УДК 517.443

О. М. Ленюк, канд. фіз.-мат. наук
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА — ФУР'Є — (КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА) НА СЕГМЕНТІ [R_0, R_3] ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та (Конторовича-Лєбєдєва) на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі з двома точками спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а, з другого боку, методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення (СГІП), підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора (ГДО).

Ключові слова: *функціональні ряди, функції Коші, головні розв'язки крайової задачі, умова однозначної розв'язності, власні елементи гібридного диференціального оператора, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим елемента, зображаються поліпараметричним функціональним рядом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо для інженерних розрахунків. Підсумовуванню однієї сім'ї функціональних рядів присвячена дана робота.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині

$$I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\ \ R_0 > 0,\ \ R_3 < \infty\},$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича-Лєбєдєва для модифікованих функцій

$$\left(B^*_{\alpha_1} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)u_2(r)=-g_2(r),\quad r\in(R_1,R_2)\,, \tag{1}$$
$$\left(B_{\alpha_2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r),\quad r\in(R_2,R_3)$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)u_1(r)\right|_{r=R_0}=g_0,\ \left.\left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)u_3(r)\right|_{r=R_3}=g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk},\ j,k=1,2. \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Ейлера $B_{\alpha_1}^*=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_1^2$ [1], Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [1] та Конторовича-Лєбєдєва $B_{\alpha_2}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_2^2-\lambda^2r^2$ [2]; $2\alpha_j+$, $+1>0$ $\lambda\in(0,\infty)$.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_1>0$, $q_2>0$, $q_3>0$; $\alpha_{11}^0\le 0$, $\beta_{11}^0\ge 0$, $|\alpha_{11}^0|+\beta_{11}^0\ne 0$; $\alpha_{22}^3\ge 0$, $\beta_{22}^3\ge 0$; $\alpha_{22}^3+\beta_{22}^3\ne 0$; $\alpha_{jk}^m\ge 0$, $\beta_{jk}^m\ge 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $j,k=1,2$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^*-q_1^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha_1-q_1}$ та $v_2=r^{-\alpha_1+q_1}$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2)v=0$ складають гіперболічні функції $v_1=chq_2r$ та $v_2=shq_2r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_2}-q_3^2)v=0$ складають функції Бесселя уявного аргументу першого роду $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та другого роду $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі методом функцій Коші [1; 3]:

$$u_1(r)=A_1r^{-\alpha_1-q_1}+B_1r^{-\alpha_1+q_1}+\int\limits_{R_0}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1^*(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho\,,$$

$$u_2(r)=A_2chq_2r+B_2shq_2r+\int\limits_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2(\rho)d\rho\,, \qquad (4)$$

$$u_3(r)=A_3I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+B_3K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+\int\limits_{R_2}^{R_3}E_3(r,\rho)g_3^*(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho\,.$$

Тут $g_j^*(r)=g_j(r)r^{-2},\quad j=1,3$; $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [1; 3]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0 \qquad (5)$$

$$\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0}-\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)},\quad j=1,2,3\,,$$

де функція $\varphi_1=\rho^{2\alpha_1+1}$, функція $\varphi_2=1$, функція $\varphi_3=\rho^{2\alpha_2+1}$.

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_1\equiv C_1r^{-\alpha_1-q_1}+D_1r^{-\alpha_1+q_1}, & R_0<r<\rho<R_1\\ \overset{+}{E}_1\equiv C_2r^{-\alpha_1-q_1}+D_2r^{-\alpha_1+q_1}, & R_0<\rho<r<R_1\end{cases}.$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)\rho^{-\alpha_1-q_1}+(D_2-D_1)\rho^{-\alpha_1+q_1}=0$$

$$(C_2-C_1)(\alpha_1+q_1)\rho^{-\alpha_1-q_1}+(D_2-D_1)(\alpha_1-q_1)\rho^{-\alpha_1+q_1}=\rho^{2\alpha_1}$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2-C_1=(2q_1)^{-1}\rho^{-\alpha_1+q_1},\quad D_2-D_1=-(2q_1)^{-1}\rho^{-\alpha_1-q_1} \qquad (6)$$

