10. Morris H. DeGroot. Optimal statistical decisions / DeGroot Morris H. – McGraw-Hill Company, New York, 1970. — 490 p. / рус. перевод: Де Грот М. Оптимальные статистические решения / Де Грот М. — М. : Мир, 1974. — 496 с.
11. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях / Э. Й. Вилкас. — М. : Наука, 1990. — 254 с.

It is introduced and formalized the concept of the making decision system based on the V. I. Ivanenko's theory (see [1], [2]). The generality of the model imposed by the decision-making system is illustrated on the example of a decision with randomness, which is described as a stochastic distributions (probabilistic randomness), and the laws of mass phenomena («randomness in the broad sense», according to [1]).

Key words: *situation, the parametric situation, the scheme of the situation, the model of the situation, problem solutions.*

Отримано 02.10.2010

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРОБЛЕМА СТАБІЛІЗАЦІЇ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

У роботі розглянута проблема стабілізації імпульсної системи випадкової структури із постійним запізненням (СВСЗ) під впливом зовнішніх та внутрішніх марковських параметрів при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Ключові слова: *імпульсні динамічні системи, системи випадкової структури, постійне запізнення.*

Постановка задачі. Нехай [1], [2], [3] на ймовірнісному базисі $\left(\Omega, F, \{F_t, t \ge 0\}, \mathbb{P}\right)$ випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^m$ динамічної системи описується диференціальним рівнянням із постійним запізненням

$$dx(t) = a\left(t, \xi(t), x(t), x_t, u\right) dt, \tag{1}$$

із зовнішніми імпульсними марковськими збуреннями

$$\Delta\, x(t)\Big|_{t=t_k} = g\left(t_k -, \xi\left(t_k -\right), x\left(t_k -\right), \eta_k\right), \tag{2}$$

за початковими умовами

$$x_{t_0} = z_0 \in \mathbb{D};\ \ \xi\left(t_0\right) = y \in Y;\ \ \eta_{k_0} = h \in H, \tag{3}$$

де $t_k \in S \equiv \left\{ t_n \Uparrow,\ n \in \mathbb{N} \right\}$, асимтотика розв'язку $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^m$ — СВСЗ відносно нульового розв'язку $x(t) \equiv 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0$; $x_t \equiv \left\{ x(t-\tau) \right\}$, $\tau > 0$; $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^m\right)$ — простір Скорохода; $\xi(t)$ — феллерівський марковський процес, який спричиняє внутрішню випадкову зміну структури системи, $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — феллерівський ланцюг Маркова. Величина $u \equiv u(t, y, x_t, h) \in \mathbb{R}^r$ — r-вимірне керування.

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних функціонали $a: \mathbb{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{D} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}_+ \times Y \times \mathbb{R}^m \times H \to \mathbb{R}^m$, задовольняють умову Ліпшіца для $\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^m$, $\forall z^1, z^2 \in \mathbb{D}$ рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall t \geq t_0 \geq 0$; $\forall y \in \boldsymbol{Y}$; $\forall h \in \boldsymbol{H}$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^r$:

$$\begin{gathered} \left| a\left(t, y, x^1, z^1, u\right) - a\left(t, y, x^2, z^2, u\right) \right| + \\ \left| g\left(t, y, x^1, h\right) - g\left(t, y, x^2, h\right) \right| \leq \Lambda\left(\left| x^1 - x^2 \right| + \left| z^1 - z^2 \right| \right), \end{gathered} \tag{4}$$

і умову рівномірної обмеженості

$$\sup_{\substack{t \geq 0,\ y \in \boldsymbol{Y}, \\ h \in \boldsymbol{H}}} \left(\left| a\left(t, y, x, x_t, u\right) \right| + \left| g\left(t, y, x, h\right) \right| \right) = \gamma < +\infty,\ \gamma > 0. \tag{5}$$

Стабілізація імпульсних систем випадкової структури. Метод розв'язання задачі про оптимальну стабілізацію будуватиметься за двома основними обмеженнями:

1) синтез оптимального керування $u^0(t, x, y, h)$ будується за принципом повного зворотного зв'язку, тобто існує можливість повного й точного вимірювання фазового вектора $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ у будь-який момент часу $t \geq t_0$;
2) передбачається, що відомо структуру $\xi(t)$, в якій перебуває система (1) у даний момент часу $t \geq t_0$ і яка не залежить від ланцюга Маркова η_k ($k \geq k_0$ відповідає моменту $t_k \in S$).

