

УДК 532.5

ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ВИХРОУТВОРЕННЯ ТА ДИНАМІКИ ВИХОРИВ У КАНАЛАХ

В. О. ГОРБАНЬ, І. М. ГОРБАНЬ

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 19.03.2003

У рамках плоскої задачі для ідеальної нестисливої рідини проведено аналіз закономірностей руху вихорів у каналах різної конфігурації, зокрема, в каналі з різким розширенням і в області розгалуження каналів. Показано, що в ряді випадків у каналах існують точки, в яких вихор певної циркуляції знаходиться в рівновазі до течії, тобто є "стоячим". До характерних властивостей стійких стоячих вихорів належить наявність у них власних частот. Проведені розрахунки показують, що стоячі вихори вибірково реагують на періодичні збурення. Спостерігається резонанс при наблизненні частоти збурень до власної частоти стоячого вихора. Побудовано комбінований лагранжево-ейлеровий чисельний алгоритм для моделювання вихрових течій в'язкої рідини в каналах. Він використовує вихровий метод, щоб описати конвективний перенос завихреності, та кінцево-різницеву схему на адаптивних сітках для рівняння дифузії. Проведено розрахунки еволюції в'язкого вихора у каналі з плоскими стінками, а також вихрової структури течії за уступом в каналі і в області розгалуження каналів при помірних числах Рейнольдса. Показано принципову можливість використання інтерцепторів для оптимізації структури течії в зоні розгалуження каналів.

В рамках плоской задачи для идеальной несжимаемой жидкости проведен анализ закономерностей движения вихрей в каналах различной конфигурации, в частности, в канале с резким расширением и в области разветвления каналов. Показано, что в ряде случаев в канале существуют точки, в которых вихрь определенной циркуляции находится в равновесии, то есть является "стоячим". К характерным особенностям устойчивых стоячих вихрей относятся наличие у них собственных частот. Проведенные расчеты показывают, что стоячие вихри избирательно реагируют на периодические возмущения. Наблюдается резонанс при приближении частоты возмущения к собственной частоте стоячего вихря. Построен комбинированный лагранжево-эйлеровый численный алгоритм для моделирования вихревых течений вязкой жидкости в каналах. Он использует вихревой метод, чтобы описать конвективный перенос завихренности, и конечно-разностную схему на адаптивных сетках для уравнения диффузии. Выполнены расчеты эволюции вязкого вихря в канале с плоскими стенками, а также вихревой структуры течения за уступом в канале и в области разветвления каналов при умеренных числах Рейнольдса. Показана принципиальная возможность использования интерцепторов для оптимизации структуры течения в области разветвления каналов.

A motion of two-dimensional inviscid vortices in channels of various configurations is studied. In particular, channels with abrupt broadening and with a junction are considered. The conditions under which one vortex in such a channel is in equilibrium in respect to the flow are derived. The vortex in the equilibrium is characterized by the eigenfrequency due to that it responds selectively on periodic perturbations of the channel flow. A coupled Lagrangian-Eulerian numerical scheme for modeling vortical flows of viscous fluid in the channels is developed. The scheme uses the Lagrangian vortex method to simulate the convection of the vorticity and an Eulerian finite difference implementation on an adaptive mesh for the equation of diffusion. The scheme is applied to simulation of interactions of the viscous vortex with channel walls and to describing the flow pattern in the channels of complex configuration. The special technique for a flow control in the channel with a junction is analysed. It uses the interceptors mounted before the junction. The flow patterns and optimal parameters of the control elements are derived.

ВСТУП

Зменшення гідродинамічного опору каналів (чи гідравлічних втрат напору) є однією з складних проблем техніки. Її вирішення важливе для збільшення пропускної спроможності трубопроводів і каналів, зменшення енергетичних витрат, поліпшення інших експлуатаційних характеристик відповідних пристроїв. Більшість робіт, присвячених вивченню гідродинамічних полів у каналах, є експериментальними [1]. На сьогодні докладно описані процеси втрати стійкості ламінарної течії в каналі з плоскими стінками, розвиток турбулентних збурень та чутливість потоку до збурень різних масштабів. На основі отриманих результатів розвиваються підходи до управління потоками в каналах, зокрема, до розв'язання задачі зменшення гідравлічного опору.

Дослідження показують, що гідродинамічний опір пов'язаний з незворотніми втратами енергії внаслідок формування вихрових структур у потоках, їхньою нестійкістю та хаотичним рухом. У багатьох інженерних задачах формування складної вихрової структури течії та її турбулізація, як правило, пов'язані з нерівностями стінок каналу (уступами, виступами, заглибленнями і т.п.). Нерівності генерують циркуляційні відривні зони, еволюція яких призводить до утворення великомасштабних вихорів. Вивчення динаміки таких вихорів, процесів їх взаємодії між собою та стінками каналів, чутливості вихорів до зовнішніх збурень є предметом даного дослідження. Такий аналіз дозволяє, з одного боку, з'ясувати можливість підвищення ефективності вже відомих схем зниження опору, а з іншого, показує шляхи побудови нових схем управління потоками в каналах.

Загальні гідравлічні втрати течій в системах ка-

налів складаються з двох частин, перша з яких пов'язана з опором тертя на плоских ділянках каналу, а друга (так звані місцеві чи локальні втрати) – з вихроутворенням в околі локальних особливостей каналу, наприклад, в звуженнях, розширеннях, розгалуженнях каналів, на поворотах і т. п. Відповідні коефіцієнти локальних гідравлічних втрат, як правило, набагато перевищують коефіцієнти втрат на інших ділянках [2]. Питома вага в'язкої і локальної складової гідравлічних втрат істотно залежить від конкретної конструкції трубопроводу чи каналу. У випадку, коли переважають прямолинійні ділянки каналу, досягти зменшення гідродинамічних втрат можна зниженням шорсткості поверхні, зменшенням в'язкості рідини в пристінних областях (наприклад, шляхом інжекції мікробульбашок, полімерних домішок або рідини з низькою в'язкістю), трансформацією масштабів когерентних вихрових структур, що формуються в течіях при високих числах Рейнольдса (наприклад, шляхом установки спрямляючих ґраток, хонейкомбів, дією на потік магнітних, електричних та акустичних полів), а також зниженням рівня випадкових збурень у потоці. Локальні гідравлічні втрати можна істотно зменшити шляхом оптимізації геометричних співвідношень та форми каналу [3 – 5]. Інколи для управління течією використовуються і активні (тобто з додатковим підведенням енергії) адаптивні системи з відбором або інжекцією рідини, підведенням імпульсу або вібрацією елементів поверхні.

Для побудови нових схем управління потоками в каналах важливо визначити закономірності утворення та руху крупномасштабних вихорів. У практичних застосуваннях доцільними можуть бути як схеми з мінімальною неоднорідністю завихреності в потоці, так і схеми з генерацією одиночних або періодичних вихрових згустків. До останніх можна віднести потоки, що формуються в теплообмінниках, наприклад, МГД-установках для обробки та лиття алюмінієвих сплавів [6]. Джерелом завихреності в цьому випадку є масова електромагнітна сила. Крупновихрова структура потоку в металопроводі дозволяє ефективно організувати тепло-масообмінні процеси в рідкому розплаві. Інтенсифікація конвективних рухів рідини, зумовлена рухами крупних вихроутворень, може бути надзвичайно корисною у технологічних системах, які пов'язані з перемішуванням рідин, у теплообмінних пристроях та в хімічних технологіях.

Теоретичні моделі, що описують розвиток течій в каналах, переважно є двовимірними. Такий підхід, незважаючи на спрощеність, дозволяє дослідити

ти основні закономірності, які характеризують процеси утворення і подальшої еволюції циркуляційних зон, динаміки вихорів, виникнення автоколивань у потоках та ін. Розвиток моделей даного типу зумовлено широким спектром практичних застосувань одержаних результатів.

Найпростішою з моделей, які описують рух вихрових структур, є модель точкових вихорів в ідеальній нестисливій рідині [7 – 9]. Однак за допомогою цієї моделі можна з'ясувати лише певні загальні динамічні властивості вихорів у каналах, зокрема, розташування та тип критичних точок (стаціонарних вихорів), а при наявності еліптичних точок – розрахувати також власні частоти стоячих вихорів [7]. Складнішими є моделі формування вихрових пелен у гострих кутах границі, що ґрунтуються на застосуванні методу дискретних вихорів [10, 11]. Моделі такого типу добре описують процеси утворення відривних циркуляційних зон та їх пульсації, однак вони неспроможні послідовно змодельювати вплив в'язких ефектів. Найбільш повно ламінарні течії в каналах описують чисельні моделі, що будуються на безпосередньому використанні рівнянь Нав'є-Стокса [12, 13]. До їх переваг слід віднести можливість аналізу в'язкої взаємодії вихорів зі стінками каналів, яка призводить до формування вторинних вихорів. Для описання турбулентних потоків такі моделі повинні доповнюватись додатковими апроксимаціями для турбулентної в'язкості [10, 13, 14].

У даній роботі для вивчення течій в каналах різної конфігурації будуть використовуватись чисельні алгоритми, побудовані із застосуванням моделей названих вище типів.

1. ДИНАМІКА ТОЧКОВИХ ВИХОРІВ У КАНАЛАХ

Поведінка вихорів в обмеженій області визначається, головним чином, внутрішніми властивостями цих вихорів як динамічної системи [9]. Стійкість вихора, особливості його взаємодії з іншими вихорами і границями є характеристиками, які не залежать від типу течії (ламінарна чи турбулентна) або числа Рейнольдса. Вони визначаються інтенсивністю вихора, його розташуванням та формою границі. Це зумовило розвиток методів дослідження вихрової динаміки, які ґрунтуються на моделі ідеальної нестисливої рідини. Вони забезпечують розуміння загальних закономірностей руху вихорів в обмежених областях, що може бути використано для розробки алгоритмів управління [15 – 17].

