3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
5. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
6. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г. М. Комаров, М. П. Ленюк, В. В. Мороз. — Чернівці : Прут, 2001. — 228 с.
7. Ленюк М. П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том VI / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2006. — 376 с.

By comparison of the boundary problem for a system of Euler differential equations, Fourier and (Kontorovich-Lebedev) segment $[R_0, R_3]$ of the polar axis with two point of interface, built on the one hand, by Cauchy functions, and on the other hand, using the corresponding finite hybrid integral transform (FHIT), summarized polyparametric family of functional series in its own elements corresponding hybrid differential operator (HDO).

Key words: *functional series, features the Cauchy principal of the boundary problem, the solvability conditions of the unique, custom items hybrid differential operator, the main identity logic circuit.*

Отримано 16.09.10

УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук,
Л. С. Лобанова, канд. фіз.-мат. наук,
Г. В. Залужна, ст. викладач
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

У роботі пропонується загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь параболічного типу в областях складної форми, що складаються з об'єднання прямокутників. Розглянуто приклад.

Ключові слова: *нестаціонарна задача теплопровідності, сплайн-інтерлінація функцій двох змінних.*

У праці [1] запропоновано загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку еліптичного типу в областях складної форми. Метод істотно використовує оператори сплайн-інтерлінації функцій двох змінних. У цій статті, на основі тверджень роботи [1], пропонується загальний метод побудови тестових точних розв'язків початково-крайових задач для рівняння нестаціонарної теплопровідності в областях складної форми. Розглянуто приклад. Така задача виникає у багатьох дослідників, які розробляють нові чисельні методи розв'язання нестаціонарних крайових задач для областей складної форми і яким тестування запропонованого методу бажано проводити не тільки на реальних задачах, для яких точний розв'язок невідомий, але також і на тестових задачах, для яких відомий точний розв'язок і можливе проведення аналізу похибки наближення. Тобто, тема даної роботи є актуальною.

Як відомо, загальний метод побудови функцій, які задовольняють неоднорідним граничним умовам Діріхле, Неймана та мішаним, може бути реалізований за допомогою R-функцій, запропонованих В. Л. Рвачовим [2—4]. Але, як відмічається у роботі [5, с. 1—22], при використанні структурного методу, побудованого з використанням R-функцій В. Л. Рвачова, виникають деякі проблеми: проблема кутових точок; проблема продовження слідів функцій і їх нормальних похідних з границі у внутрішні точки області інтегрування G зі збереженням класу диференційовності $C^r\left(G\right)$; проблема зміни типу граничних умов у деяких довільних точках границі; проблема побудови структур наближених розв'язків із заданими слідами на M лініях, якщо $m\left(m \geq 3\right)$ з них перетинаються в одній точці тощо. Ці наведені вище проблеми можуть бути успішно розв'язані за допомогою методів інтерлінації функції двох змінних, інтерфлетації функції трьох або більше змінних [5—6].

У роботі метод сплайн-інтерлінації функції двох змінних використовується для побудови і дослідження точних розв'язків неоднорідних крайових задач для диференціального рівняння параболічного типу:

$$Lu = f\left(x,y,t\right), \left(x,y\right) \in G, t > 0\,; \tag{1}$$

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p_2\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q\left(x,y\right)u\,;$$

$$u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right), \left(x,y\right) \in G\,; \tag{2}$$

$$u\left(x,y,t\right) = u_1\left(x,y,t\right), \left(x,y\right) \in \partial G, t > 0\,; \tag{3}$$

$$u_1\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right), \left(x,y\right) \in \partial G\,. \tag{4}$$

Відомо, що у випадку неоднорідних граничних умов (2) можна перейти до однорідних граничних умов шляхом заміни $u\left(x,y,t\right) = $ $= w\left(x,y,t\right) + \varphi_0\left(x,y,t\right)$, де функція $\varphi_0\left(x,y,t\right)$ задовольняє неоднорідним умовам (3)

$$\varphi_0\left(x,y,t\right)=u_1\left(x,y,t\right),\left(x,y\right)\in\partial G,t>0, \qquad (5)$$

а функція $w\left(x,y,t\right)$ є розв'язком такої однорідної задачі:

$$Lw=f\left(x,y,t\right)-L\varphi_0\left(x,y,t\right),\left(x,y\right)\in G,\ t>0\,; \qquad (6)$$

$$w\left(x,y,t\right)=0,\left(x,y\right)\in\partial G,\ t>0\,; \qquad (7)$$

$$w\left(x,y,0\right)=u_0\left(x,y\right)-\varphi_0\left(x,y,0\right),\left(x,y\right)\in G\,. \qquad (8)$$

Але для цього потрібне вміння будувати функції $\varphi_0\left(x,y,t\right)$, які задовольняють граничній умові (5) і належать до потрібного класу диференційовності.

