УДК 519.81

В. М. Михалевич, канд. физ.-мат. наук
Национальный университет «Киево-Могилянская академия», г. Киев

К СИСТЕМЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Вводится и формализуется понятие системы принятия решения, основанное на подходе В. И. Иваненко (см. [1], [2]). Общность введенной модели системы принятия решения иллюстрируется на примерах задач принятия решения при наличии случайности, которая описывается как стохастическими распределениями (вероятностная случайность), так и закономерностями массовых явлений («случайность в широком смысле» согласно [1]).

Ключевые слова: *ситуация, параметрическая ситуация, схема ситуации, модель ситуации, задача решения.*

Рассмотрим **систему принятия решения**, элементами которой является некий субъект и всё, что его окружает, называемые в дальнейшем соответственно **ТПР-ом** (тот, кто принимает решение) и **ситуацией**. Их взаимосвязь обусловлена тем, что задача ТПР-а повлиять на ситуацию посредством конкретного **действия** u и лишь после этого он может наблюдать результат своего влияния в виде конкретного исхода x, называемого в дальнейшем **последствием**. В свою очередь ситуация влияет на ТПР-а посредством того, что обусловливает его **конкретное** действие. Это ненаблюдаемое влияние ситуации будем называть ненаблюдаемым параметром и обозначать θ. Подчеркнём, что точное значение параметра θ ТПР-у, вообще говоря, неизвестно (в противном случае задача выбора действия ТПР-а сводится к задаче оптимизации). Система принятия решения иллюстрируется рис. 1.

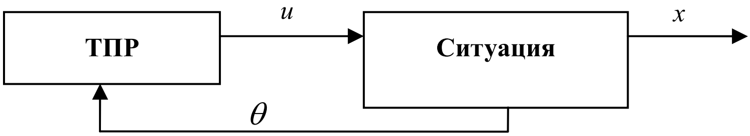

Рис. 1. *Система принятия решения*

Таким образом ситуацию можно рассматривать как детерминированный механизм формирования значения параметра θ и последствия x, вообще говоря, неизвестный ТПР-у. В то же время ТПР-а можно рассматривать как детерминированный механизм формирования действия u, в зависимости от значения параметра θ.

Анализируя систему принятия решения, исследователь огрубляет ее следующим образом:

1. Формирует непустое множество U, возможных по его мнению, действий, анализируемого ТПР-а в анализируемой ситуации.
2. Формирует непустое множество X элементарных (т.е. несовместных) последствий действий из множества U, возможных по его мнению, в анализируемой ситуации.
3. Рассматривает анализируемого им ТПР-а с точки зрения установления последним отношения предпочтения на множестве последствий X и множестве действий U (первая и вторая основные задачи решения (ЗР)). Такого ТПР-а мы будем называть ТПР-ом относительно ЗР.
4. Считает неизвестный ему механизм возникновений последствий при выбранном действии $u \in U$ в анализируемой ситуации «случайным в обычном смысле» (т.е. «явления, в котором мы не обнаруживаем закономерностей, позволяющих нам предсказывать их поведение» (см. [3]). Этот механизм мы будем называть **ситуацией задачи решения** (СЗР).

Огрубленная система принятия решения, которую коротко будем называть системой ЗР, иллюстрируется рис. 2.

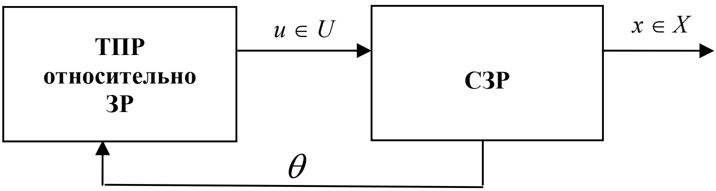

Рис. 2. *Система ЗР*

Моделируя анализируемую систему ЗР, исследователь может представить грубую модель СЗР, называемую в дальнейшем кратко <u>схемой ситуации</u> (СС), в виде тройки $\hat{Z} = (X, U, R)$, где $R \subseteq U \times X$, определяющая соответствие (т. е. бинарное отношение) (см. рис. 3).