У даному розділі будуть розглянуті особливості

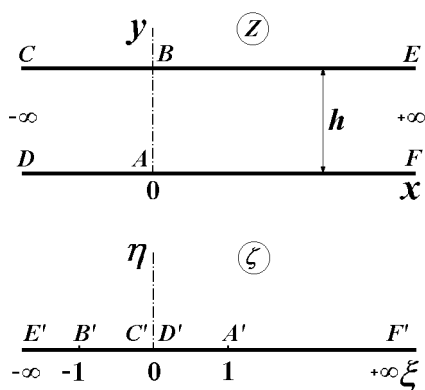


Рис. 1. Відповідність точок границі при конформному відображенні внутрішньої області каналу на півплощину

динамічної поведінки одиночних вихорів і вихрових пар у каналах різної конфігурації. Для дослідження побудовано чисельний алгоритм, що ґрунтується на спільному використанні моделі точкових вихорів і методів теорії конформних відображень.

1.1. Канал з плоскими стінками

Розглянемо спочатку рух одного точкового вихора в каналі з плоскими стінками. Комплексний потенціал течії $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ будується з використанням конформного відображення області течії в фізичній площині $z = x + iy$ на верхню півплощину в допоміжній комплексній площині $\zeta = \xi + i\eta$, яке реалізується функцією

$$\zeta = \exp(\pi z/h), \quad (1)$$

де h – ширина каналу. Відповідність точок границі при конформному відображенні показано на рис. 1.

Умови непротікання на стінках каналу задовільнюються за допомогою принципу дзеркальних відображень. Таким чином, маємо наступний вираз для комплексного потенціалу течії:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \zeta_v}{\zeta - \bar{\zeta}_v}. \quad (2)$$

Тут Γ – циркуляція вихора; $\zeta_v = \xi + i\eta$ – положення вихора в допоміжній площині ζ ; $\Phi_0(\zeta)$ – потенціал безвихрової течії.

Із виразу (2) з урахуванням поправки Рауса [11,

18] одержуємо рівняння динаміки вихора:

$$\begin{aligned} \frac{dx_v}{dt} - i \frac{dy_v}{dt} &= V_x^v - iV_y^v = \\ &= \left(\frac{d\Phi_0}{d\zeta} + \frac{\Gamma}{4\pi\eta_v} \right) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{\zeta=\zeta_v} + \frac{\Gamma}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_v}. \end{aligned} \quad (3)$$

У випадку, коли потенційна течія в каналі є прямолінійною зі швидкістю U_∞ , система рівнянь (3) має аналітичний розв'язок, який будується з використанням функції (1):

$$V_x^v = U_\infty + \frac{\Gamma}{4} \operatorname{ctg} \pi \frac{y_v}{h}, \quad V_y^v = 0. \quad (4)$$

Із розв'язку (4) випливає, що при відповідних співвідношеннях швидкості течії, циркуляції вихора і його положення в каналі (координати y_v) існують особливі точки, в яких вихор є нерухомим (стоячим), тобто виконується $V_x^v = 0$, $V_y^v = 0$. Наприклад, у разі відсутності прямолінійної течії такі вихори розташовуються на поздовжній осі каналу. Поява потенційної течії викликає зміщення лінії розташування стоячих вихорів до однієї зі стінок каналу, до якої саме – залежить від напрямку течії.

Аналіз якобіана динамічної системи (3) свідчить про нестійкість рухів стоячих вихорів в околі критичних точок. При наявності у потоці малих збурень, наприклад, при незначних відхиленнях вихора від стаціонарного положення по координаті y , він буде рухатись вздовж однієї зі стінок каналу. Напрямок руху залежить від того, до якої стінки вихор розташований ближче, а також від співвідношення швидкості потенційної течії U_∞ та циркуляції вихора Γ . Причому, з наближенням вихора до стінок каналу його швидкість зростає.

Розглянемо рух вихрової пари, яка складається з двох симетричних відносно поздовжньої осі каналу вихорів з протилежними циркуляціями. У випадку відсутності в каналі потенційної течії рух такої пари описується наступними співвідношеннями:

$$V_x^1 = -\frac{\Gamma}{2} \operatorname{ctg} 2\pi \frac{y_v}{h}, \quad V_y^1 = 0; \quad (5)$$

$$V_x^2 = \frac{\Gamma}{2} \operatorname{ctg} 2\pi \frac{h - y_v}{h}, \quad V_y^2 = 0.$$

Схематично профіль поздовжньої швидкості вихрової пари в каналі представлено на рис. 2. Можна бачити, що пара є нерухомою, якщо її вихори розташовані на відстані $h/4$ від стінок. Тобто у випадку рівноваги відстань між вихорами дорівнює $h/2$. Якщо вона є більшою, ніж $h/2$, визначальний вплив на рух вихорів мають стінки каналу. Така

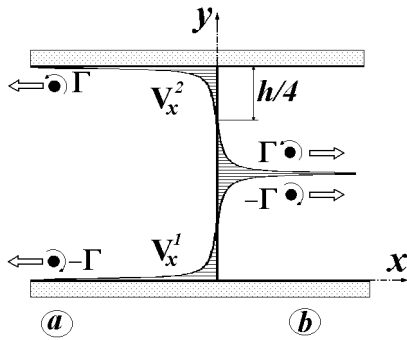


Рис. 2. Рух вихрової пари в каналі з плоскими стінками

система буде рухатись у від'ємному напрямку осі Ox (модель руху *a* на рис. 2). При наближенні вихорів один до одного їхній взаємний вплив посилюється, що викликає рух вихрової пари в додатному напрямку осі Ox (модель руху *b* на рис. 2). Як і в попередньому випадку з одним вихором, рівновага вихрової пари також є нестійкою. Аналогічні результати були отримані раніше іншим способом у роботі [18].

1.2. Розгалудження каналів

Дослідження потоків рідини в області розгалудження каналів (рис. 3) мають широке практичне застосування. Такі схеми використовуються в гідротехнічних спорудах, трубопроводах та в багатьох інших технічних пристроях. На динаміку вихорів у цій області суттєво впливає фактор границі. В даній роботі досліджується вплив стінок на рух симетричної вихрової пари протилежно направлених вихорів, що формуються по боках горизонтального каналу. Така течія формується, наприклад, в МГД-установках для лиття, де вихори утворюються внаслідок дії магнітного поля [6]. Области генерації завихреності розташовані в горизонтальному каналі приблизно симетрично відносно осі вертикального каналу. Для ефективної роботи установки необхідно забезпечити рух цих вихрових структур по вертикальному каналу вгору.

При розгляді динаміки вихрової пари в області розгалудження каналів вважається, що в початковий момент часу вихори розташовані симетрично відносно осі Oy (рис. 3). Для дослідження руху вихорів необхідно конформно відобразити область течії на півплощину. В даному випадку за допомогою інтеграла Крістофеля-Шварца можна одержати лише обернене відображення верхньої півплощини на фізичну область течії [19]:

$$z(\zeta) = \frac{2}{\pi} \left(h_\alpha \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda^2 - \zeta^2}} + h_\beta \operatorname{arctg} \frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda^2 - \zeta^2}} \right), \quad (6)$$

де $\lambda^2 = 1 + \frac{h_\beta^2}{h_\alpha^2}$; h_β і $2h_\alpha$ - ширини горизонтального і вертикального каналів відповідно.

Якщо потенційна течія в системі каналів відсутня, рівняння руху вихорів мають наступний вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt} - i \frac{dy_1}{dt} = \left[\frac{\Gamma_1}{4\pi\eta_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta_1 - \bar{\zeta}_2} \right) \right] \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z_1} + \frac{\Gamma_1}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{z_1}, \quad (7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} - i \frac{dy_2}{dt} = \left[\frac{\Gamma_2}{4\pi\eta_2} + \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2 - \bar{\zeta}_1} \right) \right] \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z_2} + \frac{\Gamma_2}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{z_2}. \quad (8)$$

Тут

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\pi}{2h_\alpha} \frac{1 - \zeta^2}{\sqrt{\lambda^2 - \zeta^2}},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{\pi^2}{4h_\alpha^2} \zeta \left(1 - \zeta^2 \right) \frac{1 + \zeta^2 - 2\lambda^2}{(\lambda^2 - \zeta^2)^2}.$$

Система нелінійних рівнянь (7-8) інтегрувалась чисельно з використанням методу Рунге-Кутта другого порядку. Зважаючи на те, що функцію $\zeta = \zeta(z)$ не вдається побудувати аналітично, необхідні значення ξ, η при відомих координатах x, y на кожному кроці по часу визначались з системи трансцендентних рівнянь, які випливають з виразу (6). Для її розв'язання використовувався метод Бройдена. За характерний лінійний параметр задачі було вибрано ширину вертикального каналу $2h_\alpha$.

На рис. 4 представлені траєкторії та напрямки руху двох вихорів з рівними за абсолютною величиною циркуляціями, які в початковий момент часу розташовані симетрично відносно осі вертикального каналу, тобто $x_1(0) = -x_2(0)$, $y_1(0) = y_2(0)$, $\Gamma_1 = -\Gamma_2$. Ширини каналів у випадку, що розглядається, є однаковими, тобто, $h_\alpha = 0.5$, $h_\beta = 1$. Напрямок обертання вихорів показаний на рис. 3. Зазначимо, що джерелом руху вихорів тут є взаємодія їх між собою та зі стінками каналів.

