УДК 519.8

Ю. С. Проскурня, магистр,
Б. С. Гривко, магистр
Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТОРА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В статье рассмотрен нечетко-множественный подход формирования портфеля инвестора в условиях неопределенности, лишенный большинства недостатков классических вероятностных моделей.

Ключевые слова: *нечеткий инвестиционный портфель, множественный подход, модель управления доходностью, модель управления риском, модель оптимальной доходности.*

Введение. Основной задачей портфельного инвестирования является улучшение условий инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги, и возможны только при их комбинации.

Классическая постановка этой задачи принадлежит Гарри Марковитцу, когда в 1952 г. появилась его статья под названием «Выбор портфеля». Центральной проблемой в теории Марковитца является выбор портфеля с учетом двух важнейших факторов: доходности и риска портфеля. При этом риск приобретает количественную оценку. Ученый показал, как учет взаимных корреляционных зависимостей между доходностями акций позволяет проводить эффективную диверсификацию портфеля, что в свою очередь существенно снижает риск портфеля в сравнении с риском включенных в него акций. Таким образом, зародилась вероятностная теория формирования инвестиционного портфеля.

В процессе практического применения модели Марковитца выяснились ее недостатки:

1. Гипотеза о нормальности распределений доходности на практике не подтверждается.
2. Стационарность ценовых процессов также не всегда имеет место на практике.

Наконец, риск активов рассматривается как дисперсия (стандартное отклонение котировок ценных бумаг от их ожидаемого значения). То есть, как снижение доходности бумаг по отношению к ожидаемому значению, так и увеличение доходности по отношению к ожидаемому значению считаются совершенно одинаковыми. Хотя на самом деле для собственника бумаг эти события совсем не одинаковые.

Из-за слабых сторон теории Марковитца возникла необходимость разработки принципиально новой теории управления финансовыми системами, функционирующими в условиях существенной неопределенности. Большое содействие этой теории оказала теория нечетких множеств, заложенная около полувека назад в фундаментальных работах Лофти Заде.

Целью настоящей работы является исследование и анализ множественного подхода к управлению фондовым портфелем, основанного на применении теории нечетких множеств, а также разработка реализующих данный подход алгоритмов.

Постановка задачи. Рассмотрим фондовый портфель из N компонентов и его ожидаемое поведение на интервале времени $\left[0, T\right]$. Каждая из компонент портфеля $i = 1,...,N$ характеризуется своей финансовой доходностью r_i.

Держатель фондового портфеля — частный вкладчик, инвестиционная компания, взаимный фонд — управляет своими инвестициями, руководствуясь определенными соображениями. С одной стороны, инвестор старается максимизировать свою доходность. С другой стороны, он фиксирует предельно допустимый риск неэффективности своих инвестиций. Примем капитал инвестора равным 1. Задача оптимизации фондового портфеля заключается в нахождении вектора долевого ценового распределения бумаг в портфеле $x = \left\{x_i\right\}$, $i = \overline{1,N}$, максимизирующего доход инвестора при заданном уровне риска (очевидно, что $\sum\limits_{i-1}^{N} x_i = 1$, $x_i \geq 0$).

Применение множественного подхода. Основные принципы и идея метода. Риск портфеля — это не его волатильность, а возможность того, что ожидаемая доходность портфеля окажется ниже некоторой предустановленной плановой величины.

Корреляция активов в портфеле не рассматривается и не учитывается. Доходность каждого актива — это нечеткое число. Таким образом, мы сводим неопределенность двух источников информации (средняя доходность и волатильность актива) в один (расчетный коридор доходности или цены). Оптимизация портфеля в такой постановке может означать, в частном случае, требование максимизировать ожидаемую доходность портфеля в точке времени Т при фиксированном уровне риска портфеля.