Доповнимо рівності (6) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{aligned}\left(\alpha_{11}^0\tfrac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)\overset{-}{E}_1\Big|_{r=R_0}=0: & \;\begin{cases}Z_{\alpha_1;11}^{01}\left(q_1,R_0\right)C_1+Z_{\alpha_1;11}^{02}\left(q_1,R_0\right)D_1=0,\\ Z_{\alpha_1;11}^{11}\left(q_1,R_1\right)C_2+Z_{\alpha_1;11}^{12}\left(q_1,R_1\right)D_2=0.\end{cases}\\ \left(\alpha_{11}^1\tfrac{d}{dr}+\beta_{11}^1\right)\overset{+}{E}_1\Big|_{r=R_1}=0: & \end{aligned} \qquad (7)$$

Алгебраїчна система (7) внаслідок рівностей (6) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}&Z_{\alpha_1;11}^{01}(q_1,R_0)C_1+Z_{\alpha_1;11}^{02}(q_1,R_0)D_1=0\\ &Z_{\alpha_1;11}^{11}(q_1,R_0)C_1+Z_{\alpha_1;11}^{12}(q_1,R_0)D_1=(2q_1)^{-1}\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,\rho)\end{aligned} \qquad (8)$$

Згідно правил Крамера [4] із алгебраїчної системи (8) маємо:

$$C_1=-\frac{Z_{\alpha_1;11}^{02}(q_1,R_0)}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)}\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,\rho),$$

$$D_1 = \frac{Z^{01}_{\alpha_1;11}(q_1, R_0)}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho) .$$

Цим функція Коші $E_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{9}$$

У рівностях (7)—(9) беруть участь функції:

$$Z^{m1}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_m) = [(\beta^m_{j1} - \alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1}) - \alpha^m_{j1}R_m^{-1}q_1]R_m^{-\alpha_1-q_1} ,$$

$$Z^{m2}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_m) = [(\beta^m_{j1} - \alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1}) + \alpha^m_{j1}R_m^{-1}q_1]R_m^{-\alpha_1+q_1} ,$$

$$\Delta_{\alpha_1;j1}(q_1,R_0,R_1) = Z^{01}_{\alpha_1;11}(q_1,R_0)Z^{12}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1) - Z^{02}_{\alpha_1;11}(q_1,R_0)Z^{11}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1) ,$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_1;j1}(q_1,r) = Z^{m2}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_m)r^{-\alpha_1-q_1} - Z^{m1}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_m)r^{-\alpha_1+q_1} .$$

Нехай функція Коші

$$E_2(r,\rho) = \begin{cases}\overset{-}{E}_2 \equiv C_1 chq_2 r + D_1 shq_2 r, & R_1<r<\rho<R_2,\\ \overset{+}{E}_2 \equiv C_2 chq_2 r + D_2 shq_2 r, & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)chq_2\rho + D_2 shq_2\rho = 0 ,$$

$$(C_2 - C_1)shq_2\rho + D_2 chq_2\rho = -q_2^{-1} .$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_2^{-1}shq_2\rho, \quad D_2 = -q_2^{-1}chq_2\rho. \tag{10}$$

Доповнимо алгебраїчні рівності (10) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{matrix}\left(\alpha^1_{12}\dfrac{d}{dr} + \beta^1_{12}\right)\overset{-}{E}_1\Big|_{r=R_1} = 0: \\ \left(\alpha^2_{11}\dfrac{d}{dr} + \beta^2_{11}\right)\overset{+}{E}_1\Big|_{r=R_2} = 0:\end{matrix}\begin{cases}V^{11}_{12}(q_2R_1)C_1 + V^{12}_{12}(q_2R_1)D_1 = 0\\ V^{21}_{11}(q_2R_2)C_2 + V^{22}_{11}(q_2R_2)D_2 = 0\end{cases}. \tag{11}$$