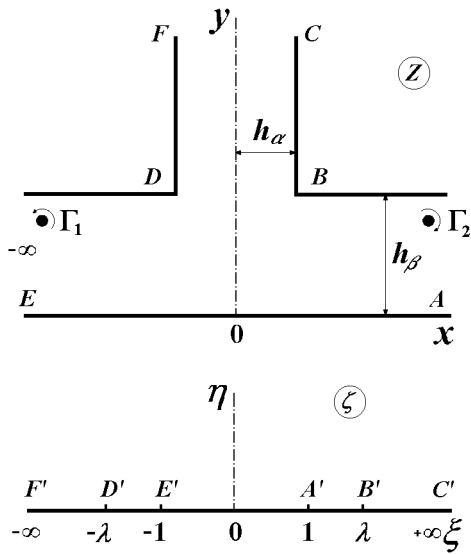


Рис. 3. Відповідність точок границі при конформному відображенні півплощини на внутрішню область розгалуження каналів

Різні криві на рис. 4 відповідають різним значенням початкової вертикальної координати вихорів.

Результати розрахунків свідчать про те, що при вибраному напрямку обертання вгору можуть рухатись ті вихори, які в початковий момент розташовані поблизу нижньої стінки горизонтального каналу або посередині вертикального каналу. Вихори, що попадають в область біля стінок вертикального каналу, рухаються вниз. Таким чином, якщо вихори генеруються у горизонтальному каналі, потрапити до вертикального каналу можуть лише ті з них, у яких початкові значення безрозмірної вертикальної координати не перевищують 0.2. Вихори, згенеровані вище, будуть рухатись лише в горизонтальному каналі. Проведений аналіз показав, що в області розгалуження каналів вихори є нестійкими. Зовнішні збурення помітно змінюють картину можливих траєкторій вихорів.

Зважаючи на те, що на практиці циркуляція вихорів може відрізнятись, досліджувався вплив незначних відхилень інтенсивності одного вихора на рух вихрової пари. Початкові положення вихорів вибирались в області, де в попередньому випадку вихори рухались вгору: $|x_1(0)| = |x_2(0)| = 1.5$, $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. Розрахунки показали суттєву залежність результатів від співвідношення циркуляцій. Якщо $|\Gamma_1|/|\Gamma_2| < 1.1$, обидва вихора входять до вертикального каналу і "притягуються" до однієї із стінок. Далі траєкторії

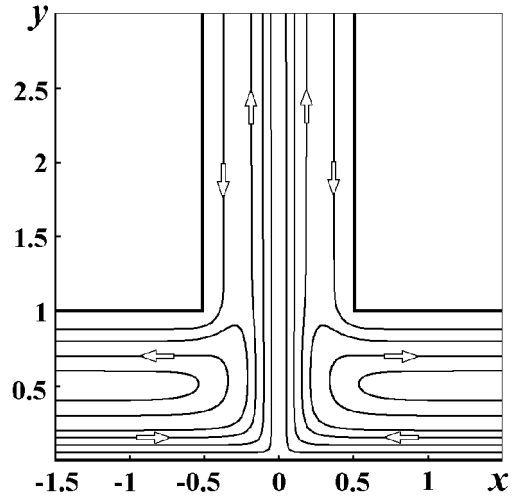


Рис. 4. Траєкторії вихорів в розгалуженні каналів, симетричний випадок: $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1$

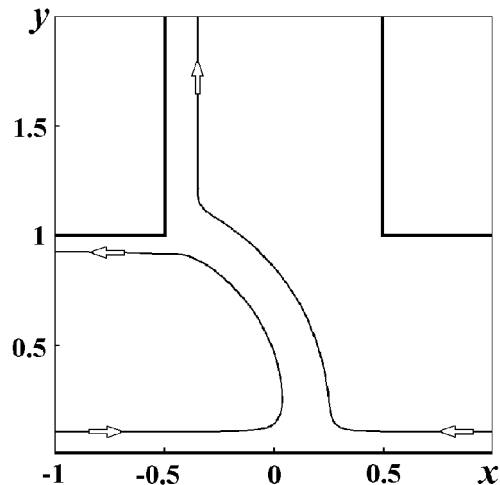


Рис. 5. Рух "несиметричних" вихорів у розгалуженні каналів: $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1.2$

вихорів розходяться: один з них рухається вгору, другий – вниз. При більшій несиметрії, коли $1.1 < |\Gamma_1|/|\Gamma_2| < 1.5$, в вертикальний канал попадає лише один вихор, а при $|\Gamma_1|/|\Gamma_2| > 1.5$ жоден з вихорів не попадає до вертикального каналу при вибраних початкових значеннях координат. На рис. 5 показано приклад траєкторій вихорів при $|\Gamma_1|/|\Gamma_2| = 1.2$.

Розглянуті особливості руху вихрової пари в зоні розгалуження каналів свідчать про те, що динаміка вихорів в обмеженій області істотно за-

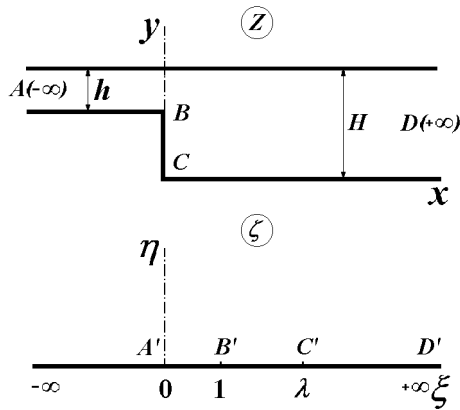


Рис. 6. Відповідність точок границі при конформному відображенні півплощини на внутрішню область каналу з різким розширенням

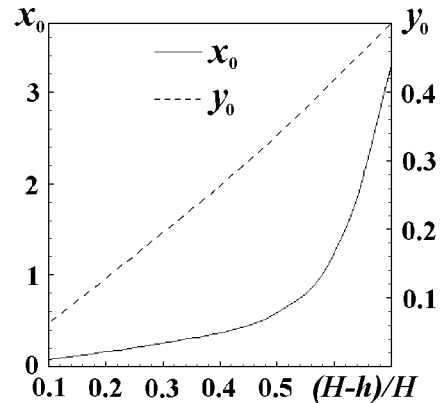


Рис. 7. Залежність координат x_v, y_v стоячого вихора за уступом в каналі від висоти уступа

лежить від розташування вихорів відносно стінок. Незважаючи на простоту, дана модель дає уявлення про фундаментальні закономірності руху вихорів в області зі складними границями.

1.3. Канал з різкою зміною ширини (розширенням або звуженням)

У практичних застосуваннях значний інтерес має аналіз структури потоку в області різкого розширення каналу [2, 4] (рис. 6). Течія в такій області характеризується інтенсивним вихроутворенням, що виникає поблизу стінок каналу внаслідок різкої зміни градієнту тиску. В даному розділі буде проаналізована динамічна поведінка вихорів, які утворюються в області за уступом. Вважаємо, що далеко перед розширенням потенційний потік є прямолінійним рівномірним. Відривну зону в першому наближенні будемо моделювати одним точковим вихором. Функція, яка реалізує конформне відображення півплощини на внутрішність каналу з уступом (рис. 6), має вигляд:

$$z = \frac{H}{\pi} \operatorname{arch} \frac{2\zeta - \lambda - 1}{\lambda - 1} - \frac{H}{\pi\sqrt{\lambda}} \operatorname{arch} \frac{(\lambda + 1)\zeta - 2\lambda}{(\lambda - 1)\zeta}, \quad (9)$$

$$\text{де } \lambda = \left(\frac{H}{h}\right)^2.$$

Із формули (9) випливає:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{2H}{\pi(\lambda - 1)} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{2H\sqrt{\lambda}}{\pi\zeta^2(\lambda - 1)\sqrt{\zeta^{2*} - 1}},$$

$$\zeta_* = \frac{2\zeta - \lambda - 1}{\lambda - 1}, \quad \zeta_{**} = \frac{(\lambda + 1)\zeta - 2\lambda}{(\lambda - 1)\zeta}.$$

Комплексний потенціал безвихрової течії $\Phi_0(\zeta)$ будується з урахуванням відповідності точок при конформному відображенні. Щоб одержати прямолінійний потік у фізичній області при $x \rightarrow -\infty$, в точці $\zeta = 0$ допоміжної області необхідно розташувати джерело інтенсивності $U_\infty h/\pi$. Таким чином, маємо наступне рівняння динаміки вихора в потоці:

$$\begin{aligned} \frac{dx_v}{dt} - i \frac{dy_v}{dt} &= V_x^v - iV_y^v = \\ &= \left(\frac{U_\infty \cdot h}{\pi\zeta} + \frac{\Gamma}{4\pi\eta_v} \right) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{\zeta=\zeta_v} + \\ &+ \frac{\Gamma}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_v}. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметри стаціонарного вихора Γ_0, x_0, y_0 знаходяться з рівнянь рівноваги вихора

$$V_x^v = 0, \quad V_y^v = 0 \quad (11)$$

та з умови Кутта-Жуковського в точці B (див. рис. 6)