Доходность ценной бумаги по завершении срока владения, ожидаемо, равна r и находится в расчетном диапазоне. Для i -ой ценной бумаги имеем:

- $\tilde{r}_i$ — наиболее ожидаемая доходность i-ой ценной бумаги;
- r_{i1} — нижняя граница доходности i-ой ценной бумаги;
- r_{i2} — верхняя граница доходности i-ой ценной бумаги;
- $r_i = \left(r_{i1}, \tilde{r}_i, r_{i2}\right)$ — доходность по i-ой ценной бумаге, нечеткое число с функцией принадлежности треугольного вида.

Тогда доходность по портфелю

$$r = \left(r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1};\ \ \tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i;\ \ r_{\max} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} \right), \tag{1}$$

где x_i — вес i -го актива в портфеле, причем

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1\,,\ \ 0 \le x_i \le 1\,, \tag{2}$$

Критическим уровнем доходности портфеля на момент T является число r^*.

Математическая модель оптимизации инвестиционного портфеля с применением аппарата нечетких множеств. В работах [1—2] была выведена основная математическая модель для случая, когда критерий эффективности определен четко уровнем r^*, тогда степень риска неэффективности портфеля равна

$$\beta = \int_0^{\alpha_1} \varphi(\alpha) d\alpha\,, \tag{3}$$

где

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{при } r^* < r_1 \\ \dfrac{\left(r^* - r_1\right)}{\left(r_2 - r_1\right)}, & \text{при } r_1 \le r^* \le r_2; \\ 1, & \text{при } r^* > r_2 \end{cases} \quad \alpha \in [0;1]\,. \tag{4}$$

Для случая, когда r — нечеткое число с ФП треугольного вида имеем:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{при } r^* < r_{\min} \\ R \cdot \left(1 + \dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \ln\left(1-\alpha_1\right)\right), & \text{при } r_{\min} \le r^* \le \tilde{r} \\ 1 - \left(1 - R\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \ln\left(1-\alpha_1\right)\right), & \text{при } \tilde{r} \le r^* < r_{\max} \\ 1, & \text{при } r^* \ge r_{\max} \end{cases}\,, \tag{5}$$

где
$$R=\begin{cases}\dfrac{r^*-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}}, & \text{при} \quad r^*<r_{\max}\\ 1, & \text{при} \quad r^*\ge r_{\max}\end{cases}, \tag{6}$$

$$\alpha_1=\begin{cases}0, & \text{при} \quad r^*<r_{\min}\\ \dfrac{r^*-r_{\min}}{\tilde r-r_{\min}}, & \text{при} \quad r_{\min}\le r^*<\tilde r\\ 1, & \text{при} \quad r^*=\tilde r\\ \dfrac{r_{\max}-r^*}{r_{\max}-\tilde r}, & \text{при} \quad \tilde r<r^*<r_{\max}\\ 0, & \text{при} \quad r^*\ge r_{\max}\end{cases}. \tag{7}$$

Степень риска β принимает значения от 0 до 1.

В нечетко-множественном методе под риском понимается ситуация, когда ожидаемая доходность портфеля ниже заданного критического уровня. Со снижением ожидаемой доходности возрастает риск того, что доход от портфельных инвестиций окажется меньше критического значения.

Модель управления доходностью портфеля. Для того чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит максимальную доходность при заданном уровне риска, требуется решить следующую задачу:
$$\{x_{opt}\}=\{x \mid r\to\max, \quad \beta=const\}, \tag{8}$$
где r и β определяются из формул (5)—(7), компоненты вектора x удовлетворяют (2).

Нетрудно заметить, что (7) можно записать в следующем виде:
$$\alpha_1=\begin{cases}0, & \text{при} \quad r^*<r_{\min}\\ \dfrac{r^*-r_{\min}}{\tilde r-r_{\min}}, & \text{при} \quad r_{\min}\le r^*\\ \dfrac{r_{\max}-r^*}{r_{\max}-\tilde r}, & \text{при} \quad \tilde r\le r^*<r_{\max}\\ 0, & \text{при} \quad r^*\ge r_{\max}\end{cases}. \tag{9}$$

Получаем следующую задачу оптимизации (10)—(12):
$$\tilde r=\sum_{i=1}^{N}x_i\tilde r_i\to\max, \tag{10}$$
$$\beta=const, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,N}. \tag{12}$$

При варьировании уровня риска β целесообразно рассмотреть следующие 3 случаи.