Внаслідок співвідношень (10) алгебраїчна система (11) набуває вигляду:

$$V_{12}^{11}(q_2R_1)C_1+V_{12}^{12}(q_2R_1)D_1=0,$$
$$V_{11}^{21}(q_2R_2)C_1+V_{11}^{22}(q_2R_2)D_1=q_2^{-1}\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2\rho). \tag{12}$$

Розв'язок алгебраїчної системи (12) одержуємо за правилами Крамера [4]

$$C_1=-\frac{V_{12}^{12}(q_2R_1)}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2\rho),$$

$$D_1=\frac{q_2^{-1}V_{12}^{11}(q_2R_1)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2\rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\times$$
$$\times\begin{cases}\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{13}$$

У рівностях (11)—(13) беруть участь функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_2R_m)=\alpha_{jk}^{m}q_2shq_2R_m+\beta_{jk}^{m}chq_2R_m;$$

$$V_{jk}^{m2}(q_2R_m)=\alpha_{jk}^{m}q_2chq_2R_m+\beta_{jk}^{m}shq_2R_m;$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2);\ \ j,k=1,2;$$

$$\Phi_{jk}^{m}(q_2R_m,q_2r)=V_{jk}^{m2}(q_2R_m)chq_2r-V_{jk}^{m1}(q_2R_m)shq_2r.$$

Нехай функція Коші

$$E_3(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_3\equiv C_1I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+D_1K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r), & R_2<r<\rho<R_3,\\ \overset{+}{E}_3\equiv C_2I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+D_2K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r), & R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)+(D_2-D_1)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)=0,$$

$$(C_2-C_1)I'_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)+(D_2-D_1)K'_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)=-\left(\lambda\rho^{2\alpha_2+1}\right)^{-1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2-C_1=-\lambda^{2\alpha_2}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),\ \ D_2-D_1=\lambda^{2\alpha_2}I_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho). \tag{14}$$

Доповнимо рівності (14) алгебраїчними рівняннями:

$$\left(\alpha_{12}^2 \, {}^{d}\!/_{dr} + \beta_{12}^2\right)\bar{E}_3\Big|_{r=R_2} = 0:$$

$$\left(\alpha_{22}^3 \, {}^{d}\!/_{dr} + \beta_{22}^3\right)\overset{+}{E}_3\Big|_{r=R_3} = 0: \tag{15}$$

$$\begin{cases} U_{q_3,\alpha_2;12}^{21}(\lambda R_2)C_1 + U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)D_1 = 0, \\ U_{q_3,\alpha_2;22}^{31}(\lambda R_3)C_2 + U_{q_3,\alpha_2;22}^{32}(\lambda R_3)D_2 = 0. \end{cases}$$

Внаслідок співвідношень (14) алгебраїчна система (15) набуває вигляду:

$$\begin{gathered} U_{q_3,\alpha_2;12}^{21}(\lambda R_2)C_1 + U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)D_1 = 0, \\ U_{q_3,\alpha_2;22}^{31}(\lambda R_3)C_1 + U_{q_3,\alpha_2;22}^{32}(\lambda R_3)D_1 = \lambda^{2\alpha_2}\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda\rho). \end{gathered} \tag{16}$$

Розв'язавши алгебраїчну систему (16) за правилами Крамера [4], маємо:

$$C_1 = -\frac{\lambda^{2\alpha_2}U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda\rho),$$

$$D_1 = \frac{\lambda^{2\alpha_2}U_{q_3,\alpha_2;12}^{21}(\lambda R_2)}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda\rho).$$

Цим функція коші $E_3(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\times$$

$$\times\begin{cases} \Psi_{q_3,\alpha_2;12}^{2*}(\lambda R_2,\lambda r)\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda\rho), R_2 < r < \rho < R_3, \\ \Psi_{q_3,\alpha_2;12}^{2*}(\lambda R_2,\lambda\rho)\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda r), R_2 < \rho < r < R_3. \end{cases} \tag{17}$$