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \Big|_B = 0. \quad (12)$$

У гострих кромках границі $d\zeta/dz = \infty$, тому виконується умова

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} \Big|_{B'} = 0.$$

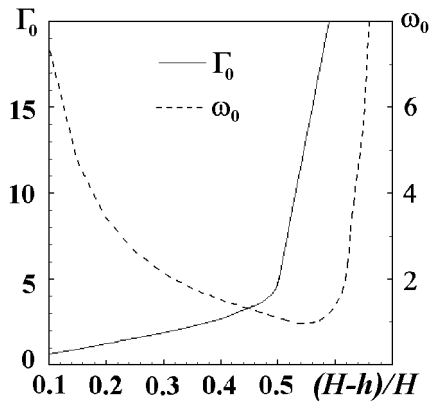


Рис. 8. Залежність циркуляції Γ_0 і власної частоти ω_0 стоячого вихора за уступом у каналі від висоти уступа

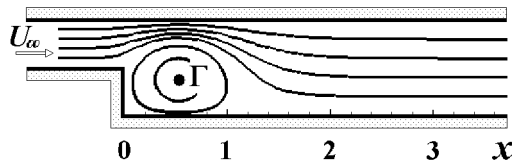


Рис. 9. Картина ліній течії за уступом у каналі з одним стоячим вихором

Система нелінійних трансцендентних рівнянь (11)–(12) роз'язувалась чисельно за допомогою алгоритма Бroyдена. За характерний лінійний параметр задачі вибиралась ширина каналу H (рис. 6). Залежність координат стоячого вихора x_0, y_0 від безрозмірної висоти уступа приведено на рис. 7. Картина течії зі стоячим вихором у каналі, що розширюється, показана на рис. 9.

Дослідження стійкості стоячого вихора зводиться до аналізу власних чисел матриці

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial V_x^v}{\partial x} & \frac{\partial V_x^v}{\partial y} \\ \frac{\partial V_y^v}{\partial x} & \frac{\partial V_y^v}{\partial y} \end{array} \right\}$$

в стаціонарній точці (x_0, y_0) . Проведений аналіз показав, що ці числа є комплексно-спряженими з додатною дійсною частиною у широкому діапазоні розмірів уступа, що розглядався. Таким чином, стаціонарні положення вихора в такому потоці є стійкими. Уявна частина власного числа характеризує обертальний рух вихора в малому околі стаціонарної точки. Природно було б назвати її власною частотою вихора [7]. Залежності

циркуляції Γ_0 і власної частоти ω_0 стоячого вихора від розміру уступа показані на рис. 8.

Власна частота вихора є такою ж його важливою характеристикою, як положення й інтенсивність. Вона характеризує поведінку вихора при наявності в потоці малих зовнішніх збурень. Нехай, наприклад, потенційна течія в каналі має малу періодичну складову:

$$U_\infty = U_\infty^* (1 + \varepsilon \sin \Omega t),$$

де ε, Ω – амплітуда і частота зовнішніх збурень відповідно, $\varepsilon \ll 1$; $U_\infty^* = \frac{d\Phi_0}{dz}$.

Розрахунки показують, що у збуреному потоці стоячий вихор буде відхилятися від свого стаціонарного положення. Величина відхилення характеризується функцією

$$R(t) = \sqrt{[x_v(t) - x_0]^2 + [y_v(t) - y_0]^2}.$$

Амплітуда відхилення визначається наступним чином:

$$R_{max} = \max\{R(t) \mid t = (0, \infty)\}.$$

Чисельний аналіз показав, що залежність максимального відхилення вихора від стаціонарної точки R_{max} від частоти збурень Ω має резонансний характер. При наближенні частоти вимушених коливань швидкості потоку Ω до власної частоти вихора ω_0 , амплітуда прецесії вихора, тобто максимальне відхилення R_{max} , різко зростає. Розраховані залежності $R_{max}(\Omega/\omega_0)$ для різних значень амплітуди збурень ε показані на рис. 10. Наявність нелінійного резонансу пояснює вибіркочку реакцію вихрових утворень на випадкові збурення в реальних потоках.

Експериментальні дослідження потоків за уступами в каналах виявили існування ще однієї циркуляційної зони поблизу верхньої стінки [20]. Тому аналіз вихрової динаміки, проведений вище, доповнювався пошуками в даній області пари стаціонарних вихорів. Рівняння руху вихорів мають вигляд:

$$\begin{aligned} V_x^k - iV_y^k &= \left(\frac{U_\infty \cdot h}{\pi \zeta_k} + \frac{\Gamma_k}{4\pi \eta_k} + \right. \\ &+ \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta_k - \zeta_j} - \frac{1}{\zeta_k - \bar{\zeta}_j} \right) \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{\zeta=\zeta_k} + \\ &+ \frac{\Gamma_k}{4\pi i} \left(\frac{d^2 \zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_k}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $k = 1, 2, j = 1, 2$.

Якщо інтенсивність другого вихора задати пропорційною до інтенсивності першого $\Gamma_2 = K\Gamma_1$,

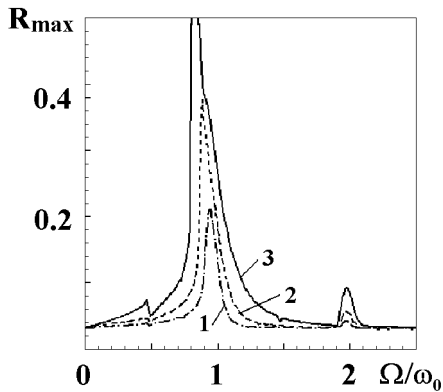


Рис. 10. Залежність максимального відхилення вихора від стаціонарної точки R_{max} в області розширення каналів від відносної частоти збурень Ω/ω_0 , $h = 0.5$, 1 – $\varepsilon = 0.01$, 2 – $\varepsilon = 0.02$, 3 – $\varepsilon = 0.04$.

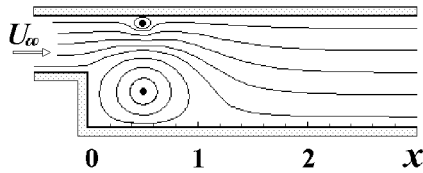


Рис. 11. Картина ліній течії за уступом в каналі з двома стоячими вихорами

$K = 0.01 \div 1$, то рівняння динаміки (13) та умова Кутта-Жуковського в гострій кромці (12) забезпечують необхідну кількість рівнянь для пошуку координат і циркуляцій пари стоячих вихорів. Розрахунки показують, що вона існує лише в певному діапазоні відношень інтенсивностей вихорів, при $K = 0.01 \div 0.3$. Другий вихор розташовується поблизу верхньої стінки каналу. Картину ліній течії в такій системі при $h = 0.5$ $K = 0.1$ представлено на рис. 11. Аналіз стійкості одержаних розв'язків показав, що вони є нестійкими, тобто малі збурення в потоці призводять до розпаду такої конфігурації.

Отримані результати можуть бути використані для визначення оптимального розташування пристроїв управління потоком (наприклад, циліндрів, що обертаються [13]), а також необхідного додаткового імпульсу для отримання відповідної циркуляції Γ_0 . З цієї нагоди слід звернути увагу на залежність $\Gamma_0(H - h/H)$ (див. рис. 8). При $(H - h/H) \approx 0,3 - 0,5$ циркуляція Γ_0 зростає повільно, а власні частоти вихорів малі (рис. 8). Саме в цьому діапазоні параметрів h, H застосування схем управління з утворенням стоячих вихорів може бути найбільш ефективним для досягнення

швидкого розширення потоку і зменшення довжини циркуляційної зони.

1.4. Канали складної форми. Дискретно-вихрові апроксимації границь

Для каналів складної форми побудувати відповідне конформне відображення вдається рідко. В таких випадках для аналізу динаміки вихорів можна застосувати комбінований метод, коли виконання умови непротікання рідини на частині границі забезпечується конформним відображенням фізичної області течії на півплощину, а на іншій частині границі моделюється вихровим шаром, для інтенсивності якого розв'язується сингулярне інтегральне рівняння. Розглянемо такий підхід детальніше на прикладі системи двох вихорів у каналі з двома інтерцепторами-перегородками. Перегородки будемо моделювати неперервними вихровими шарами. Зкориставшись потенціалом вихора в каналі (2), із умов непротікання на перегородках неважко отримати інтегральне рівняння для інтенсивності вихрового шару:

$$\int_L \gamma(\vec{r}) \cdot K(\vec{r}, \vec{R}) dl(\vec{r}) + V_{0n}(\vec{R}) = 0, \quad (14)$$

$$K(\vec{r}, \vec{R}) = v_x(\vec{r}, \vec{R})n_x(\vec{R}) + v_y(\vec{r}, \vec{R})n_y(\vec{R}).$$

Тут $\vec{v}(v_x, v_y)$ – швидкість, викликана в точці $\vec{R}(x, y)$ одиночним вихором, розташованим у точці $\vec{r}(x, y)$; $\vec{n}(n_x, n_y)$ – вектор нормалі до поверхні, яка обтікається (інтерцептора), взятий в точці \vec{R} ; $V_{0n}(\vec{R})$ – нормальна складова швидкості течії в точці \vec{R} ; L – частина границі (в даному випадку, перегородки), на якій необхідно виконати граничну умову (зазначимо, що це може бути не лише умова непротікання, а й, наприклад, умова фільтрації рідини через стінку, умова деформації стінки і т. п.). Оскільки функція K (ядро інтегрального рівняння) будується з врахуванням функцій (2), (3), то потенціал

$$\Phi_L = \int_L \gamma(\vec{r}) \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \zeta_v(\vec{r})}{\zeta - \bar{\zeta}_v(\vec{r})} dl(\vec{r}) \quad (15)$$

буде задовільняти граничним умовам як на стінках каналу, так і на перегородках.