1. $\beta = 0$. Из (5) видно, что этот случай возможен когда $r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}$. Получаем следующую задачу линейного программирования (13)—(15):

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \ge r^*, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,N}. \tag{15}$$

Найденный в результате решения задачи (13)—(15) вектор $x = \{x_i\}$, $i = \overline{1,N}$, и есть искомая структура оптимального для данного уровня риска портфеля.

2. $\beta = 1$. Из (5) следует, что этот случай возможен когда $r^* \ge \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}$. Получаем следующую задачу линейного программирования (16)-(18):

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} \le r^*, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,N}. \tag{18}$$

Найденный в результате решения задачи (16)—(18) вектор $x = \{x_i\}$, $i = \overline{1,N}$, и есть искомая структура оптимального для данного уровня риска портфеля.

3. $0 < \beta < 1$. Из (5) видно, что этот случай возможен когда $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$, либо когда $\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}$.

А. Пусть $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$. Тогда используя (5)—(7) задача (10)—(12) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max , \tag{19}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \left[\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right] = \beta , \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* , \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i > r^* , \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 , \; x_i \ge 0 , \; i = \overline{1, N} . \tag{23}$$

Б. Пусть $\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}$. Тогда задача (10)—(12) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max , \tag{24}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \left[\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) - \left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \right) \cdot \ln \left(\frac{r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right] = \beta , \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} > r^* , \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \le r^* , \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 , \; x_i \ge 0 , \; i = \overline{1, N} . \tag{28}$$

Для решения задач (19)—(23) и (24)—(28) применялся квазиньютоновский метод минимизации функций. Пусть обе задачи ((19)—(23)

и (24)—(28)) разрешимы. Тогда структуре искомого оптимального портфеля будет отвечать вектор $x = \{x_i\}$, $i = \overline{1, N}$ — решение той из задач ((19)—(23), (24)—(28)), значение целевой функции которой будет больше.

Модель управления риском портфеля. Для того чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит минимальный уровень риска при заданной доходности, требуется решить следующую задачу:

$$\{x_{opt}\} = \{x \mid \ \beta \to \min, \ \ r = const\}, \tag{29}$$

где r и β определяются из формул (5)-(7), компоненты вектора x удовлетворяют (2).

Учитывая, что доходность портфеля имеет вид (1), получаем следующую задачу оптимизации (задача нелинейного программирования) (30)—(33):

$$f = \beta \to \min , \tag{30}$$

$$0 \le \beta \le 1, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i = \tilde{r} , \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 , \ x_i \ge 0 , \ i = \overline{1, N} . \tag{33}$$

Модель оптимальной доходности портфеля. Для того чтобы определить структуру оптимального портфеля, который обеспечит максимальную доходность при минимальном уровне риска, требуется решить следующую задачу:

$$\{x_{opt}\} = \left\{x \mid \ \frac{\tilde{r}_{\max} - \tilde{r}}{\tilde{r}_{\max} - \tilde{r}_{\min}} + \beta \to \min, 0 < \beta < 1\right\}, \tag{34}$$

где r и β определяются из формул (5)—(7), компоненты вектора x удовлетворяют (2).

