), то выполняется неравенство Дынкина

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(x+\tau_2(t),v\left(s+\tau_2(t)\right),v\left(s,v(s),\tau_2(t)\right)\right),\tau_2(t)\right\}\le\mathbb{V}(s,v,y)+$$
$$+\mathbb{E}\left\{\int_0^{\tau_2(t)}(\mathcal{L}\mathbb{V})\left(s+z,v\left(s+z,v(s),y\right),\xi(z)\right)dz\right\}. \tag{26}$$

Доказательство можно найти в [12, с. 550—553].

Исходя из потребованных выше жестких условий на функцию Ляпунова $\mathbb{V}$, можно установить [12] следующие вспомогательные неравенства на решение $v(t,\sigma,\omega)$ задачи Коши для СДУ (10), (11), а значит и на решение задачи Коши (1), (2).

Лемма 3 [12, с. 552—553].

Пусть выполнены локальные условия Липшица на коэффициенты уравнения (1), (2) для искомого решения $u(t,x,\omega)$, а значит и на коэффициенты уравнения (10), (11) для искомого решения $v(t,\sigma,\omega)$.

Тогда решение задачи (10), (11) ((1),(2)) допускает оценку для $\forall T \geq 0,\ \ s \geq 0,\ \ y \in \mathbb{Y}$ и $v_0 \in \mathbb{R}^1 \left(u_0 \in \mathbb{R}^1\right)$:

$$\sup_{0\le t\le T} \left|v\left(t+s,s,v_0,y\right)\right| = \left(\left\|v_0\right\| + \alpha KT\right)e^{KT}, \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\sup_{t_1,t_2\in[s,s+T]} \left|v\left(t_2,s,v_0,y\right) - v\left(t_1,s,v_0,y\right)\right| = \\ = K\left[\left(\left\|v_0\right\| + \alpha KT\right)e^{KT} + \alpha\right]\left|t_2 - t_1\right|,\end{gathered} \tag{28}$$

где в леммах 2 и 3 $v\left(t,s,v_0,y\right)$ обозначает решение задачи (10), (11) в момент времени $t \in [0,T]$, считая начальным момент s и в этот момент значение решения v_0 и значение марковского процесса $y \in \mathbb{Y}$.

Исходя из связи решения u (9) СДУ в ЧП (1), (2) и решения v СДУ (10), (11), для решения u задачи (1), (2) будут выполнены неравенства (27), (28) с точностью до коэффициента $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Теорема 2. Пусть

1) выполняются локальные условия Липшица на коэффициенты уравнения (10), (11);
2) выполняется условие ограниченности на коэффициенты, так называемого «подлинейного роста»;
3) существует функция Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$ с оценкой снизу и сверху:

$$c_1\left|v\right|^{l_1} \leq \mathbb{V}\left(s,v,y\right) \leq c_2\left|v\right|^{l_2} \tag{29}$$

для всех $c_1,c_2 > 0, l_2 > l_1 > 0$, всех $s \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{Y}, v \in \mathbb{R}^1$;

4) для функции Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$ в силу СДУ (10), (11) выполняется неравенство $\mathcal{L}\mathbb{V}\left(s,v,y\right) \leq -c_3\left|v\right|^{l}$ для всех $s \geq 0,\ y \in \mathbb{Y}, v \in \mathbb{R}^1$.

Тогда тривиальное решение $v(t,\sigma) \equiv 0$ задачи Коши для СДУ (10), (11) асимптотически $l-$устойчиво, а тривиальное решение $u(t,x) \equiv 0$ задачи (1), (2) для ЛСДУ с ЧП асимптотически устойчиво в $l.i.m$.

Доказательство. Заметим, что в силу линейности СДУ (10) выполняется условие тождественного равенства нулю коэффициентов этого уравнения при $v=0$. Поэтому в этой теореме и в ниже приведенных утверждениях будет исследоваться на устойчивость тривиальное решение $v\equiv 0$.