Для розв'язання інтегрального сингулярного рівняння (14) використаємо метод дискретних вихорів, запропонований і обґрунтований в роботах [10, 21]. Наближено рівнянню (14) відповідає система лінійних алгебраїчних рівнянь для N дискретних вихорів, розташованих вздовж границі L :

$$\sum_{j=1}^N \Gamma_j v_{nj} + V_{0nk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

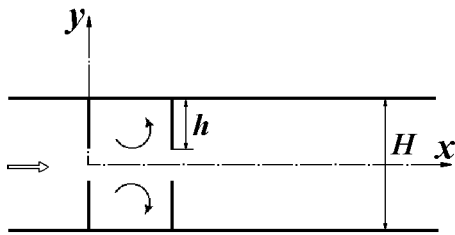


Рис. 12. Схема течії у каналі з перегородками при формуванні між ними двох стоячих вихорів

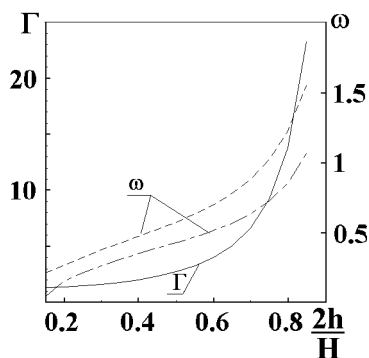


Рис. 13. Залежність циркуляції та власної частоти стоячих вихорів, які формуються між перегородками у каналі

Тут індекс k позначає номер контрольної точки, в якій виконується умова непротікання. У випадку рівномірного розташування дискретних вихорів контрольні точки розташовані посередині відрізків між вихорами. Для виконання умови Кутта-Жуковського на кінцях перегородок достатньо, щоб інтенсивність останнього розташованого на перегородці вихора дорівнювала нулю [10, 21].

В реальних течіях з високими числами Рейнольдса умова Кутта-Жуковського в гострих кромках виконується при формуванні відривних зон. Серед теоретичних моделей, що описують процеси утворення відривних зон, виділимо наступні:

1) завихреність, що накопичується у відривній зоні, наближено моделюється одним вихором (якщо відривна зона стаціонарна чи пульсуюча відносно певної стаціонарної конфігурації, то, відповідно, і вихор буде "стоячим" чи "збуреним" в околі стаціонарного положення) [4, 7];

2) з пластин перегородок у потік зходять вихорові пелени, що моделюються системами рухомих дискретних вихорів [10, 11, 21].

У рамках моделі стоячих вихорів [4, 7] задача зводиться до розв'язання системи лінійних рів-

нянь (14) і системи нелінійних трансцендентних рівнянь, що випливають із умов нерухомості "стоячих" вихорів і умов Кутта-Жуковського:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_{i1}(x_1, y_1, x_2, y_2), \\ \frac{dy_i}{dt} &= f_{i+2,2}(x_1, y_1, x_2, y_2). \end{aligned} \quad (16)$$

В результаті чисельного розв'язання цієї нелінійної задачі отримуємо циркуляції стоячих вихорів Γ_i та їх координати $x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}$. Поведінка стоячих вихорів в околі їхнього стаціонарного положення $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20})$ визначається власними числами матриці

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{11}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{11}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{12}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{12}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{21}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{21}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{22}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{22}}{\partial y_2} \end{Bmatrix}.$$

Якщо реальні частини власних чисел матриці дорівнюють нулю, маємо стаціонарні точки еліптичного типу (умовно стійкі). В околі таких точок вихори рухаються періодично. В загальному випадку для двох стоячих вихорів, розташованих між перегородками в каналі (рис. 12), маємо дві власні частоти, що характеризують симетричні та несиметричні збурені рухи вихорів.

Якщо ж вихори симетричні (тобто $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, $x_1 = x_2$, $y_2 = H - y_1$), маємо лише одну власну частоту вихрової пари. Зазначимо, що вихрової парі в осесиметричному випадку відповідає вихрове кільце, а динамічні властивості цих об'єктів аналогічні. З частотою ω вихори рухаються навколо стаціонарних положень, якщо їхні початкові збурення були симетричними.

$$\begin{aligned} x_1|_{t=0} &= x_{10} + \Delta x_1, \\ x_2|_{t=0} &= x_{20} + \Delta x_2, \\ y_1|_{t=0} &= y_{10} + \Delta y_1, \\ y_2|_{t=0} &= y_{10} + \Delta y_2, \\ \Delta x_1 &= \Delta x_2, \\ \Delta y_1 &= -\Delta y_2. \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 13 наведені результати розрахунків для циркуляції стоячих вихорів та їхніх власних частот у каналі з двома парами симетричних перегородок (див. рис. 12). На відміну від вихрової зони за однією перегородкою в каналі (коли немає власних частот, які характеризують крупномасштабні рухи всієї зони як єдиного цілого), у випад-

ку двох перегородок вихровій зоні між ними притаманні періодичні рухи. Наскільки вони будуть інтенсивними в реальних ситуаціях, залежить від багатьох факторів. Наприклад, вони будуть інтенсивнішими при наявності малих збурень набігаючого потоку з частотами, близькими до ω , а також при кореляції ω з іншими характерними частотами потоку, пов'язаними, зокрема, зі стисливістю рідини, установкою компенсаторів і т. п.

2. ВПЛИВ В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ НА ЕВОЛЮЦІЮ ВИХОРІВ У КАНАЛАХ

Експериментальні дослідження свідчать про істотну залежність вихрової структури течії в каналі від числа Рейнольдса [2]. Для описання в'язких ефектів необхідно інтегрувати систему рівнянь Нав'є-Стокса, яка для двовимірної області має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Тут u, v – компоненти швидкості рідини; p – тиск.

Останнім часом активно розвиваються вихрові методи, що ґрунтуються на аналізі процесів переносу завихреності $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ в області та її генерації на границях [22 – 25]. В даній роботі розвивається гібридний вихровий метод, що ґрунтується на комбінації лагранжевого та ейлерового (з сітковою схемою [12, 26]) підходів та дозволяє використати досвід побудови чисельних алгоритмів на основі дискретно-вихрових апроксимацій.

2.1. Чисельний алгоритм

Будемо використовувати наступну форму рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (20)$$

Задача дискретизується по часові з кроком Δt та по простору на ортогональній сітці з кроками Δx і Δy : $\omega_{jk}^n = \omega(x_j, y_k, t^n)$. На кожному кроці по часові проводиться розщеплення рівняння (20) на два, перше з яких описує поширення завихреності

шляхом конвекції, друге – шляхом в'язкої дифузії рідини:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (22)$$

Поскільки рівняння (21) співпадає з відповідним рівнянням для руху завихреності в ідеальній нестисливій рідині на цьому розрахунковому інтервалі, вихрові лінії рухаються разом з частинками рідини, а інтенсивність вихрових трубок не змінюється з часом. Поле швидкості $\vec{V}(u, v)$ визначається через поле завихреності (з попереднього часового кроку) за допомогою формули Біо-Савара [18]:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\vec{\omega}(\vec{r}', t) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'.$$

Ця формула в чисельному алгоритмі дискретизується наступним чином:

$$\vec{V}_{ik}(u_{ik}, v_{ik}) = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N \Gamma_{jl} \vec{V}_{ik,jl}^0 + \Gamma_{ik} \vec{d}_{ik}, \quad (23)$$

$$i = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N, \quad j, l \neq i, k.$$

Тут M, N – кількість кроків сітки по осях абсцис і ординат відповідно; $\Gamma_{jl} = \omega_{jl} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$; $V_{ik,jl}^0$ – швидкість, викликана в точці (x_{ik}, y_{ik}) вихором одиничної циркуляції, що розташований в точці (x_{jl}, y_{jl}) ; d_{ik} – самонаведена швидкість вихора, пов'язана з наявністю границь потоку (додаток Рауса). Для розрахунку швидкостей в області з складними границями використовуються конформне відображення фізичної області течії $z = x + iy$ на півплощину допоміжної площини $\zeta = \xi + i\eta$ та зеркальне відображення вихора відносно осі абсцис. Це дає можливість точно задовільнити умови непротікання на границях області. Комплексний потенціал течії в такому разі задається в параметричному вигляді:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N \Gamma_{jl} \ln \frac{\zeta - \zeta_{jl}}{\zeta - \{\bar{\zeta}_{jl}\}}, \quad (24)$$

$$\zeta = f(z),$$

де $\Phi_0(\zeta)$ – потенціал безвихрової течії в області; $\zeta = f(z)$ – функція, що реалізує необхідне відображення.