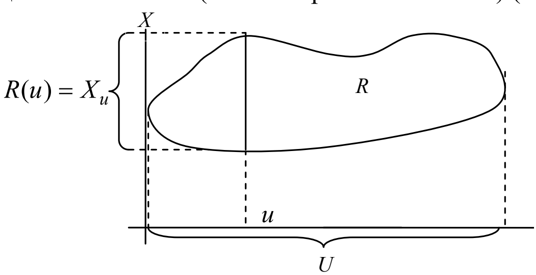

Рис. 3. *График СС*

Кроме того, моделируя анализируемую систему ЗР, исследователь может сформировать непустое множество Θ значений наблюдаемого параметра θ возможных, по его мнению, в анализируемой ситуации и представить грубую модель СЗР, называемую в этом случае **параметрической** СС, в виде четверки $Z = (X, \Theta, U, g)$, где $g \in X$ (см. рис. 4).

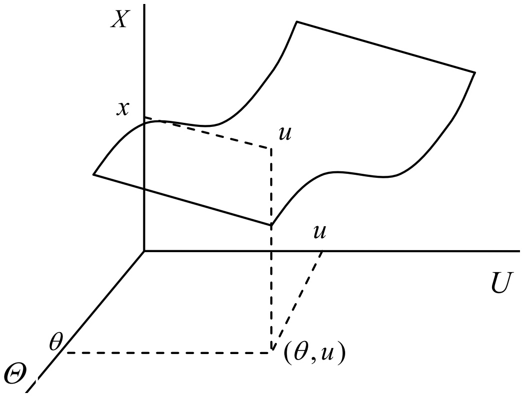

Рис. 4. *График параметрической СС*

Введем следующие обозначения:

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \left\{\widehat{Z} : \widehat{Z} = (\cdot,\cdot,\cdot)\right\},\ \widehat{\mathbf{Z}}(X) := \left\{\widehat{Z} : \widehat{Z} = (\mathrm{X}, \cdot,\cdot)\right\}, \widehat{Z} := \left\{\mathrm{Z} : \mathrm{Z} = (\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\right\},$$

$$Z(X,\Theta) := \left\{Z : Z = (X,\Theta, \cdot, \cdot)\right\}.$$

Далее, моделируя анализируемую систему ЗР, исследователь может представлять модель ТПР-а относительно решения им основной ЗР в классе СС, называемую в дальнейшем **правилом выбора предпочтений** (ПВП) в виде пары соответствий $((X, \succsim), (U, \succsim^{*}))$.

Через $\Pi(\mathbf{Z}')\left(\Pi\left(\widehat{\mathbf{Z}}'\right)\right)$ обозначим совокупность всех ПВП в классе $\mathbf{Z}'\left(\widehat{\mathbf{Z}}'\right)$.

Грубую модель параметрической системы ЗР, которую часто называют задачей принятия решения с полной неопределенностью, иллюстрирует рис. 5.

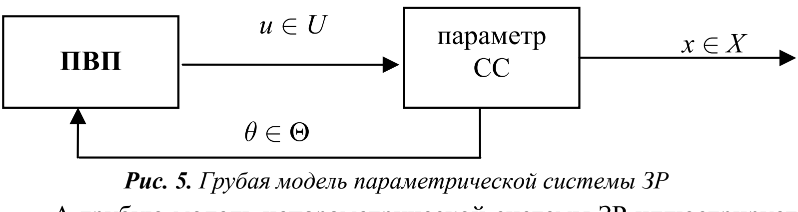

Рис. 5. *Грубая модель параметрической системы ЗР*

А грубую модель непараметрической системы ЗР иллюстрирует рис. 6.

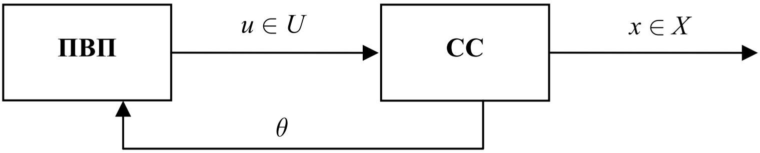

Рис. 6*. Грубая модель непараметрической системы ЗР*

Определение 1. Статистической закономерностью на Θ, где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножеств $\sum$ называется всякое непустое замкнутое множество P в топологии $\tau(\Theta)$ пространства $PF(\Theta) := \{p \in ([0, 1])^{\sum} : p(\Theta) = 1, p(C \cup D) = p(C) + \; + p(C \backslash D), \forall\ C, D \in \sum\}$ всех аддитивных вероятностных мер на Θ, которая является следом * — слабой топологии (см. [3—5]) в сопряжённом к банаховому пространству $B_{\sum}(\Theta)$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\| := \sup_{\theta \in \Theta} |f(\theta)|.$$

Тройку (Θ, $\sum$, P), где $P \in P(\Theta)$ будем называть пространством со статической закономерностью. Семейство всех статистических закономерностей на Θ будем обозначать $P(\Theta)$.