Нижче ми викладемо метод побудови функцій $u\left(x,y,t\right)$, які задовольняють неоднорідні граничні умови і належать до потрібного класу диференційованості.

Припустимо, що область G є прямокутним багатокутником і може бути розбита на прямокутні елементи $\prod_{i,j}=\left\{\left(x,y\right):\right.$ $\left.x_i\le x\le x_{i+1};y_j\le y\le y_{j+1}\right\}$ прямими $x=x_i,\ i=\overline{1,m}$, $y=y_j,\ j=\overline{1,n}$. Невідому функцію $u\left(x,y,t\right)$ в кожному прямокутнику $\prod_{p,q}\subset G$ будемо шукати у вигляді:

$$\begin{gathered}u\left(x,y,t\right)=\tilde{u}\left(x,y,t,p,q\right)=\sum_{k=p}^{p+1}\sum_{s=0}^{1}\varphi_{k,s}\left(x,t\right)sp_{k,s}\left(y\right)+\\ +\sum_{l=q}^{q+1}\sum_{r=0}^{1}\psi_{l,r}\left(y,t\right)sp_{l,r}\left(x\right)-\sum_{k=p}^{p+1}\sum_{s=0}^{1}\sum_{l=q}^{q+1}\sum_{r=0}^{1}f_{k,s,l,r}\left(t\right)\times \qquad (9)\\ \times sp_{k,s}\left(x\right)sp_{l,r}\left(y\right),\left(x,y\right)\in\prod_{p,q}\subset G,\end{gathered}$$

де $sp_{l,r}\left(x\right)$, $sp_{k,s}\left(y\right)$ — кубічні сплайни з властивостями:

$$sp^{(rr)}{}_{lr}\left(x_{ll}\right)=\delta_{l,ll}\delta_{r,rr},\ l,ll\in\left\{p,p+1\right\},r,rr\in\left\{0,1\right\},$$

$$sp^{(ss)}{}_{k,s}\left(y_{kk}\right)=\delta_{k,kk}\delta_{s,ss},\ k,kk\in\left\{q,q+1\right\},\ s,ss\in\left\{0,1\right\}.$$

У випадку

$$\varphi^{(r)}{}_{k,s}\left(x_l,t\right)=\psi^{(s)}{}_{l,r}\left(y_k,t\right)=f_{k,s,l,r}\left(t\right),$$

$$k\in\overline{p,p+1},\ l\in\overline{q,q+1},\ s,r\in\left\{0,1\right\}$$

функція $u\left(x,y,t\right)$ має властивості:

$$u\left(x,y,t\right)\in C^{1,1}\left(G\right),$$

$$\left.\frac{\partial^{rr}}{\partial x^{rr}}u\right|_{x=x_{ll}}=\psi_{ll,rr}\left(y,t\right),\ \ ll=\overline{p,p+1},\ \ rr=\overline{0,1}\,,$$

$$\left.\frac{\partial^{ss}}{\partial y^{ss}} u\right|_{y=y_{kk}} = \varphi_{kk,ss}\left(x,t\right), \quad kk=\overline{q,q+1}, \quad ss=\overline{0,1}$$

незалежно від вибору функцій $\varphi_{ll,rr}\left(x,t\right)$ і $\psi_{kk,ss}\left(y,t\right)$ в інших точках інтервалу їх визначення.

Отже, формула (9) дозволяє нам будувати функцію трьох змінних $u\left(x,y,t\right)$, яка зберігає потрібний клас диференційовності і задовольняє граничним умовам на границі області *G*: $u\left(x,y,t\right)=u_1\left(x,y,t\right)$, $\left(x,y\right)\in\partial G$.