Поскольку $\mathbb{P}\left\{\omega : \lim_{\tau\to 0}\tau_2(t)=t\right\}=1$ для всех $t>0$, в (26) вместо $\tau_2(t)$ можно положить t. Значит вместе с неравенством Дынкина (26) и неравенством (27) для $t\ge\tau$ можно записать неравенство

$$c_1\mathbb{E}\left\{\left|v(s+t,s,v_0,y)\right|^{l_1}\right\}\le\mathbb{E}\left\{\left|\mathbb{V}\left(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(s)\right)\right|\right\}\le$$
$$\le c_2\mathbb{E}\left\{\left|v(s+\tau,s,v_0,y)\right|^{l_2}\right\}-c_3\int_\tau^t\mathbb{E}\left\{\left|v(s+z,s,v_0,y)\right|^{l_2}\right\}dz\le \qquad (30)$$
$$\le c_2\left|v_0\right|^{l_2}\exp\{l_2KT\}-c_3\int_\tau^t\mathbb{E}\left\{\left|v(s+z,s,v_0,y)\right|^{l_2}\right\}dz\,.$$

согласно определения 3.

Отсюда вытекает $l-$устойчивость тривиального решения $v(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ задачи (10), (11), для $l\le l_1$ и сходимость интеграла

$$\mathbb{E}\left\{\left|v(s+z,s,v_0,y)\right|^{l}\right\}dz<\infty. \qquad (31)$$

Таким образом, из сходимости интеграла (31) вытекает асимптотическая сходимость l-го момента тривиального решения задачи (10), (11) при $l>1$.

Далее согласно лемме 1 существует связь (9) между $v(t,s)$ и $u(t,x,\omega)$, а значит согласно теореме Планшереля [2], [11] при $l=2$ получим асимптотическую сходимость 2-го момента тривиального решения задачи Коши (1), (2) $\forall t_0, y\in\mathbb{Y}$ и $v\in U_\delta(0)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 с $l_2=l_1=l>1$.

Тогда тривиальное решение $v(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ задачи (10), (11), а также тривиальное решение $u(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ задачи Коши (1), (2) глобально экспоненциально устойчивы.

Доказательство. На решениях СДУ (10), (11) и переходной вероятности $\mathbb{P}(t,y,dz)$ марковского процесса $\xi(t)\in\mathbb{R}^1$ определим линейный оператор [10]

$$\left(T(t)\mathbb{V}\right)(s,v,y)\equiv\int_{\mathbb{Y}}\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t,v(s+t,v_0,y),z\right)\right\}\mathbb{P}(t,y,dz) \qquad (32)$$

со следующими свойствами [10], [12], если $\mathbb{V}$ непрерывен по всем переменным:

1) результат действия оператора $T(t)$ на $\mathbb{V}(t,v,\xi)$ является непрерывной функцией по всем аргументами, то есть $C(\tilde{\mathbb{Y}}) \to C(\tilde{\mathbb{Y}})$, где $\tilde{\mathbb{Y}} \equiv [0,\infty)\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{Y}$;
2) оператор $T(t), t\geq 0$ образует полугруппу
$$T(t_1+t_2)=T(t_1)T(t_2), \forall t_1,t_2\geq 0;$$
3) семья линейных операторов на фазовом пространстве $\tilde{\mathbb{Y}}$ определяет стохастически непрерывный марковский процесс с непрерывными справа реализациями.

Обозначив $z(t)\equiv(T(t)\mathbb{V})(s,v,y)$, перепишем неравенство Дынкина (26) в виде
$$z(t_2)\leq z(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}(\mathcal{L}\mathbb{V})\Big(s+t,v\big(s+t,v_0,y\big),\xi(t)\Big)dt \tag{33}$$

Если $\mathbb{V}$ удовлетворяет условия теоремы 2, то из неравенства (33) и очевидных соотношений
$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s,v,y)\leq -c_3\left|v(0)\right|^l\leq -\frac{c_3}{c_1}\mathbb{V}(s,v,y)$$
получим неравенство
$$z(t_2)-z(t_1)\leq -\frac{c_3}{c_1}\int_{t_1}^{t_2}z(t)dt\ .$$