У рівностях (15)—(17) беруть участь функції:

$$U_{\upsilon_3,\alpha_2;jk}^{m1}(\lambda R_m) = \left(\alpha_{jk}^m\,\frac{\upsilon_3-\alpha_2}{R_m} + \beta_{jk}^m\right)\times$$

$$\times I_{\upsilon_3,\alpha_2}(\lambda R_m) + \alpha_{jk}^m R_m\lambda^2 I_{\upsilon_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m), \quad \upsilon_3 \equiv q_3;$$

$$U_{\upsilon_3,\alpha_2;jk}^{m2}(\lambda R_m) = \left(\alpha_{jk}^m\,\frac{\upsilon_3-\alpha_2}{R_m} + \beta_{jk}^m\right)\times$$

$$\times K_{\upsilon_3,\alpha_2}(\lambda R_m) - \alpha_{jk}^m R_m\lambda^2 K_{\upsilon_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$\Delta_{\upsilon_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2,\lambda R_3)=U^{21}_{\upsilon_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)U^{32}_{\upsilon_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)-$$

$$-U^{22}_{\upsilon_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)U^{31}_{\upsilon_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3),$$

$$\Psi^{m*}_{\upsilon_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_m,\lambda r)=U^{m1}_{\upsilon_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_m)K_{\upsilon_3,\alpha_2}(\lambda r)-$$

$$-U^{m2}_{\upsilon_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_m)I_{\upsilon_3,\alpha_2}(\lambda r).$$

Повернемося до формул (4). Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин $A_j, B_j \quad (j=\overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{gathered}
Z^{01}_{\alpha_1;11}(q_1,R_0)A_1+Z^{02}_{\alpha_1;11}(q_1,R_0)B_1=g_0,\\
Z^{11}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)A_1+Z^{12}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)B_1-V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2-\\
-V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2,\\
V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2+V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2-U^{21}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)A_3-\\
-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)B_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23},\\
U^{31}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)A_3+U^{32}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)B_3=g_R.
\end{gathered}\tag{18}$$

У системі (18) беруть участь функції

$$G_{12}=-\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+c_{21}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_2,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho,$$

$$G_{23}=-c_{12}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho-$$

$$-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho)}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} [4] $(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1;j}(q)=\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-$$

$$-\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{\alpha_2;j}(q)=\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-$$

$$-\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2);$$

$$\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)=\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)-$$
$$-\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1,q_2r),$$
$$\Theta_{\alpha_2;2}(r,q)=\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r)-$$
$$-\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (18) відмінний від нуля, тобто

$$\begin{aligned}\Delta_{(\alpha)}(q)&\equiv A_{\alpha_1;1}(q)\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)-A_{\alpha_1;2}(q)\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)=\\&=B_{\alpha_2;2}(q)\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)-B_{\alpha_2;1}(q)\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1)\neq 0.\end{aligned}\qquad(19)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)—(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\left[B_{\alpha_2;2}(q)\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,r)-B_{\alpha_2;1}(q)\Psi_{\alpha_1;21}^{1*}(q_1,r)\right],$$

$$W_{(\alpha);12}(r,q)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_2;2}(r,q),\ \ (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),\qquad(20)$$

$$W_{(\alpha);13}(r,q)=-\frac{c_{12}q_2\,2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda r);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);31}(r,q)=\frac{c_{21}q_2c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1,r),$$

$$W_{(\alpha);32}(r,q)=\frac{c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q),\qquad(21)$$

$$W_{(\alpha);33}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Big[A_{\alpha_1;1}(q)\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{2*}(\lambda R_2,\lambda r)-$$
$$-A_{\alpha_1;2}(q)\Psi_{q_3,\alpha_2;12}^{2*}(\lambda R_2,\lambda r)\Big];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{(\alpha);11}^1(r,q)=-\frac{B_{\alpha_2;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1,r),\quad R_{(\alpha);21}^1(r,q)=\frac{B_{\alpha_2;1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1,r),$$