Отметим, что в топологии $\tau(\Theta)$ пространство $PF(\Theta)$ компактно.

Пусть для любого $u \in U$ (X_u, Ξ_u) — измеримое пространство, т.е. Ξ_u — алгебра подмножеств множества $X_{u.}$

Предположим, что для каждого $n \in N$ и для любой выборки u_1, u_2,...,u$_n$, где $u_i(i = 1, ..., n)$ — произвольные точки множества U, на алгебре $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (алгебра, порождённая полукольцом $\prod_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (см, например, [4, с. 42—45]) определена статистическая закономерность:

$$P_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}), A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}, \tag{1}$$

причём семейство статистических закономерностей (1) удовлетворяет следующим **условиям согласованности** $\forall \quad p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$, $p_{u_1,\ldots,u_{n+m}} \in P_{u_1,\ldots,u_{n+m}}$:

$$a)\ p_{u_1,\ldots,u_n,u_{n+1},\ldots,u_{n+m}}(A^{(n)} \times \prod_{i=1}^{m} X_{n+i}) = p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}),$$

$$\text{б)}\ p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}) = p_{\mathrm{s}(u_1,\ldots,u_n)}(\{s(a) : a \in A^{(n)}\}),$$

где $s(u_1, ..., u_n)$ — любая перестановка элементов $u_1, ..., u_{\mathrm{n}}$.

Моделью ситуации (МС) для статистических закономерностей будем называть её СС, дополненную в параметрической ситуации статистической закономерностью на Θ и обозначать $M := (X, \Theta, U, g, P)$, где $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$, $P \in P(\Theta)$, отображение $g(\theta, u)\ \forall\ u \in U$ является Σ, Ξ_u — измеримым (т.е. $\forall\ B \in \Xi_u$ и $\forall\ u \in U$ множество $\{\theta : g(\theta, u) \in B\}$ принадлежит алгебре $\sum$), где Ξ_u является следом алгебры Ξ в $X_u = \{g(\theta, u): u \in U\}$, а в непараметрической ситуации семейством согласованных статистических закономерностей на множествах $\prod_{i=1}^{k} X_{u_i}$, $u_i \in U$, $u_{i_1} \neq u_{i_2}$ при $i_1 \neq i_2$, $k \in N$ и обозначать коротко

$\widehat{M} := (X, U, \prod_{i=1}^{k} X_{u_i}, \left\{P_{u_i,\dots,u_k}\right\})$, где

$$\widehat{Z} = \left(X, U, \prod_{i=1}^{k} X_{u_i} \right) \in \widehat{Z},\ \ P_{u_i,\dots,u_k} \in P_{u_i,\dots,u_k}\left(\prod_{i=1}^{k} X_{u_i} \right).$$

Совокупность всех МС в параметрической ситуации будем обозначать через $\aleph$, а в непараметрической ситуации через $\widehat{\aleph}$. Соответственно, $\aleph(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \bullet, \bullet, \bullet)\}$, $\widehat{\aleph}(X) := \{(X, \bullet, \bullet, \bullet)\}$.

На уровне СС очевидно, что параметрическая ситуация не менее информативна чем соответствующая ей (т.е. моделирующая ту же СЗР) непараметрическая ситуация. При этом ясно, что каждой параметрической СС соответствует единственная непараметрическая СС одной и той же СЗР. А именно $\forall$ СС $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ соответствующая ей СС из

$\widehat{\mathbf{Z}}$ имеет вид $\widehat{\mathbf{Z}} = \left(X, U, \prod_{i=1}^{k} X_{u_i} \right)$, где $X_u = \{g(\theta, u): \theta \in \Theta\}$, $\forall\ u \in U$.