Принципово новим моментом стало запропоноване І.Я. Кацем припущення про розриви фазових траєкторій динамічних систем у випадкові моменти часу [4], у результаті яких здійснюються внутрішні зміни структури системи.

Очевидно, одним із узагальнень у теорії оптимальної стабілізації є введення імпульсних перемикань для динамічних систем зі скінченною післядією з урахуванням марковських збурень, що й стало предметом нашого дослідження.

Доведемо основну теорему про оптимальну стабілізацію [2], [3].

Теорема. Нехай для імпульсної динамічної системи зі скінченною післядією (1)—(3) за умови стрибка [2], [3]:

$$\mathbb{P}\left\{x\left(t^*\right)\in(z,z+dz)\Big|x\left(t^*-0\right)=\varphi\right\}=p_{ij}\left(t^*,z\middle|\varphi\right)dz+o\left(dz\right),\qquad(6)$$

1) існує додатно-визначений функціонал $\mathsf{v}^0(t,y,\varphi,h)$ за $\varphi\in\mathbb{D}\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}^m\right)$, такий, що послідовність функціоналів

$$\mathsf{v}_k^0\left(y,\varphi,h\right)\equiv\mathsf{v}^0\left(t_k,y,\varphi,h\right)\qquad(7)$$

є функціоналами Ляпунова, і задана послідовність r-вимірних функцій-керувань

$$u_k^0\left(y,\varphi,h\right)\equiv u^0\left(t_k,y,\varphi,h\right),\qquad(8)$$

для $t_{k+1}>t_k\geq t_0$, $k=0,1,2,\dots,n,\dots$,

$$\lim_{n\to\infty}t_n=+\infty,\qquad(9)$$

$\forall\, y\in Y$, $h\in H$, причому $\left\{\mathsf{v}_k^0\right\}$, $\left\{u_k^0\right\}$ вимірні за всіма аргументами;

2) послідовність $\mathsf{v}_k^0(y,\varphi,h)$ в області

$$t=t_k\geq t_0\geq 0,\ \varphi\in\mathbb{D}\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}^m\right),\ y\in Y,\ h\in H,\qquad(10)$$

допускає нескінченно малу верхню та нескінченно велику нижню межі;

3) послідовність функціоналів

$$\mathsf{W}\left(t,y,\varphi,h,u_k^0\left(y,\varphi,h\right)\right)>0,\qquad(11)$$

за критерієм (16) [2] є додатно визначеною за $\varphi\in\mathbb{D}\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}^m\right)$ для $\forall\, t\in[t_k,t_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots,n,\dots$;

4) послідовність слабких інфінітезимальних операторів у силу системи (1) для $\forall\, t\in\left[t_k,t_{k+1}\right]$ $\left(\mathsf{Q}\mathsf{v}_k^0\right)\left(y,\varphi,h\right)\Big|_{u_k^0}$, обчислених при $u_k^0\equiv u_k^0\left(y,\varphi,h\right)$, задовольняє умову

$$\left(\mathsf{Q}\mathsf{v}_k^0\right)\left(y,\varphi,h\right)\Big|_{u_k^0}=-\mathsf{W}\left(t,y,\varphi,h,u_k^0\right);\qquad(12)$$

5) величина $\left(\mathsf{Q}\mathsf{v}_k^0\right)\left(y,\varphi,h\right)\Big|_u+\mathsf{W}\left(t,y,\varphi,h,u\right)$ досягає мінімуму при $u=u^0$, тобто

$$\begin{aligned}&\left(\mathsf{Q}\mathsf{v}_k^0\right)\left(y,\varphi,h\right)\Big|_{u^0}+\mathsf{W}\left(t,y,\varphi,h,u^0\right)=\\&=\min_{u\in\boldsymbol{R}^r}\left\{\left(\mathsf{Q}\mathsf{v}_k^0\right)\left(y,\varphi,h\right)\Big|_u+\mathsf{W}\left(t,y,\varphi,h,u\right)\right\}=0.\end{aligned}\qquad(13)$$

Тоді керування $u^0\left(t_k, y, \varphi, h\right)$, $k \ge 0$, здійснює стабілізацію розв'язку задачі Коші (1), (3) з імпульсним збуренням (2) до асимптотичної стійкості за ймовірністю, причому виконується рівність

$$\mathsf{v}^0\left(t_0, y^0, \varphi^0, \eta_{k_0}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathsf{E}\left\{\mathsf{W}\left(t, \xi(t), \left[x_t^0\right], \eta_k, u^0[t]\right) \Big| \xi(t_0) = y^0, x_{t_0} = \varphi^0, \eta_k = h\right\} dt = \quad (14)$$

$$= \min_{u \in \mathbb{R}^r} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathsf{E}\left\{\mathsf{W}\left(t, \xi(t), \left[x_t\right], \eta_k, u[t]\right) \Big| y^0, \varphi^0, h\right\} dt = \mathsf{I}_{u^0}\left(t_0, y^0, \varphi^0, h\right),$$

де $\mathsf{E}\left\{ \cdot \mid \cdot \right\}$ — операція умовного математичного сподівання.