$$R_{(\alpha);12}^1(r,q)=\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1,r),$$

$$R^1_{(\alpha);22}(r,q) = -\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\,,$$

$$R^2_{(\alpha);11}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha_1;21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_2;2}(r,q),\quad R^2_{(\alpha);21}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_2;2}(r,q)\,,$$

$$R^2_{(\alpha);12}(r,q) = \frac{\Delta_{q_3,\alpha_2;22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q),\quad R^2_{(\alpha);22}(r,q) = -\frac{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\,,$$

$$R^3_{(\alpha);11}(r,q) = \frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r)\,, \tag{22}$$

$$R^3_{(\alpha);21}(r,q) = -\frac{c_{12}q_2}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r)\,,$$

$$R^3_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r),$$

$$R^3_{(\alpha);22}(r,q) = \frac{A_{\alpha_1;1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r);$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{(\alpha);11}(r,\rho,q) = -\frac{1}{2q_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)W_{(\alpha);11}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1,\\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)W_{(\alpha);11}(r,q), & R_0 < \rho < r < R_1,\end{cases}$$

$$H_{(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\cdot\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\Theta_{\alpha_2;2}(\rho,q)\,,$$

$$H_{(\alpha);13}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}q_2c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho)\,,$$

$$H_{(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)\Theta_{\alpha_2;2}(r,q)\,,$$

$$H_{(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_2\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Theta_{\alpha_2;2}(\rho,q), R_1 < r < \rho < R_2,\\ \Theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Theta_{\alpha_2;2}(r,q), R_1 < \rho < r < R_2,\end{cases}$$

$$H_{(\alpha);23}(r,\rho,q) = \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho)\,, \tag{23}$$

$$H_{(\alpha);31}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}q_2c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\cdot\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r)\,,$$

$$H_{(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r),$$

$$H_{(\alpha);33}(r,\rho,q)=\lambda^{2\alpha_2}\begin{cases}W_{(\alpha);33}(r,q)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho), & R_2<r<\rho<R_3,\\ W_{(\alpha);33}(\rho,q)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r), & R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (18), підстановки одержаних значень A_j, B_j у формули (4) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$u_j(r)=W_{(\alpha);1j}(r,q)g_0+\sum_{m,k=1}^{2}R^j_{(\alpha);mk}(r,q)\omega_{mk}+W_{(\alpha);3j}(r,q)g_R+$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}H_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho+ \qquad (24)$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}H_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\quad j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)}=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B^*_{\alpha_1}+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\frac{d^2}{dr^2}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)B_{\alpha_2}, \qquad (25)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливої точки, то його спектр дійсний та дискретний [5]. Спектральному параметру β відповідає спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{m=1}^{3}\theta(r-R_{m-1})\theta(R_m-r)V_{(\alpha);m}(r,\beta).$$

Для знаходження власних елементів (власних чисел й відповідних їм власних функцій) ГДО $M_{(\alpha)}$ розглянемо задачу Штурма-Ліувілля: побудувати ненульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича-Лєбєдєва

$$\left(B^*_{\alpha_1}+b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2), \qquad (26)$$

$$\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,R_3)$$

з однорідними крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,$$
$$\left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \tag{27}$$

та однорідними умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)V_{(\alpha);k}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}=0, \tag{28}$$
$$j,k=1,2$$

де $b^2=\beta^2+k_j^2$, $k_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^*+b_1^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2\big/dr^2+b_2^2\right)v=0$ складають тригонометричні функції $\cos b_2r$ та $\sin b_2r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лєбєдєва) $(B_{\alpha_2}+b_3^2)v=0$ складають дійсні функції $C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [2].