Таким чином, швидкість у вузлах сітки визначається за формулою:

$$\bar{V}_{ik} = \frac{\Gamma_{ik}}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_{ik}} + \left(\frac{d\Phi_0(\zeta)}{d\zeta} + \frac{\Gamma_{ik}}{4\pi\eta_{ik}} + \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_{jl}}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta_{ik} - \zeta_{jl}} - \frac{1}{\zeta_{ik} - \bar{\zeta}_{jl}} \right) \right) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{\zeta=\zeta_{ik}}$$

$$i = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N, \quad j, l \neq i, k. \quad (25)$$

Ці величини використовуються в розрахунках конвекції завихреності. Зазначимо, що в традиційних вихрових алгоритмах поширення завихреності моделюється переміщеннями системи дискретних вихорів, що на початку інтервалу Δt розташовувались у вузлах сітки [14, 23, 27] (схема "вихор-сітка"), або ж в точках, координати яких отримані внаслідок інтегрування системи рівнянь динаміки вихорів на інтервалі $(0, t)$ [10] (схема "вільних вихорів"). Такі підходи вимагають використання складних схем перерозподілу завихреності від отриманого положення вихора до вузлів сітки, та наближеним виконанням закону збереження завихреності. В даній роботі нові значення $\omega(x, y, t)$ у вузлах сітки розраховуються, виходячи з закону збереження завихреності для скінченного об'єму рідини:

$$\int_{\Delta Q} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} dQ = - \int_{\Delta S} \vec{\omega} (\vec{V} \vec{n}) dS. \quad (26)$$

Тут ΔQ – дискретний об'єм, на який ділить розрахункова сітка задану область течії; $\Delta S, \vec{n}$ – поверхня цього об'єму та зовнішня нормаль до неї відповідно. Звідси у випадку плоскої задачі для внутрішніх вузлів сітки маємо:

$$\begin{aligned} \omega_{il}^n \Delta x \Delta y &\approx \omega_{il}^* \Delta x \Delta y + \\ &+ \omega_{i-1,l}^* u_{i-1,l}^n \Delta y \Delta t + \omega_{i,l-1}^* v_{i,l-1}^n \Delta x \Delta t - \\ &- \omega_{i+1,l}^* u_{i+1,l}^n \Delta y \Delta t - \omega_{i,l+1}^* v_{i,l+1}^n \Delta x \Delta t - \\ &- \omega_{il}^* u_{il}^n \Delta y \Delta t - \omega_{il}^* v_{il}^n \Delta x \Delta t. \end{aligned} \quad (27)$$

Генерація завихреності біля границь області визначається із умови "прилипання" рідини:

$$V_\tau|_L = 0, \quad (28)$$

де V_τ – дотична швидкість; L – границя області.

Відомо, що при переході через вихровий шар має місце розрив дотичної швидкості, який дорівнює

$\gamma/2$, де γ – інтенсивність вихрового шару. Якщо течія омиває поверхню зверху, а V_τ^* – значення швидкості на стінці розраховане із формули (25), тоді маємо:

$$V_\tau = V_\tau^* + \frac{\gamma}{2} = 0 \quad (29)$$

або

$$\gamma = -2V_\tau^*. \quad (30)$$

Величина γ виражається через завихреність у граничних вузлах сітки, наприклад, для горизонтальної ділянки границі $y = \text{const}$:

$$\gamma_{ij}|_L = \omega_{ij}|_L \cdot \Delta y.$$

Тоді:

$$\omega_{ij}|_L = -\frac{2V_{\tau,ij}^*}{\Delta y}. \quad (31)$$

Для розрахунку поширення завихреності від стінок використовується рівняння дифузії (22). Таким чином описується процес генерації завихреності стінками, що не мають особливостей.

Для моделювання інерційного відриву, який відбувається в гострих кромках границі, використовується умова Кутта-Жуковського (аналогічно (12)). З неї визначається значення ω_{ij} в найближчій до гострої кромки внутрішній точці сітки. Досвід чисельного моделювання свідчить, що цю точку доцільно розташовувати в напрямку локальної швидкості потоку.

На вхідному контрольному перерізі каналу потік вважається незавихреним $\omega = 0$, а його швидкість дорівнює заданій $U_\infty = \text{const}$. Гранична умова в вихідному перерізі каналу має вигляд

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0.$$

Тут \vec{n} – нормаль до поверхні контрольного перерізу.

Вважається також, що в початковий момент часу $t = 0$ течія є безвихровою:

$$\omega|_{t=0} = 0.$$

Поширення завихреності в потоці (у внутрішніх точках області) визначається із рівняння дифузії (22). Можливі дві схеми розрахунків нових значень ω_{ij}^* через відомі значення завихреності на попередньому кроці ω_{ij}^n . У першому випадку ω^* знаходиться через "локальні" характеристики поля ω^n , наприклад, для схеми з центральними різницями маємо:

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^* &= \frac{\Delta t}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{ij}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{ij}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

У другому випадку використовується відома функція Гріна для рівняння (22) [28]:

$$\omega^*(\vec{r}) = \int_Q \omega^n(\vec{r}') \Gamma(\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}',$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{Re}{4\pi\delta t} \exp\left[-\frac{Re}{4\delta t} (\vec{r} - \vec{r}')^2\right]. \quad (33)$$

Математичні аспекти застосування цієї схеми та проблеми, пов'язані з врахуванням впливу границь на процеси дифузії, розглядалися у роботі [29]. Перша схема досить ефективна при малих та помірних числах Рейнольдса. Переваги другої зростають зі збільшенням числа Рейнольдса.

Таким чином, у запропонованому алгоритмі послідовність операцій на n -ому кроці по часу була такою:

1. По відомим з попереднього кроку значенням ω_{ij}^n у внутрішніх вузлах сітки розраховувались швидкості в граничних вузлах сітки.
2. Із умов прилипання рідини на стінках каналу визначались проміжні значення завихреності в граничних вузлах сітки.
3. Із умови Кутта-Жуковського визначалась генерація завихреності в околі куткових точок границі.
4. З використанням граничних умов розраховувались значення завихреності на вході в розрахункову область і на виході з неї.
5. Чисельним інтегруванням рівняння дифузії розшукувались проміжні значення завихреності ω_{ij}^* та циркуляції Γ_{ij} відповідних дискретних вихорів у внутрішніх точках області.
6. По отриманому полю завихреності за формулою Біо-Савара визначалось поле швидкості в області u_{ij}^* , v_{ij}^* .
7. На основі рівняння (27) розраховувався конвективний перенос завихреності і визначались нові значення ω_{ij}^{n+1} у вузлах сітки.

2.2. Результати чисельного моделювання

Для тестувань розробленої методики використовувався точний розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса, що описує дифузію вихора в безграничній в'язкій рідині [18]:

$$\omega(x, y, t) = \frac{Re}{4\pi t_0} \exp\left(-\frac{r^2 Re}{4t}\right), \quad (34)$$

$$Re = \frac{\Gamma}{\nu}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

де ν – в'язкість рідини.

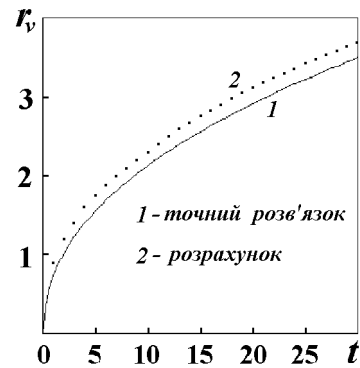


Рис. 14. Дифузія вихора в безграничній області. Порівняння результатів розрахунків для радіуса вихора з точним розв'язком, $Re = 100$

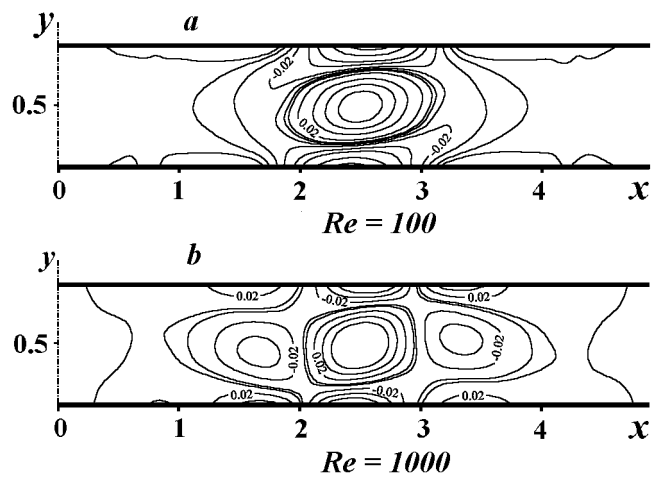


Рис. 15. Розподіл завихреності при дифузії вихора у каналі, $\tau = tH^2/\Gamma = 50$

На рис. 14 наведено порівняння радіуса вихора r_v , одержаного за формулою (34), та чисельно з використанням алгоритму, що пропонується. Ці результати одержано при $Re = 100$ на рівномірній сітці $\Delta x = \Delta y = 0,05$, $\Delta t = 0,001$. Величина r_v визначалась із співвідношення

$$\omega|_{r>r_v} < 10^5.$$

Порівняння кривих на рис. 14 свідчить про те, що чисельна в'язкість схеми не перевищує 7%. Надалі розрахунки виконувались на більш дрібних сітках по простору і часові.

Вплив границь каналу на дифузію вихора ілюструють результати, наведені на рис. 15. Вважалося, що при $t = 0$ у каналі з плоскими стінками існує вихор з циркуляцією $\Gamma = 1$ (значенням $\Gamma > 0$ відповідає обертання проти годинникової стрілки). Процес його затухання супроводжується генерацією системи вторинних вихорів, два з яких розташовуються по боках від основного ("первин-

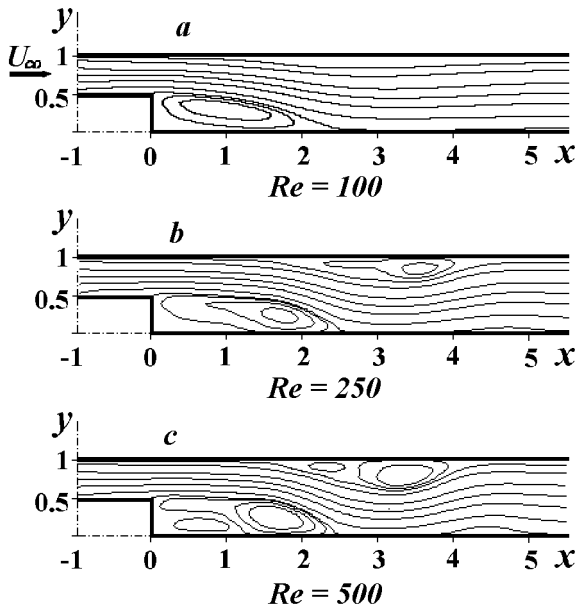


Рис. 16. Зміна картини ліній течії у каналі з уступом (різким розширенням) при збільшенні числа Рейнольдса, $\tau = 30$

ного”) вихора, а інші прилягають до стінок каналу. Зауважимо, що генерація вторинних вихорів є однією з головних особливостей ”в’язкої” взаємодії з ”твердими” границями [30].