Доведення.

I. Асимптотична стійкість за ймовірністю в цілому імпульсної динамічної системи (1)—(3) за умови стрибка (6) при $u \equiv u^0\left(t_k, y, \varphi, h\right)$, $k \ge 0$, відразу випливає з теореми 2 [1], тому що функціонали $\mathsf{v}^0\left(t, y, \varphi, h\right)$, $t_k \le t < t_0$, $k \ge 0$, задовольняють умови цієї теореми. Рівність (14), очевидно, також є наслідком теореми 4 [1].

II. Доведемо, що керування $u^0\left(t_k, y, \varphi, h\right)$, $t_k \le t < t_{k+1}$, $k \ge 0$, здійснюють стабілізацію розв'язку системи (1)—(3).

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує керування $u^*\left(t_k, y, \varphi, h\right) \ne u^0\left(t_k, y, \varphi, h\right)$, яке при підстановці в (11) реалізує такий розв'язок $x^*[t]$ за деякою початковою умовою (2), що

$$\mathsf{I}_{u^*}\left(t_0, y^0, \varphi^0, h\right) < \mathsf{I}_{u^0}\left(t_0, y^0, \varphi^0, h\right). \quad (15)$$

Надалі умова (13) дає нерівність

$$\left(\mathsf{Q}\mathsf{v}_k^0\right)\left(y, \varphi, h\right)\Big|_{u^*} \ge -\mathsf{W}\left(t, y, \varphi, h, u^*\left(t, y, \varphi, h\right)\right). \quad (16)$$

Усереднимо (16) за випадковою величиною $\{x^*[t], \xi(t)\}$, проінтегруємо за t від t_0 до $t = T$ і, врахувавши адитивність інтеграла, з урахуванням формули Динкіна [5], отримаємо

$$\mathsf{E}\left\{\mathsf{v}^0\left(T, [x_T^*], \xi(T), \eta_{k(T)}\right) \Big| y^0, \varphi^0, \xi_{k_0}\right\} - \mathsf{v}^0\left(t_0, y^0, \varphi^0, \xi_{k_0}\right) \ge$$

$$\ge -\int_{t_0}^{\infty} \mathsf{E}\left\{\mathsf{W}\left(t, \xi(t), \left[x_t^*\right], \eta_k, u^*[t]\right) \Big| y^0, \varphi^0, \xi_{k_0}\right\} dt \equiv \quad (17)$$

$$\equiv -\sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathsf{E}\left\{\mathsf{W}\left(t, \xi(t), \left[x_t^*\right], \eta_k, u^*[t]\right) \Big| y^0, \varphi^0, \xi_{k_0}\right\} dt.$$

З (15) випливає збіжність інтеграла в правій частині нерівності (17) при $T \to \infty$, а отже, й збіжність ряду в (17). Далі, зі збіжності інтеграла в правій частині (17) випливає, що підінтегральний вираз прямує до нуля, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left\{\mathsf{W}\left(t,\xi(t),\left[x_t^*\right],\eta_k,u^*[t]\right)\Big|y^0, \varphi^0, h\right\} = 0, \tag{18}$$

а, отже

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left\{\mathbf{v}^0\left(T,\xi(T),\left[x_T^*\right],\eta_{k(T)}\right)\right\} = 0. \tag{19}$$

Отже, нерівність (17) перетворюється (з $\mathsf{E}\{\mathsf{W}\} \underset{t\to\infty}{\to} 0$ (18) випливає $\mathsf{E}\{\mathbf{v}^0\} \underset{t\to\infty}{\to} 0$ (19)) у нерівність

$$\mathbf{v}^0\left(t_0, y^0, \varphi^0, \eta_{k_0}\right) \equiv \mathsf{I}_{u^0}\left(t_0, y^0, \varphi^0, \eta_{k_0}\right) \le \mathsf{I}_{u^*}\left(t_0, y^0, \varphi^0, \eta_{k_0}\right), \tag{20}$$

а отримана нерівність (20) суперечить припущенню (15).