Таким образом, учитывая выше доказанное неравенство, получим цепочку тривиальных неравенств
$$\mathbb{E}\left\{\left|v\big(s+z,s,v_0,y\big)\right|^l\right\}dz\leq\frac{1}{c_1}\mathbb{E}\Big\{\mathbb{V}\Big(s+t,v\big(s+t,v_0,y\big),\xi(t)\Big)\Big\}\leq$$
$$\leq\frac{1}{c_1}\mathbb{E}\Big\{\mathbb{V}\Big(s+\tau,v\big(s+\tau,v_0,y\big),\xi(t)\Big)\Big\}\exp\left\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\right\}\leq$$
$$\leq\frac{c_2}{c_1}\exp\left\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\right\}\exp\left\{l_2Kh\left|v_0\right|^l\right\}$$
для всех $v_0\in\mathbb{R}^1, s\geq 0, y\in\mathbb{Y}$ и $t\geq\tau$.

Очевидно, что согласно лемме 1, имеем при $l=2$ экспоненциальную устойчивость в $l.i.m$ тривиального решения задачи Коши СДУ в ЧП (1),(2).

Теорема 4. Пусть:

1) выполнены локальные условия Липшица на коэффициенты ЛСДУ в ЧП (1);
2) существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям 3, 4 теоремы 2.

Тогда:

1) нулевое решение $v(t,\cdot,\omega)\equiv 0$ ЛСДУ (10), (11) асимптотически стохастически устойчиво;
2) нулевое решение $u(t,\cdot,\omega)\equiv 0$ задачи Коши ЛСДУ с ЧП (1), (2) асимптотически стохастически устойчиво.

Доказательство.

Пусть τ_r — момент первого выхода решения $v(t,x,\omega)$ ЛСДУ (10) из сферы $U_r(0)$. Тогда для $\forall t\geq 0$ и $\forall r>0$ по формуле Дынкина Е.Б. [10] и определению функции Ляпунова очевидно выполняется неравенство

$$c_1\mathbb{E}\left\{\left|v\left(s+\tau_r(t),s,v_0,y\right)\right|^l\right\}dz\leq$$
$$\leq\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+\tau_r(t),v\left(s+\tau_r(t),s,v_0\right),\xi\left(\tau_r(t)\right)\right)\right\}\leq \tag{35}$$
$$\leq\mathbb{V}\left(s,v_0,y\right)\leq c_1\left|v_0\right|^l.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to 0}\tau_r(t)=t$, то существует

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t,v\left(s+t,v\left(s+t,s,v_0,\xi(t)\right)\right)\right)\right\}<\infty$$

для всех $t\geq 0$, $v_0\in\mathbb{R}^1, s\geq 0$ и $y\in\mathbb{Y}$

Пусть $\mathcal{F}_t$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все $\xi(s)$ для $s\in[0,t]$. Тогда $\mathbb{V}\left(s+t,v\left(s+t,s,v_0,y\right),\xi(t)\right)$ тоже $\mathcal{F}_t$-измерима, а марковское свойство для произвольного $z\in[0,t]$ дает выполнение основного равенства в определении марковского процесса

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t,v\left(s+t,s,v_0,y\right),\xi(t)\right)\right\}\Big|_{\mathcal{F}_z}=$$
$$=\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s_1+(t-z),v\left(s_1+(t-z),s,v_0,h\right),\xi(t-z)\right)\right\},$$

где правая часть должна быть вычислена при $s_1 = s + z$, $h = \xi(z)$, $v_1 = v(s+z, s, v_0, y)$.

Далее из неравенства (30) можно получить неравенство

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t, v\left(s+t, s, v_0, y\right), \xi(t)\right)\right\}\Big|_{\mathcal{F}_z} \leq \mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+z, v\left(s+z, s, v_0, h\right), \xi(t)\right)\right\}$$

А это по определению супермартингала [10] означает, что

$$\mathbb{V}\left(s+t, v\left(s+t, s, v_0, y\right), \xi(t)\right)$$

является неотрицательным супермартингалом для $t \geq 0$. Значит существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{V}\left(s+t, v\left(s+t, s, v_0, y\right), \xi(t)\right) = \eta(\omega) \geq 0$$

с вероятностью единица.