Учитывая, что доходность портфеля имеет вид (1), получаем следующую задачу оптимизации (задача нелинейного программирования) (35)-(37):

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{N} x\left(\tilde{r}_{\max} - \tilde{r}_i\right)}{\tilde{r}_{\max} - \tilde{r}_{\min}} + \beta \to \min , \tag{35}$$

$$0 \le \beta \le 1, \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 , \ x_i \ge 0 , \ i = \overline{1, N} . \tag{37}$$

Экспериментальные исследования, анализ и сравнение результатов. Для сравнительного анализа исследуемого метода оптимизации фондового портфеля были использованы данные с сайта Google Finance по курсу акций компаний Google, Apple, Cisco, nVidia и IBM взятые за период с 24.12.2008 по 24.12.2009. Используя ННС ТСК, были получены следующие прогнозы доходности акций:

- доходность акций GOOG лежит в расчетном коридоре [-0.6582; 0.5276], «наиболее ожидаемое значение» доходности 0.0154%;
- доходность акций AAPL лежит в расчетном коридоре [-0.6734; 0.8100], «наиболее ожидаемое значение» доходности 0.0858%;
- доходность акций CSCO лежит в расчетном коридоре [-0.8857; 0.7796], «наиболее ожидаемое значение» доходности -0.0710%;
- доходность акций NVDA лежит в расчетном коридоре [-0.6005; 1.7600], «наиболее ожидаемое значение» доходности 1.0395%;
- доходность акций IBM лежит в расчетном коридоре [-0.8159; 0.7052], «наиболее ожидаемое значение» доходности 0.0661%.

Критическая доходность рассматриваемой нечетко-множественной модели была установлена в 0.05%.

1. Найденное решение модели управления доходностью портфеля:

Таблица 1

Оптимальный портфель для треугольной ФП, при критическом уровне 0.05%

GOOG	AAPL	CSCO	NVDA	IBM	Доходность, %			Риск
					Наиболее ожидаемая	Нижняя граница	Верхняя граница	
0.00000	0.00000	0.00000	0.98836	0.01164	1.02820	-0.60301	1.74770	0.06500
0.00000	0.00000	0.00000	0.94306	0.05694	0.98408	-0.61276	1.69990	0.07000
0.00000	0.00000	0.00000	0.90128	0.09872	0.94341	-0.62176	1.65590	0.07500
0.00000	0.00000	0.00000	0.86256	0.13744	0.90572	-0.63010	1.61500	0.08000
0.00000	0.00000	0.00000	0.82654	0.17346	0.87065	-0.63786	1.57700	0.08500
0.00000	0.00000	0.00000	0.79289	0.20711	0.83790	-0.64511	1.54150	0.09000
0.00000	0.00000	0.00000	0.76136	0.23864	0.80720	-0.65190	1.50830	0.09500
0.00000	0.00000	0.00000	0.73173	0.26827	0.77836	-0.65829	1.47700	0.10000
0.00000	0.00000	0.00000	0.70381	0.29619	0.75119	-0.66430	1.44760	0.10500
0.00000	0.00000	0.00000	0.67744	0.32256	0.72552	-0.66998	1.41980	0.11000
0.00000	0.00000	0.00000	0.65248	0.34752	0.70123	-0.67536	1.39340	0.11500
0.00000	0.00000	0.00000	0.62881	0.37119	0.67818	-0.68045	1.36850	0.12000
0.00000	0.00000	0.00000	0.60631	0.39369	0.65628	-0.68530	1.34470	0.12500
0.00000	0.00000	0.00000	0.58490	0.41510	0.63544	-0.68991	1.32210	0.13000
0.00000	0.00000	0.00000	0.56448	0.43552	0.61556	-0.69431	1.30060	0.13500
0.00000	0.00000	0.00000	0.54498	0.45502	0.59659	-0.69851	1.28000	0.14000
0.00000	0.00000	0.00000	0.52634	0.47366	0.57844	-0.70253	1.26040	0.14500
0.00000	0.00000	0.00000	0.50850	0.49150	0.56107	-0.70637	1.24160	0.15000
0.00000	0.00000	0.00000	0.49140	0.50860	0.54442	-0.71005	1.22350	0.15500
0.00000	0.00000	0.00000	0.47498	0.52502	0.52845	-0.71359	1.20620	0.16000
0.00000	0.00000	0.00000	0.45922	0.54078	0.51310	-0.71698	1.18960	0.16500