Тому функція

$$w\left(x,y,t\right)=u_0\left(x,y\right)+u\left(x,y,t\right)-u\left(x,y,0\right) \qquad (10)$$

має такі властивості:

$$w\left(x,y,t\right)=u_1\left(x,y,t\right), \left(x,y\right)\in\partial G,$$

$$w\left(x,y,0\right)=u_0\left(x,y\right), \left(x,y\right)\in G .$$

Теорема. Функція $U=U\left(x,y,t\right)=u_0\left(x,y\right)+u\left(x,y,t\right)-u\left(x,y,0\right)$, де функція $u\left(x,y,t\right)$ будується за описаним вище методом у вигляді (9), має властивості $U\left(x,y,t\right)\in C^{1,1}\left(G\right)$ $\forall t>0$ і є розв’язком початково-крайової задачі

$$LU\left(x,y,t\right)=Lw\left(x,y,t\right), (x,y)\in G,\ t>0,$$

$$U\left(x,y,t\right)=u_1(x,y,t), \left(x,y\right)\in\partial G,$$

$$U\left(x,y,0\right)=u_0(x,y), \left(x,y\right)\in\partial G .$$

Отже, уміння будувати функцію $u(x,y,t)$ дозволяє нам точно задовольняти початковим і граничним умовам та диференціальному рівнянню (1), у якому $f(x,y,t)=Lw(x,y,t)$.

Зауваження. При побудові функції $u(x,y,t)$ за формулою (9) виникає питання вибору функцій $\varphi_{k,s}\left(x,t\right)$ та $\psi_{l,r}(y,t)$ і $f_{k,s,l,r}(t)$, які повинні бути пов’язані між собою написаними вище умовами узгодженості у вузлових точках (x_k,y_l) незалежно від вибору їх в інших точках і від вибору $f_{k,s,l,r}(t)$. Тобто, вибираючи за тим або іншим алгоритмом функції $f_{k,s,l,r}(t)$ та замінюючи функції $\varphi_{k,s}\left(x,t\right)$ та $\psi_{l,r}(y,t)$ відповідними інтерполяційними операторами, отримаємо один з можливих алгоритмів побудови функції $u(x,y,t)$, яка належатиме потрібному класу диференційовності і буде задовольняти заданим умовам (3) на границі області *G*.

Проілюструємо описаний метод прикладом.

Приклад.

Хай область G є прямокутником: $G=\left[0,a\right]\times\left[0,b\right]$ і точний розв'язок початково-крайової задачі має вигляд

$$u\left(x,y,t\right)=x^2e^{-2t}+y^2e^{-3t}.$$

У цьому випадку початкові умови мають вигляд:

$$u\left(x,y,0\right)=u_0(x,y)=x^2+y^2,$$

а граничні умови мають вигляд:

$$u_1\left(x,y,t\right)=\begin{cases} y^2e^{-3t}, & x=0,\ \ 0\le y\le b,\\ x^2e^{-2t}, & y=0,\ \ 0\le x\le a,\\ a^2e^{-2t}+y^2e^{-3t}, & x=a,\ \ 0\le y\le b,\\ x^2e^{-2t}+b^2e^{-3t}, & y=b,\ \ 0\le x\le a. \end{cases}$$

Будемо шукати розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{1}\psi_{k,0}(y,t)H_{k,0}(x)+\sum_{k=0}^{1}\psi_{k,1}(y,t)H_{k,1}(x)+$$

$$+\sum_{l=0}^{1}\varphi_{l,1}(x,t)h_{l,1}(y)-\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}u(x_k,y_l,t)H_{k,0}(x)h_{l,0}(y)-$$

$$-\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}u^{(0,1)}(x_k,y_l,t)H_{k,0}(x)h_{l,1}(y)-$$

$$-\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}u^{(1,1)}(x_k,y_l,t)H_{k,1}(x)h_{l,1}(y),$$

де функції

$$\psi_{k,p}\left(y,t\right)\left(k,p=0,1\right),\ \varphi_{l,s}\left(x,t\right)\left(l,s=0,1\right)$$

задовольняють умови:

$$\psi_{0,1}(y_0,t)=u^{(1,0)}(x_0,y_0,t),\psi_{0,1}(y_1,t)=u^{(1,0)}(x_0,y_1,t),$$

$$\frac{\partial\psi_{0,1}(y_0,t)}{\partial y}=u^{(1,1)}(x_0,y_0,t),\frac{\partial\psi_{0,1}(y_1,t)}{\partial y}=u^{(1,1)}(x_0,y_1,t),$$

$$\psi_{1,1}(y_0,t)=u^{(1,0)}(x_1,y_0,t),\psi_{1,1}(y_1,t)=u^{(1,0)}(x_1,y_1,t),$$