Далее из неравенств (29), (30) теоремы 2 можно получить неравенства

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t, v\left(s+t, s, v_0, y\right), \xi(t)\right)\right\} \leq$$

$$c_2\left|v_0\right|^l - c_3\int_0^t \mathbb{E}\left\{\left|v\left(s+s_1, s, v_0, y\right)\right|^l\right\}ds_1 \leq$$

$$\leq c_2\left|v_0\right|^l - \frac{c_3}{c_1}\int_0^t \mathbb{E}\left\{\left|\mathbb{V}\left(s+s_1, v\left(s+s_1, s, v_0, y\right), \xi(t_1)\right)\right|^l\right\}ds_1 .$$

А это означает, что

$$\mathbb{E}\left\{\eta(\omega)\right\} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+t, v\left(s+t, s, v_0, y\right), \xi(t)\right)\right\} \leq c_2\left|v_0\right|^l 1 \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{c_3}{c_1}t} = 0.$$

Отсюда сразу следует, что $\mathbb{P}\left\{\omega : \eta(\omega) = 0\right\} = 1$.

Для завершения доказательства следует учесть основное неравенство для супермартингалов [2], [12], которое дает неравенства для $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \sup_{t\geq T}\left|v\left(s+s_1, s, v_0, y\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\omega : \sup_{t\geq T}\frac{1}{T}\mathbb{V}\left(s+t, v\left(s+t, s, v_0, y\right), \xi(t)\right) \geq \varepsilon^l\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1\varepsilon^l}\mathbb{E}\left\{\mathbb{V}\left(s+T, v\left(s+T, s, v_0, y\right), \xi(T)\right)\right\} \leq \frac{c_2\left|\varphi\right|^l}{c_1\varepsilon^l}\exp\left\{-\frac{c_3}{c_1}T\right\}$$

для $\forall T > 0, \varepsilon > 0,\ v_0 \in \mathbb{R}^1, s > 0, y \in \mathbb{Y}, l > 1$.

Осталось рассмотреть предел при $T \to \infty$ и пункт 1) теоремы 4 доказан. Для доказательства пункта 2 следует учесть лемму 1.

4. Устойчивость ЛСДУ с ЧП с дискретными марковскими параметрами

4.1. Дискретный марковский параметр в ЛСДУ с ЧП (1), (2) может выступать в следующих структурных характеристиках.

Рассмотрим скалярный процесс $\xi(t) \in \mathbb{Y}$, который является однородной марковской цепью с конечным числом состояний $\mathbb{Y} \equiv \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, причем известны параметры q_{ij} с условиями

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij},$$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \xi(t + \Delta t) = y_i \middle| \xi(t) = y_i\right\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \tag{37}$$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \xi(\tau) = y_i, t \le \tau \le t + \Delta t \middle| \xi(t) = y_i\right\} = 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t). \tag{38}$$

Пусть эта марковская цепь $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ является параметром задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1),(2).

Допустим, что в момент $\tau > 0$ скачкообразной смены структуры фазовый вектор $u(\tau) \in \mathbb{R}^1$ однозначно определяется состоянием, в котором находилась динамическая система непосредственно перед сменой структуры, вызываемой переходом из состояния $\xi(\tau - 0) = y_i$ в состояние $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$. Это означает выполнимость равенства

$$u(\tau) = \varphi_{ij}\left(u(\tau - 0)\right), i \neq j, \tag{39}$$

где $\varphi_{ij}(u) \in \mathbb{R}^1$, причем $\varphi_{ij}(0) = 0$.

В зависимости от формулы (23) в случае цепи Маркова слабый инфинитезимальный оператор на решении ЛСДУ в ЧП имеет вид [10], [11]:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\mathbb{V}(s,v,y) = \frac{d\mathbb{V}(s,v,y)}{ds} + (\nabla\mathbb{V})(s,v,y)Q\left(B(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathbb{V}\right)(s,v,y)Q^2\left(C(y), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) + \\ \sum_{j \neq i}^{k}\left[\mathbb{V}\left(s, \varphi_{ij}(v), y_j\right) - \mathbb{V}\left(s, v, y_j\right)q_{ij}\right].\end{gathered} \tag{40}$$

В этом случае верны теоремы 2, 3 и 4 об устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУ (10), (11), а значит в силу леммы 1 и устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУ в ЧП (1), (2).