При малих числах Рейнольдса вторинна завихреність концентрується поблизу стінок каналу. Зростання чисел Re приводить до того, що вторинні вихори піднімаються до середини каналу і розташовуються по боках від основного вихора. Певна несиметрія картини течії пов’язана з впливом напрямку обертання вихора.

Рис. 16 ілюструє картину течії в зоні різкого розширення каналу при різних числах Рейнольдса. Вважається, що рідина в каналі починає рухатись при $t = 0$. Далеко від уступу потік є прямолінійним рівномірним. Головними параметрами задачі є швидкість потоку U_∞ та ширина великого каналу H . Безрозмірний час вводиться як $\tau = tU_\infty/H$, $Re = U_\infty H/\nu$. Розрахункова область вибиралась достатньо великою $x \in [-3, 10]$, щоб виключити вплив її границі на розвиток циркуляційної течії за уступом. Розрахунки показують, що з часом у каналі перед уступом та далеко за уступом встановлюється параболічний профіль швидкості, що підтверджує правомірність чисельної методики.

Отримані результати корелюють з розрахунками інших авторів [10]. Збільшення числа вихорів структур при зростанні числа Рейнольдса пояснює механізм нестійкості такої течії: кожен з ви-

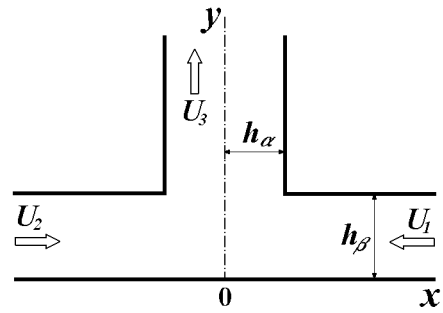


Рис. 17. Схема течії в розгалуженні каналів

хорів взаємодіє з іншими вихорами і з границями каналу; чим більше вихорів, тим ширший спектр частот, на які реагує така вихорова система.

Розроблена чисельна модель використовувалась також для розрахунку картини течії в розгалуженні каналів. В інженерній практиці, як правило, для розрахунку параметрів таких течій користуються емпіричними залежностями, зокрема, формулою Вейсбаха [2]. Чисельна модель дозволяє детальніше проаналізувати структуру течії, визначити розміри відривних зон, розрахувати поля швидкості і тиску при різних співвідношеннях геометричних параметрів каналів та швидкостей рідини в них. Схему течії, що розраховувалась, показано на рис. 17. Вхідними параметрами задачі є швидкості потоків (або витрата рідини) у каналах далеко від повороту U_1, U_2, U_3 , розміри каналів та в’язкість рідини (число Рейнольдса). В чисельній моделі за характерний лінійний розмір вибиралась ширина вертикального каналу $2h_\alpha$, за характерну швидкість бралась величина $|U_1|$, $Re = 2h_\alpha|U_1|/\nu$, $\tau = t|U_1|/2h_\alpha$.

Рис. 18 ілюструє картини течії і розподіл завихреності в розгалуженні при різних співвідношеннях швидкостей в каналах. Одержані результати показують особливості даної течії, а також дозволяють оцінити параметри як головних, так і вторинних вихорів зон. Хоча інтенсивність вторинних вихорів зон є незначною, вони помітно впливають на характеристики гідродинамічних полів. Це пояснюється, в першу чергу, тим, що утворення відривних зон можна розглядати як фактор, стимулюючий перехід до турбулентності. В експериментах дестабілізуючий вплив відриву спостерігається навіть при відносно невеликих числах Рейнольдса [1]. Тому зменшення розмірів відривних зон сприяє стабілізації течії.

В експериментах було помічено, що на структуру течії в каналах можна впливати, утворюючи штучно стійкі локальні відривні зони [3]. Такий спосіб управління потоком може бути засто-

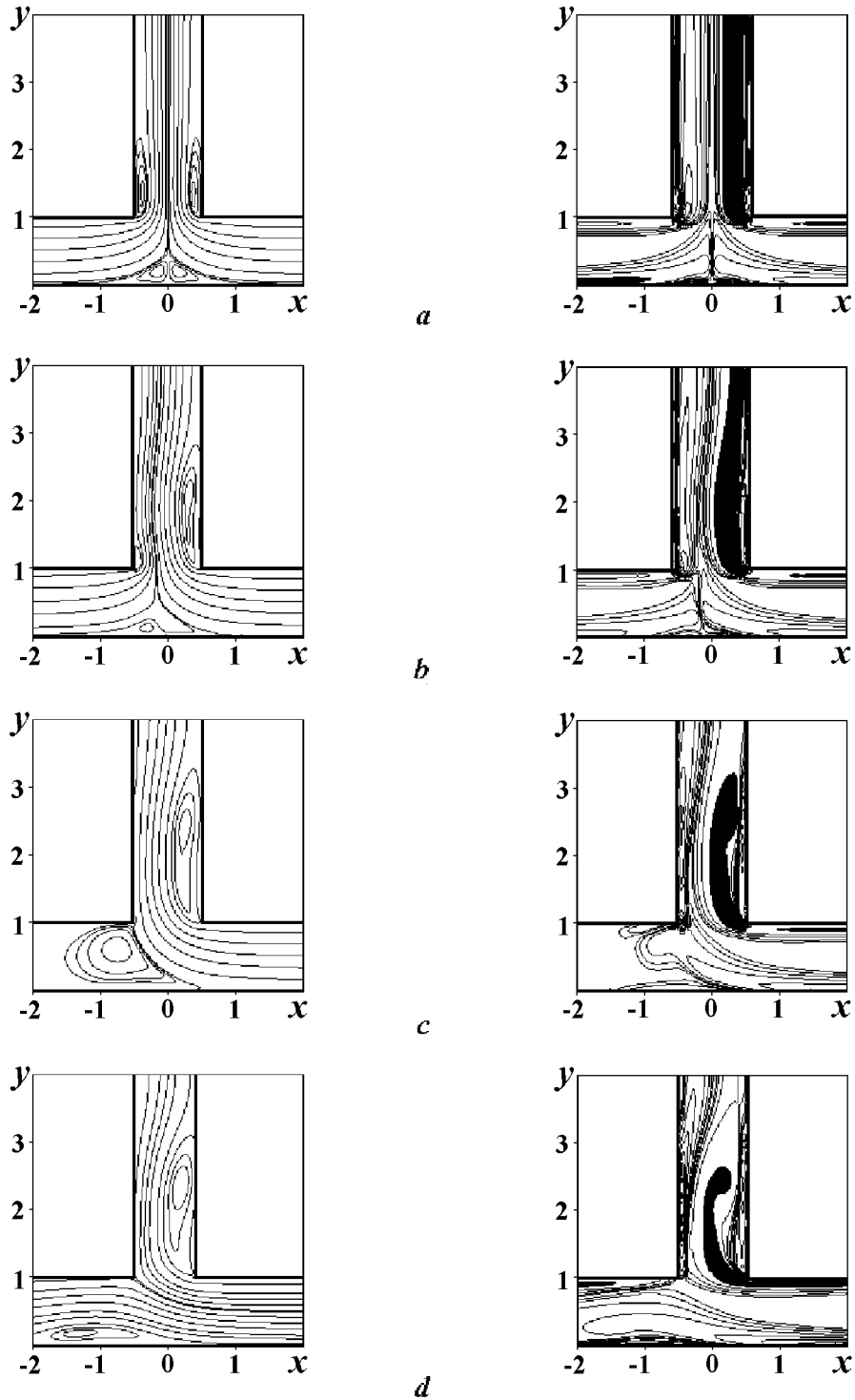


Рис. 18. Лінії течії і розподіл завихреності в розгалуженні каналів при $h_\beta = 1$, $Re = 500$, $\tau = 30$:
 $a - U_1 = -1, U_2 = 1$, $b - U_1 = -1, U_2 = 0.5$, $c - U_1 = -1, U_2 = 0$, $d - U_1 = -1, U_2 = -0.5$

сований, наприклад, для зменшення гідравлічних втрат трубопроводів. Для формування штучного відриву використовуються інтерцептори, уступи,

заглиблення і т. п. [4, 13].