Природно відшукувати функції $V_{(\alpha);m}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=A_1r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)+B_1r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r),$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta)=A_2\cos b_2r+B_2\sin b_2r, \tag{29}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta)=A_3C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)+B_3D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3).$$

Крайові умови (27) та умови спряження (28) для визначення шести величин A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1,R_0)A_1+Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1,R_0)B_1=0;$$
$$Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1,R_1)A_1+Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1,R_1)B_1-$$
$$-v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2-v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=0,\ j=1,2; \tag{30}$$
$$v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2-$$

$$-X_{\alpha_2;j2}^{21}(\lambda R_2,b_3)A_3 - X_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2,b_3)B_3 = 0,$$
$$X_{\alpha_2;22}^{31}(\lambda R_3,b_3)A_3 + X_{\alpha_2;22}^{32}(\lambda R_3,b_3)B_3 = 0.$$

У системі (30) беруть участь функції:

$$Y_{\alpha_1;j1}^{m1}(b_1,R_m) = \Big[\left(\beta_{j1}^m - \alpha_{j1}^m R_m^{-1}\alpha_1\right)\cos\left(b_1 \ln R_m\right) -$$
$$-b_1 R_m^{-1}\alpha_{j1}^m \sin\left(b_1 \ln R_m\right)\Big] R_m^{-\alpha_1},$$
$$Y_{\alpha_1;j1}^{m2}(b_1,R_m) = \Big[\left(\beta_{j1}^m - \alpha_{j1}^m R_m^{-1}\alpha_1\right)\sin\left(b_1 \ln R_m\right) +$$
$$+b_1 R_m^{-1}\alpha_{j1}^m \cos\left(b_1 \ln R_m\right)\Big] R_m^{-\alpha_1},$$
$$v_{jk}^{m1}(b_2 R_m) = -\alpha_{jk}^m b_2 \sin b_2 R_m + \beta_{jk}^m \cos b_2 R_m,$$
$$v_{jk}^{m2}(b_2 R_m) = \alpha_{jk}^m b_2 \cos b_2 R_m + \beta_{jk}^m \sin b_2 R_m,$$
$$X_{\alpha_2;j2}^{m1}\left(\lambda R_3,b_3\right) = \left(\alpha_{j2}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^m\right) C_{\alpha_2}\left(\lambda r,b_3\right)\Big|_{r=R_m};\quad j=1,2,\quad m=2,3;$$
$$X_{\alpha_2;j2}^{m2}\left(\lambda R_3,b_3\right) = \left(\alpha_{j2}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^m\right) D_{\alpha_2}\left(\lambda r,b_3\right)\Big|_{r=R_m}.$$

Алгебраїчна система (30) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник рівний нулю [4]:

$$\delta_{(\alpha)}(\beta) \equiv a_{\alpha_1;1}(\beta)\delta_{\alpha_2;22}(\beta) - a_{\alpha_1;2}(\beta)\delta_{\alpha_2;12}(\beta) =$$
$$= \delta_{\alpha_1;11}(\beta)b_{\alpha_2;2}(\beta) - \delta_{\alpha_1;21}(\beta)b_{\alpha_2;1}(\beta) = 0. \tag{31}$$

У рівностях (31) прийняті позначення

$$\delta_{\alpha_1;j1}(\beta) = Y_{\alpha_1;11}^{01}\left(b_1,R_0\right)Y_{\alpha_1;j1}^{12}\left(b_1,R_1\right) - Y_{\alpha_1;11}^{02}\left(b_1,R_0\right)Y_{\alpha_1;j1}^{11}\left(b_1,R_1\right),$$
$$\delta_{jk}\left(b_2R_1,b_2R_2\right) = v_{j2}^{11}\left(b_2R_1\right)v_{k1}^{22}\left(b_2R_1\right) - v_{j2}^{12}\left(b_2R_1\right)v_{k1}^{21}\left(b_2R_2\right);\quad j,k=1,2;$$
$$\delta_{\alpha_2;j2}(\beta) = X_{\alpha_2;j2}^{21}\left(\lambda R_2,b_3\right)X_{\alpha_2;22}^{32}\left(\lambda R_3,b_3\right) -$$
$$-X_{\alpha_2;j2}^{22}\left(\lambda R_2,b_3\right)X_{\alpha_2;22}^{31}\left(\lambda R_3,b_3\right),$$
$$a_{\alpha_1;j}(\beta) = \delta_{\alpha_1;11}(\beta)\delta_{2j}\left(b_2R_1,b_2R_2\right) - \delta_{\alpha_1;21}(\beta)\delta_{1j}\left(b_2R_1,b_2R_2\right),$$
$$b_{\alpha_2;j}(\beta) = \delta_{\alpha_2;22}(\beta)\delta_{j1}\left(b_2R_1,b_2R_2\right) - \delta_{\alpha_2;12}(\beta)\delta_{j2}\left(b_2R_1,b_2R_2\right).$$