$$\frac{\partial\psi_{1,1}(y_0,t)}{\partial y}=u^{(1,1)}(x_1,y_0,t),\frac{\partial\psi_{1,1}(y_1,t)}{\partial y}=u^{(1,1)}(x_1,y_1,t),$$

$$\varphi_{0,1}(x_0,t)=u^{(0,1)}(x_0,y_0,t),\ \varphi_{0,1}(x_1,t)=u^{(0,1)}(x_1,y_0,t),$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,1}(x_0,t)}{\partial y} = u^{(1,1)}(x_0,y_0,t), \frac{\partial \varphi_{0,1}(x_1,t)}{\partial y} = u^{(1,1)}(x_1,y_0,t),$$

$$\varphi_{1,1}(x_0,t) = u^{(0,1)}(x_0,y_1,t),\ \varphi_{1,1}(x_1,t) = u^{(0,1)}(x_1,y_1,t),$$

$$\frac{\partial \varphi_{1,1}(x_0,t)}{\partial y} = u^{(1,1)}(x_0,y_1,t), \frac{\partial \varphi_{1,1}(x_1,t)}{\partial y} = u^{(1,1)}(x_1,y_1,t)$$

і визначаються рівностями:

$$\psi_{0,1}(y,t) = \sum_{q=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} h_{q,n}(y) u^{(1,n)}(x_0,y_q,t),$$

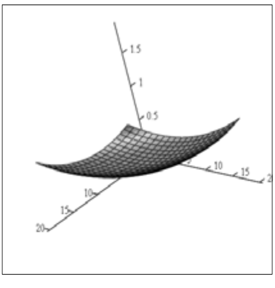
$$\psi_{1,1}(y,t) = \sum_{q=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} h_{q,n}(y) u^{(1,n)}(x_1,y_q,t),$$

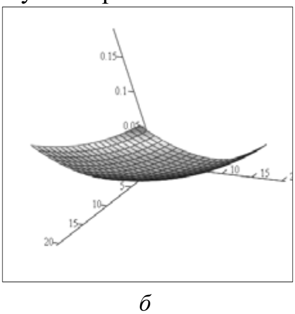
$$\varphi_{0,1}(x,t) = \sum_{p=0}^{1}\sum_{m=0}^{1} H_{p,m}(x) u^{(m,1)}(x_p,y_0,t),$$

$$\varphi_{1,1}(x,t) = \sum_{p=0}^{1}\sum_{m=0}^{1} H_{p,m}(x) u^{(m,1)}(x_p,y_1,t).$$

Функції $H_{p,m}(x)\ \left(p,m=\overline{0,1}\right)$, $h_{q,n}(y)\ \left(q,n=\overline{0,1}\right)$ вибираються у вигляді кубічних ермітових сплайнів.

На рис. 1 наведено графіки точного розподілу температури в області $G=[0,1]\times[0,1]$ в моменти часу $t=0,02;\ t=1,0$, отриманого за побудованою формулою. Для розрахунків прийнято $a=b=1$.





а *б*

Рис.1. *Точний розподіл температури в області* $G=[0,1]\times[0,1]$ *в моменти часу t=0,02 (а), t=1,0 (б), отриманого за побудованою формулою.*

Висновок. Запропоновано загальний метод побудови тестових прикладів для точного розв'язання початково-крайової задачі (1)—(4) у випадку областей, які складаються з об'єднання прямокутних підобластей.

Розглянуто приклад. При цьому точний розв'язок може належати потрібному класу диференційовності і задовольняти початковим і граничним умовам (2)—(3) за умови узгодженості (4). Подальшим кроком авторів у цьому напрямку буде побудова і дослідження методу конструювання точних тестових розв'язків для областей довільної форми, обмежених відомими лініями.

Список використаних джерел:

1. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. / В. Л. Рвачев — К. : Техніка, 1967. — 212 с.
2. Рвачев В. Л. К вопросу о построении координатных последовательностей / В. Л. Рвачев // Дифференц. уравнения. — 1970. — № 6. — С. 1034—1047.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. / В. Л. Рвачев — К. : Наук. думка, 1982. — 566 с.
4. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод / О. М. Литвин, В. Л. Рвачова. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007.
5. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія / О. М. Литвин — Харків: Основа, 2002. — 544 с.

In the given work the general method of construction of exact solution of boundary value problems for the differential equations of parabolic type in areas of the complex form which are association of not crossed rectangles is offered. It is considered an example.

Key words: *non-stationary problem of heat-conducting, interlineation with splines of functions of two variables.*

Отримано 06.10.2010