Чуть ниже мы покажем, что для любой СС $\widehat{Z} \in \widehat{\mathbf{Z}}$ найдется параметрическая СС Z (не единственная), такая что ей соответствует (т.е. моделирует ту же СЗР) СС $\widehat{\mathbf{Z}}$. В этом случае мы будем говорить, что СС Z является **представлением** СС $\widehat{\mathbf{Z}}$.

Менее очевидно, что так же обстоит дело с параметрическими и непараметрическими МС. Для формулировки этого результата введём необходимые точные определения.

Определение 2. Если существует пространство со статистической закономерностью $(\Theta, \sum, P)$, семейство измеримых пространств $\{(X_u, \Xi_u): u \in U\}$, и отображение g: $\Theta \times U \to X$, $\sum$, Ξ_u — измеримое при каждом фиксированном $u \in U$ и такое, что конечномерные статистические закономерности случайного отображения $g(\theta, u)$ совпадает с заданным семейством (*), т. е. для каждого $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{u} \Xi_{u_i}$ и для каждого $p \in P$ существует $p_{u_i,\ldots,u_k} \in P_{u_i,\ldots,u_k}$, что $p(\{\theta : (g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), ..., g(\theta, u_n) \in A^{(n)}\}) = p_{u_i,\ldots,u_k}(A^{(n)})$, то параметрическая МС $\aleph = (X, \Theta, U, g, P)$ называется **представлением** МС $\hat{\aleph} = \left(X, U, \prod_{u \in U}^{k} X_{u_i}, \left\{ P_{u_i,\ldots,u_k} \right\} \right)$.

Определение 3. Пусть $\{(X_u, \Xi_u): u \in U\}$ некоторая совокупность измеримых подпространств пространства X, Θ — пространство всех таких отображений θ, заданных на множестве U со значениями в пространстве X, что $\theta(u) \in X_u$ $\forall u \in U$ и $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, где $u_i \in U (i = 1, ..., n)$. Множество отображений $\theta \in \Theta$, для которых точка $(\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n))$ из $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$ принадлежит $A^{(n)}$, т.е. множество

$$C_{u_i,\ldots,u_n}(A^{(n)}) = \{\theta(u) : (\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)) \in A^{(n)}\},$$

называется **цилиндрическим множеством** в Θ с основанием $A^{(n)}$ над координатами $u_1, \ldots u_n$.

Ясно, что если точки $u_1, \ldots, u_n$ фиксированы, то между цилиндрическими множествами над координатами $u_1, \ldots, u_n$ и элементами алгебры $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ существует изоморфизм: каждое множество $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ определяет цилиндрическое множество $C_{u_i,\ldots,u_n}(A^{(n)})$, для которого оно служит основанием; разным основаниям соответствуют разные цилиндрические множества; объединению, разности, или пересечению оснований соответствует объединение, разность или пересечение цилиндрических множеств, что непосредственно вытекает из определения цилиндрического множества. Кроме того, легко видеть, что любые два цилиндрических множества можно всегда рассматривать как цилиндрические множества над одной и той же последовательностью координат. Отсюда следует, что, рассматривая алгебраические действия над конечным числом цилиндрических множеств, можно считать, что они заданы над фиксированной последовательностью координат. Поэтому класс ς всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств.

Предположим, что задана некоторая параметрическая МС $M = \{X, \Theta, U, g, P\}$. Тогда очевидно ей соответствует (т.е. моделирует ту же СЗР) единственная непараметрическая МС $\widehat{M} = (X, U, \prod_{u\in U} X_u$, $\left\{P_{u_1,\ldots,u_k}\right\})$, где $X_u = \{g(\theta, u)\colon u \in U\}$, Ξ_u – след алгебры Ξ в X_u, $k \in N$, $u_1, \ldots, u_k$ – любая выборка из U и каждое $\mathrm{p}_{u_i,\ldots,u_k} \in \mathrm{P}_{u_i,\ldots,u_k}$ определяется таким образом, что для каждого $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ и некоторой $p \in P$

$$p_{u_i,\ldots,u_k}(A^{(n)}) = p(\{\theta : (g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), \ldots, g(\theta, u_n)) \in A^{(n)}\}.$$

Когда вероятностная мера p пробегает замкнутое в топологии $\tau(\Theta)$ множество P, то для любой выборки $u_1, \ldots, u_k$ из множества U вероятностные меры $p_{u_1,\ldots,u_k}$ будут образовывать замкнутое в топологии $\tau(\prod_{i=1}^{k} X_{u_i})$ множество $P_{u_1,\ldots,u_k}$.