Отже, протиріччя доводить оптимальність керування $u^0(t,y,x,h)$. Теорему доведено повністю.

Наслідок. Якщо $\xi(t)$ — марковський ланцюг, допускає розклад (6), отримаємо керування, котре повинне задовольнити оптимальний функціонал Ляпунова $\mathbf{v}_k^0(y,x,h)$ й оптимальне керування $u_k^0\left(y,x,h\right)$.

Із врахуванням формули (59) [2] і формули (4.10) [4, с. 54] перше рівняння для $\mathbf{v}_k^0$ одержимо, підставляючи $\mathbf{v}_k^0\left(y,x,h\right)$ й $u_k^0\left(y,x,h\right)$ у ліву частину (19) виразу для усередненого інфінітезимального оператора $\left(\mathsf{Q}\mathbf{v}_k^0\right)\Big|_{u^*}$. Тоді шукані рівняння в точках $\left(t_k, y_j, \varphi\right)$ будуть мати вигляд

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}_k^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_k^0}{\partial \varphi}\right)' \cdot a\left(t,y,x,\varphi,u\right) + \sum_{j\ne i}^{l}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}^0\left(t,y_j,\varphi_j,h\right) p_{ij}\left(t,z\middle|\varphi\right)dz - \right. \\
-\mathbf{v}^0\left(t,y_i,\varphi,h\right) - \mathbf{v}^0\left(t,y_j,\varphi,h\right) p_{ij}\left(t,z\middle|\varphi\right)dz - \\
\left. -\mathbf{v}^0\left(t,y_i,\varphi,h\right)\right] q_{ij}\left(t,z\middle|\varphi\right)dz + \mathbf{W}\left(t,y,\varphi,h,u\right) = 0,
\end{gathered} \tag{21}$$

де $\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}_k^0}{\partial \varphi}\right)' \equiv \left(\partial \mathbf{v}^0 \big/ \partial \varphi_1, \ldots, \partial \mathbf{v}^0 \big/ \partial \varphi_m\right)$ — похідні Фреше, $k \ge k_0$, $p_{ij}\left(t,z\middle|\varphi\right)$ — визначаються із формули (18).

Друге рівняння для оптимального керування $u_k^0\left(y,x,h\right)$ отримаємо з (21) диференціюванням за змінною u, оскільки $u = u^0$ надає мінімум лівій частині (17)

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \varphi}\right)' \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial u_k}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial u_k}\right)'\right]\Bigg|_{u_k = u^0} = 0, \tag{22}$$

де $\partial a / \partial u_k$ — $m \times n$-матриця Якобі, побудована з елементів

$$\left\{\frac{\partial a_n}{\partial u_{ks}},\ n = \overline{1, m},\ s = \overline{1, r}\right\},\ \left(\frac{\partial W}{\partial u_k}\right)' = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{k1}}, \dots, \frac{\partial W}{\partial u_{kr}}\right).$$

Зауваження 1. Рівняння (22), з якого знаходять оптимальні керування $u_k(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, за формою збігається з $u(t)$, що з'являється в детермінованих задачах оптимальної стабілізації.

Однак рівняння (22) враховує випадкову структуру системи (1)—(3) через оптимальний функціонал Ляпунова-Красовського $\mathbf{v}^0(t, y, \varphi, h)$ із рівняння (22).

Зауваження 2. Задача оптимальної стабілізації, відповідно до теореми, зводиться до розв'язання складної нелінійної системи рівнянь (19) у частинних похідних для визначення невідомих функціоналів Ляпунова-Красовського $\mathbf{v}_k^0 \equiv \mathbf{v}_k^0(t, y, \varphi, h_i)$, $i = \overline{1, l}$, $k \geq k_0$.

Список використаних джерел:

1. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последействием при наличии марковских параметров / В. С. Королюк, В. И. Мусуривский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 1. — С. 16—35.
2. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последействием при наличии марковских параметров / В. С. Королюк, В. И. Мусуривский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 3. — С. 5—20.
3. Королюк В. С. Проблеми стабілізації імпульсних систем випадкової структури зі скінченною післядією / В. С. Королюк, В. І. Мусурівський, В. К. Ясинський, І. В. Дорошенко — Чернівці : Чернівецький національний університет, 2010. — 240 с.
4. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. — 222 с.
5. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1963. — 859 с.

The scientific work deals with the stabilization of the impulse system of the odd structure with the continous behind under the impact of external and internal Markov's parameters with contemporary existing random process and behind.

Key words: *impulse dynamical system, system odd structure, continous behind.*

Отримано 11.10.2010