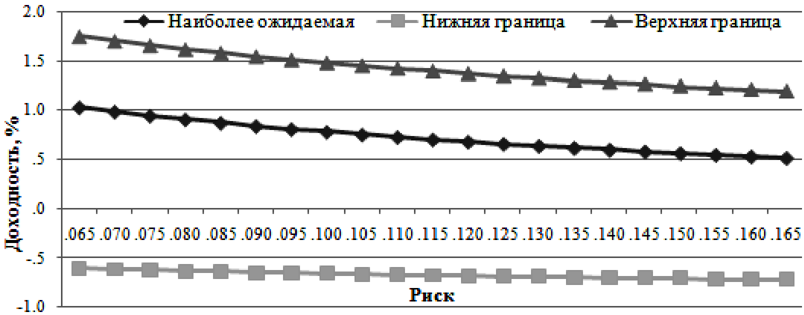

Рис. 1. *Зависимость ожидаемой доходности от степени риска портфеля, полученного нечётко-множественным методом с треугольной ФП*

2. Найденное решение модели управления риском портфеля:

Таблица 2

Оптимальный портфель для треугольной ФП, при критическом уровне 0.05%

GOOG	AAPL	CSCO	NVDA	IBM	Доходность, %			Риск
					Наиболее ожидаемая	Нижняя граница	Верхняя граница	
0	0.57	0	0.43	0	0.5	-0.64274	1.2226	0.1463

3. Найденное решение модели оптимальной доходности портфеля:

Таблица 3

Оптимальный портфель для треугольной ФП, при критическом уровне 0.05%

GOOG	AAPL	CSCO	NVDA	IBM	Доходность, %			Риск
					Наиболее ожидаемая	Нижняя граница	Верхняя граница	
0	0	0	1	0	1.0395	-0.60053	1.76	0.065032

Заметим, что в портфель вошла лишь одна ЦБ с пяти.

Выводы. В результате проведенного исследования была получена основанная на нечетко-множественном подходе математическая модель для нахождения структуры оптимального инвестиционного портфеля, лишенная большинства недостатков классических вероятностных моделей.

На основании теории нечетких множеств был разработан алгоритм оптимизации фондового портфеля и реализован в среде Matlab R2009a.

В процессе исследования нечетко-множественного метода определения оптимальной структуры фондового портфеля было выявлено следующее:

- высокая волатильность акций не значительно влияет на рост риска в нечетко-множественном подходе (в отличие от классических вероятностных моделей), так как риск в нем зависит только от ожидаемых значений доходности и заданного критериального значения;

- проведенные эксперименты в задаче нечеткой оптимизации портфеля, состоящего из ценных бумаг, показали, что зависимость «оптимальная доходность–риск» имеет как монотонно возрастающий характер, так и противоположный, монотонно убывающий характер;
- зависимость «оптимальная доходность–риск» будет иметь монотонно-убывающий характер при выполнении следующих условий:

  а) $\tilde{r}_1 < r^* < \tilde{r}_2$;

  б) $r_{11} < r_{21}$;

  в) $r^* > r_{\min} = (1-x)r_{11} + x_1 r_{21}$;

  г) $r^* < \tilde{r} = (1-x)\tilde{r}_1 + x_1\tilde{r}_2$;

  а монотонно-возрастающий характер — при невыполнении хотя бы одного из условий выше.

Список использованной литературы:

1. Зайченко Ю. П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Ю. П. Зайченко. — К. : Издательский дом «Слово», 2008. — С. 275—278.
2. Недосекин А. О. Применение теории нечетких множеств к задачам управления финансами / А. О. Недосекин // Аудит и финансовый анализ. — 2000. — № 2. — Режим доступа : http://www.cfin.ru/press/afa/2000-2/08-2.shtml.

In this article the fuzzy-plural approach to investor's portfolio construction was examined in the conditions of uncertainty, deprived of most lacks of classic probabilistic models.

Key words: *fuzzy portfolio, fuzzy-plural approach, yield management model, model of risk management, model for optimal yield.*

Отримано 17.10.2010