Теперь предположим, что задана некоторая непараметрическая МС $\widehat{M} = (X, U, \prod_{u\in \mathrm{U}} X_u$, $\left\{p_{u_i,\ldots,u_n}\right\})$. Покажем, что для $\widehat{M}$ существует представление $M = \{X', \Theta', U', g, P\}$. Очевидно, что $X = X'$ и $U = U'$. В качестве пространства Θ возьмем пространство всех таких отображений θ, заданных на U со значениями в X, что $\theta(u) \in X_u$. Отображение g определим как такое, что $g(\theta, u) = \theta(u)$. Тем самым мы определили представление СС $\widehat{\mathbf{Z}} = (X, U, \prod_{u\in U} X_u)$.

Далее мы можем определить на алгебре цилиндрических множеств ς пространства Θ для любой вероятностной меры $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$ функцию множеств $p'(C)$, $C \in \varsigma$, положив $p'(C) = p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)})$, если C является цилиндрическим множеством с основанием $A^{(n)}$ над координатами $u_1, \ldots, u_n$. Условия согласованности обеспечивают корректность определения функции $p'(C)$, $C \in \varsigma$. Пусть C_k, $k = 1, \ldots, m$ – последовательность цилиндрических множеств. Не уменьшая общности, можно считать, что они заданы основаниями $A_k^{(n)}$ над одной и той же последовательностью координат $u_1, \ldots, u_n$. Алгебраическим операциям над множествами C_k соответствуют в точности те же самые действия над основаниями $A_k^{(n)}$. Так как вероятностная мера $p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)})$ аддитивна в $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, то отсюда следует, что функция множеств p' (C), $C \in \varsigma$ аддитивна на ς. Когда вероятностные меры $p_{u_1,\ldots,u_n}$ пробегают замкнутое в топологии $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множество $P_{u_1,\ldots,u_n}$, то вероятностные меры p' будут образовывать некоторое замкнутое в топологии $\tau(\Theta)$ множество P. Замкнутость P следует из изоморфизма между цилиндрическими множествами над координатами u_1, … u_n и элементами алгебры $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$.

Таким образом представление для произвольной непараметрической МС указано.

Этот результат позволяет, анализируя систему принятия решения, не уменьшая общности, считать её параметрической.

Моделью для статистических закономерностей ПВП (МПВП) в классе СС $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ будем называть конечную совокупность условий на ПВП из класса $\mathbf{Z}'$, которые для произвольной заданной МС (для статистических закономерностей),схема которой принадлежит классу $\mathbf{Z}'$, определяют единственное ПВП.

Задачей исследователя системы принятие решений является получение её модели, т. е. МС и МПВП для определенного класса СС.

Модель системы принятия решения при случайности принятия значений ненаблюдаемого параметра, описываемой статистическими закономерностями, рассматривается в работе [1]. Приведенная там МС, называемая «общей задачей решения» характеризуется тем, что её класс СС представляет собой все СС с множеством последствий, являющимся множеством действительных чисел $\mathbf{R}$ с естественным порядком ($\leq$) в качестве отношения предпочтений ТПР-а и g — произвольной функцией, для которой при всяком $u \in U$ $\inf\{g(\theta,u) : \theta \in \Theta, u \in U\} > -\infty$ и $\sup\{g(\theta,u) : \theta \in \Theta\} < +\infty$. А МПВП, называемая там классом правил выбора критерия, и обозначаемого Π_0, для которых предпочтения на решениях задаются функцией полезности, называемой критерием, удовлетворяющей трем естественным условиям (монотонность, неотрицательная линейность и некоторая форма принципа гарантированного результата). При этом для указанной модели получен явный вид этого критерия.