На рис. 19 наведено результати чисельних розрахунків, які ілюструють даний підхід на прикладі

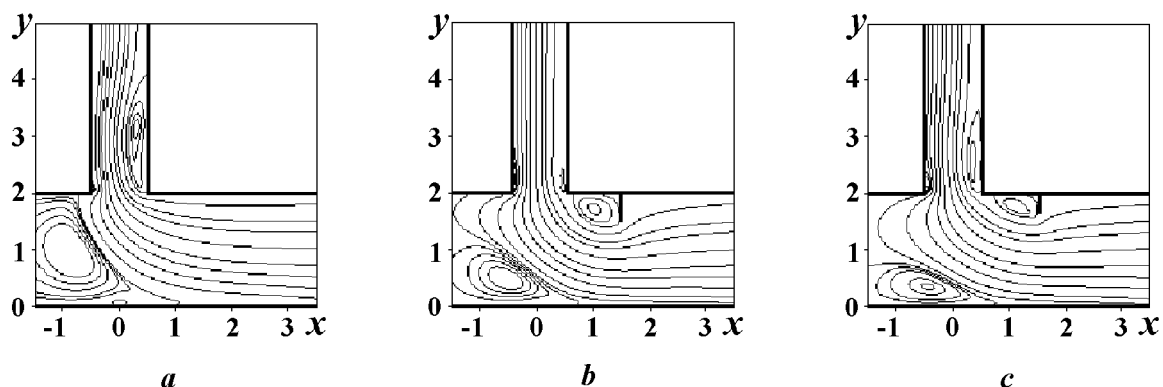


Рис. 19. Залежність картини течії в області розгалудження каналів від розташування та висоти інтерцептора: $h_\beta = 2$, $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $Re = 250$; *a* – інтерцептора немає; *b* – $h_{pl}/h_\beta = 0.25$; *c* – $h_{pl}/h_\beta = 0.15$

задачі про управління течією в розгалудженні каналів. На рис. 19, *a* показано структуру сталої течії в області розгалудження при $h_\beta = 2$, $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, $Re = 250$. Вона характеризується утворенням широкої відривної зони на вході в вертикальний канал і потужним вихором, що формується на повороті потоку. Картина течії істотно зміниться, якщо перед поворотом встановити інтерцептор. За ним утворюється стоячий вихор, який повністю або частково руйнує відривну зону, а також сприяє зменшенню інтенсивності вторинного вихроутворення в горизонтальному каналі. Вибір оптимальних параметрів управляючого елемента зумовлений двома факторами. З одного боку, висота пластини h_{pl} не може бути великою відносно ширини каналу, в якому вона встановлюється, бо це приводить до утворення істотних вторинних вихрових зон перед пластинною та на протилежній стороні каналу. З іншого боку, вихор, який створюється, повинен бути достатньо потужним, щоб впливати на структуру течії. Найбільш оптимальною є ситуація, коли нульова лінія течії, що обходить стоячий вихор, приєднується до стінки каналу поблизу гострої кромки (рис. 19, *b*). Рис. 19, *c* ілюструє випадок неоптимального управління, коли розміри пластини є недостатніми, щоб ефективно впливати на структуру течії. Таким чином, змінюючи висоту інтерцептора та його розташування, можна істотно зменшити розміри відривних зон у вертикальному каналі, а в оптимальному випадку і ліквідувати їх зовсім. Відповідним чином зменшується і коефіцієнт гідравлічних втрат.

ВИСНОВКИ

Побудовано універсальний комбінований чисельний алгоритм моделювання потоків в'язкої нестисливої рідини, апробація якого показала, що він може бути ефективно використаний для аналізу вихрової структури течії в плоских каналах різної конфігурації при помірних числах Рейнольдса.

Проведені дослідження довели, що вихрова структура течій в каналах має ряд особливостей. Зокрема, течії в каналах з нерівними стінками (з уступами, виступами і т. п.) мають певні характерні частоти, пов'язані з формуванням стаціонарних вихрових зон (стоячих вихорів) та їх збуреним рухом навколо стаціонарних положень. Такі частоти ω_0 грають роль резонансних: при наявності в потоці малих випадкових збурень з частотами, які є близькими до власних частот стоячих вихорів ω_0 , відбувається різке зростання збурених рухів вихорів (тобто, відривних зон як певних цілісних формувань). Це, в свою чергу, інтенсифікує процеси утворення дрібних вихрових структур на зовнішніх границях відривних зон. На відміну від течій біля нерівностей границі в напівообмеженому потоці, у випадку каналів стоячі вихори можуть мати не одну, а декілька власних частот.

Рух вихорів у каналах, зокрема, вихрових пар, характеризується наявністю точок біфуркації. В даній роботі це показано на прикладі вихорів у розгалудженні каналів. Незначна зміна початкових положень вихорів та їхніх циркуляцій може привести до різких змін подальшої еволюції вихрових структур.

Вплив в'язкості рідини зумовлює формування вторинних вихрових зон. На прикладі дифузії ви-

хора в каналі показано можливості формування цілої системи вихрових структур, розташованих як біля стінок каналу, так і в його центральній частині. Зростання числа Рейнольдса приводить до збільшення числа вихрових утворень. Це демонструють результати чисельного аналізу дифузії вихора в каналі і утворення відривних зон за уступом у каналі. Проведено аналіз процесів утворення вихрових структур різних масштабів для течії в каналі з уступом (різкою зміною ширини каналу) та для різних варіантів течій в області розгалуження каналів.

Дослідження показали принципову можливість застосування інтерцепторів для оптимізації структури течії в розгалуженні каналів.

Побудовані чисельні схеми та отримані результати розширюють можливості аналізу гідродинамічних полів у каналах, а також можуть бути корисними для розвитку систем управління потоками в каналах.

- Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В. Воздействие турбулентности в пристенных течениях. – Новосибирск: Наука, 1999. – 327 с.
- Чугаев Р. Р. Гидравлика. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.
- Идельчик И. Е. Некоторые интересные парадоксы в аэродинамике и гидравлике. – М.: Машиностроение, 1982. – 96 с.
- Чжен П. Управление отрывом потока. – М.: Мир, 1979. – 552 р.
- Бычков Ю. М. Визуализация тонких потоков несжимаемой жидкости. – Кишинев: Штиинца, 1980. – 130 с.
- Пужайло Л. П., Прохоренко Л. Н., Ермачков О. А. О "заростании" каналов индукционных печей и магнитогидродинамических установок // Магнитогидродинамические установки для плавки, обработки и заливки литейных сплавов. – К.: Институт проблем литья. – 1989. – Р. 70-78.
- Горбань В. О., Горбань І. М. Резонансні властивості вихорів за нерівностями границі // Доповіді НАН України. – 1996. – N 2. – С. 44-47.
- Горбань В. О., Горбань І. М. Дослідження динаміки вихрових структур в кутовій області та поблизу поверхні з заглибленням // Прикладна гідромеханіка. – 1999. – N 1. – С. 4-11.
- Aref H., Kadtko J.V., Zawadzki I. Point vortex dynamics: recent results and open problems // Fluid Dynamics Research. – 1988. – 3. – Р. 63-74.
- Белоцерковский С. М., Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – М.: Физ.-мат. литература, 1995. – 366 с.
- Салтанов Н. В., Горбань В. А. Вихревые структуры в жидкости. – К.: Наук. думка, 1993. – 242 с.
- Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
- Баранов П. А., Гувернюк С. В. и др. Управление обтекания тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование). – СПб: 2001. – с. 360.
- Najm H. N., Milne R. B., Devine K. D., Kempka S. N. A coupled Lagrangian-Eulerian scheme for reacting flow modeling // Third International Workshop on vortex flows and related numerical methods. – ESAIM: Proceedings. – 1999. V. 7. – P. 304-313.
- Cortelezzi L., Leonard A., Doyle J.C. An example of active circulation control of the unsteady separated flow past a semi-infinite plate // Journal of Fluid Mechanics. – 1994. – 260. – P. 127-154.
- Cortelezzi L. Nonlinear feedback control of the wake past a plate with a suction point on the downstream wall // Journal of Fluid Mechanics. – 1996. – 327. – P. 303-324.
- Горбань В. О., Горбань І. М. Теоретичний аналіз схем управління пристінною течією з використанням інтерцепторів // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – 2. – С. N 2. 17-25
- Saffman P. G. Vortex dynamics. – Cambridge: University Press, 1992. – 324 p.
- Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. – К.: Наук. думка, 1970. – 252 с.
- Eaton J.K., Johnston J.P. A review of research on subsonic turbulent flow reattachment // AIAA Journal. – 1981. – V.19. – P. 9. 1093-1100
- Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО Янус, 1995. – 520 с.
- Airiau C., Giovannini A. Vorticity evolution on a separated wavy wall flow // Third International Workshop on vortex flows and related numerical methods. – ESAIM: Proceedings. – 1999. V. 7. – P. 1-11.
- Cottet G. H., Ould Salihi M. L., ElHamraoui M. Multi - purpose regridding in vortex methods // Vortex Flows and Related Numerical Methods III. – ESAIM: Proceedings. – 1999. V. 7. – P. 94-103.
- Doligalski T. L., Walker J. D. A. The boundary layer induced by a convected two - dimensional vortex // J. Fluid Mechanics. – 1984. – N 139. – P. 1-28.
- Pellerin S., Giovannini A. Interaction vortex - boundary layer: numerical study of wall mechanisms // Third International Workshop on vortex flows and related numerical methods. – ESAIM: Proceedings. – 1999. V. 7. – P. 325-334.
- Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
- Kudela H. Viscous flow simulation of a two - dimensional channel flow with complex geometry using the grid - partial vortex method // Vortex Flows and Related Numerical Methods III. – ESAIM: Proceedings. – 1999. V. 7. – P. 215-224.
- Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
- Benfatto G., Pulvirenti M. Convergence of Chorin-Marsden Product formula in the half-plane // Commun. Math. Phys. – 106. – 1986. – P. 427-458.
- Корнев Н. В., Райчерт Г. Взаимодействие двумерных вихрей с твердой стенкой в вязкой жидкости // Механика жидкости и газа. – 1999. – N 2. – С. 56-63.