4.2. Пусть $\xi(t)\in\mathbb{Y}$ является чисто разрывным скалярным марковским процессом $\forall t\in[t_1,t_2]$ таким, что допускает разложение

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\xi(t+\Delta t)\in(\beta,\beta+\Delta\beta)\middle|\xi(t)=\alpha+\beta\right\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta t+o(\Delta t), \quad (41)$$

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\xi(\tau)\equiv\alpha,\tau\in(t,t+\Delta)\middle|\xi(t)=\alpha\right\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t). \quad (42)$$

Тогда слабый инфинитезимальный оператор примет вид [10], [11] на решениях ЛСДУ в ЧП (10), (11):

$$\mathcal{L}\mathbb{V}(s,v,\xi(s))=\frac{d\mathbb{V}(s,v,\xi(s))}{ds}+(\nabla\mathbb{V})(s,v,\xi(s))Q\left(B(y),\frac{d}{dt},i\sigma\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathbb{V})(s,v,y)Q^2\left(C(y),\frac{d}{dt},i\sigma\right)+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\mathbb{V}(s,v,\beta)-\mathbb{V}(s,v,\alpha)\right]p(t,\alpha,\beta)\,d\beta.$$

Заметим, что и в этом случае теоремы 2, 3 и 4 имеют место при условии устойчивости тривиального решения $v(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ ЛСДУ в ЧП (10), (11), а, следовательно, в силу леммы 1 имеют место те же теоремы и для тривиального решения $u(t,x,\omega)\equiv 0$ ЛСДУ в ЧП (1), (2).

Список использованной литературы:

1. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 333 с.
2. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М. : Наука, 1968. — 640 с.
3. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — М. : Физматлит, 2005. — 408 с.
4. Гихман И. И. О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа / И. И. Гихман // Укр. мат. журн. — 1980. — 32, № 3. — С. 367—377.
5. Гихман И. И. Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа / И. И. Гихман // Укр. мат. журн. — 1979. — 31, № 5. — С. 31—38.
6. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными / И. И. Гихман // Сб. науч. тр. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1981. — С. 25—59.
7. Гихман И. И. Управляемые случайные процессы / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1977. — 251 с.
8. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1982. — 612 с.
9. Дороговцев А. Я. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части / А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, А. Г. Кукуш // Укр. мат. журн. — 1985. — 37, № 1. — С. 13—20.
10. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. – М. : Физматгиз, 1956. — 859 с.

11. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 541 с.
12. Королюк В. С. Ймовірність, статистика і випадкові процеси / В. С. Королюк, Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский // Теорія та комп'ютерний практикум. Випадкові процеси. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — 798 с.
13. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1987. — 495 с.
14. Перун Г. М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г. М. Перун, В. К. Ясинський // Укр. мат. журн. — 1993. — 45, № 9. — С. 1259—1265.
15. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Высш. шк., 1978. — 603 с.
16. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Советское радио, 1977. — 488 с.
17. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 367 с.
18. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : 1962. — 463 с.
19. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
20. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинський. — Рига : Ориентир, 1992. — 301 с.
21. Царьков Е. Ф. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений / Е. Ф. Царьков // Теория вероятностей и ее применение. — 1976. — Вып. 4. — С. 871—875.
22. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 445 с.
23. Ясинская Л. И. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения / Л. И. Ясинская, В. К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1980. — 32, № 1. — С. 78—83.

The existence and uniqueness in mean square of solution of Stochastic differential equation in partial derivatives with continuous Markov Process is proved. The sufficient conditions of asymptotic stability in mean square are obtained.

Key words: *cauchy problem, stochastic differential equation, equation in partial derivatives, asymptotic stability, stability in mean square, Markov process.*

Отримано 16.10.2010