Оказывается, что определить МС для стохастических распределений аналогично МС для статистических закономерностей (т.е. ограничившись лишь параметрическими ситуациями) с той лишь разницей, что под P понимается любое стохастическое распределение на

Θ *в общем случае* невозможно. Ибо в этом случае определению представления МС, аналогичному определению 2, где P — стохастическое распределение, соответствует определение представления случайного отображения «в широком смысле» (см. [7]). Тогда существование такого представления равносильно утверждению теоремы Колмогорова о согласованных распределениях (см. [7—8]), которое нельзя доказать, не выходя за рамки теории меры (в доказательстве теоремы Колмогорова в [7], используется полнота и сепарабельность метрического пространства X, а в [8] — его локальная компактность).

Непараметрические модели системы принятия решения при случайности принятия значений ненаблюдаемого параметра θ, описываемой стохастическими распределениями дает, например, известная теория ожидаемой полезности фон Неймана-Моргенштерна (см., например, [9, с. 211—223; 10, с. 92—121; 11, с. 20—23]).

Параметрические модели системы принятия решения при случайности принятия значений ненаблюдаемого параметра θ, описываемой стохастическими распределениями дает, например, известная теория субъективной ожидаемой полезности Сэвиджа. (см., например, [9, с. 298—328; 11, с. 23—28]).

В упомянутых моделях для стохастических распределений предпочтение на решениях определяются так называемым байесовским критерием.

Список использованной литературы:

1. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К. : Наук. думка, 1990. — 135 с.
2. Ivanenko V. I. Decision Systems and Non-Stochastic Randomness: monograph / V. I. Ivanenko. — Springer, 2010.
3. Колмогоров А. Н. О логических основаниях теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // Теория вероятностей и математическая статистика. — М. : Наука, 1986. — С. 467—471.
4. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1981. — 544 с.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ: теория и приложения / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1969. — 1076 с.
6. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М. : ИЛ, 1962. — 895 с.
7. Гихман Н. И. Введение в теорию случайных процессов / Н. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1965.
8. Lamperti I. Probability. A survey of the mathematical theory / I. Lamperti. — Dartmouth college, NEW YORK ; Amsterdam, 1966. / рус. перевод: Ламперти Дж. Вероятность. — М. : Наука, 1973. — 184 с.
9. Fisburn P. C. Utility theory for decision making / P.C. Fisburn. — John Wiley & Sons, New York, 1972. — 340 p. / рус. перевод: Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. — М. : Наука, 1978. — 352 с.

10. Morris H. DeGroot. Optimal statistical decisions / DeGroot Morris H. – McGraw-Hill Company, New York, 1970. — 490 p. / рус. перевод: Де Грот М. Оптимальные статистические решения / Де Грот М. — М. : Мир, 1974. — 496 с.
11. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях / Э. Й. Вилкас. — М. : Наука, 1990. — 254 с.

It is introduced and formalized the concept of the making decision system based on the V. I. Ivanenko's theory (see [1], [2]). The generality of the model imposed by the decision-making system is illustrated on the example of a decision with randomness, which is described as a stochastic distributions (probabilistic randomness), and the laws of mass phenomena («randomness in the broad sense», according to [1]).

Key words: *situation, the parametric situation, the scheme of the situation, the model of the situation, problem solutions.*

Отримано 02.10.2010

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРОБЛЕМА СТАБІЛІЗАЦІЇ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

У роботі розглянута проблема стабілізації імпульсної системи випадкової структури із постійним запізненням (СВСЗ) під впливом зовнішніх та внутрішніх марковських параметрів при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Ключові слова: *імпульсні динамічні системи, системи випадкової структури, постійне запізнення.*

Постановка задачі. Нехай [1], [2], [3] на ймовірнісному базисі $\left(\Omega, F, \left\{F_t, t \geq 0\right\}, \mathbb{P}\right)$ випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^m$ динамічної системи описується диференціальним рівнянням із постійним запізненням

$$dx(t) = a\left(t, \xi(t), x(t), x_t, u\right)dt, \tag{1}$$

із зовнішніми імпульсними марковськими збуреннями

$$\Delta\, x(t)\Big|_{t=t_k} = g\left(t_k-, \xi\left(t_k-\right), x\left(t_k-\right), \eta_k\right), \tag{2}$$

за початковими умовами

$$x_{t_0} = z_0 \in \mathbb{D};\ \ \xi\left(t_0\right) = y \in Y;\ \ \eta_{k_0} = h \in H, \tag{3}$$