Ми одержали трансцендентне рівняння (31) для обчислення власних чисел ГДО $M_{(\alpha)}$. Корінь β_n рівняння $\delta_{(\alpha)}(\beta) = 0$ підставимо в систему (30) й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Візьмемо $A_1 = A_0 Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_{1n},R_0)$, $B_1 = -A_0 Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_{1n},R_0)$, де A_0

підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю, а всі інші рівняння утворюють дві алгебраїчні системи по два рівняння в кожній; $b_{jn}=\left(\beta_n^2+k_j^2\right)^{1/2}$, $j=\overline{1,3}$.

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2:

$$v_{j2}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)A_2+v_{j2}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)B_2=-A_0\delta_{\alpha_1;j1}(\beta_n),\quad j=1,2. \tag{32}$$

Визначник алгебраїчної системи (32)

$$q_1(\beta_n)\equiv v_{12}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)v_{22}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)-v_{22}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)v_{12}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)=c_{21}b_{2n}\neq 0.$$

Алгебраїчна система (32) має єдиний розв'язок [4]:

$$\begin{aligned}A_2&=A_0q_1^{-1}\left[\delta_{\alpha_1;21}(\beta_n)v_{12}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)-\delta_{\alpha_1;11}(\beta_n)v_{22}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)\right],\\ B_2&=-A_0q_1^{-1}\left[\delta_{\alpha_1;21}(\beta_n)v_{12}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)-\delta_{\alpha_1;11}(\beta_n)v_{22}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)\right].\end{aligned} \tag{33}$$

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$X_{\alpha_2;j2}^{21}\left(\lambda R_2,b_{3n}\right)A_3+X_{\alpha_2;j2}^{22}\left(\lambda R_2,b_{3n}\right)B_3=A_0q_1^{-1}a_{\alpha_1;j}(\beta_n),\quad j=1,2\,. \tag{34}$$

Визначник алгебраїчної системи (34)

$$X_{\alpha_2;12}^{21}X_{\alpha_2;22}^{22}-X_{\alpha_2;22}^{21}X_{\alpha_2;12}^{22}=-\frac{c_{22}sh(\pi b_{3n})}{\pi\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\equiv -q_{\alpha_2}(\beta_n)\neq 0.$$

Алгебраїчна система (34) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_3=-\omega_{(\alpha);2}(\beta_n);\quad B_3=\omega_{(\alpha);1}(\beta_n),\quad A_0=q_1(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n)\,, \tag{35}$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta)=a_{\alpha_1;1}(\beta_n)X_{\alpha_2;22}^{21}(\lambda R_2,b_{3n})-a_{\alpha_1;2}(\beta_n)X_{\alpha_2;12}^{21}(\lambda R_2,b_{3n})\,.$$

Якщо тепер підставити визначені величини A_j, B_j згідно формул (33) та (35) у рівності (29), то одержимо функції $V_{(\alpha);m}\left(r,\beta_n\right)$:

$$V_{(\alpha);1}\left(r,\beta_n\right)=q_1(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n)\Big[Y_{\alpha_1;11}^{02}\left(b_{1n},R_0\right)r^{-\alpha_1}\cos\left(b_{1n}\ln r\right)-$$

$$-Y_{\alpha_1;11}^{01}\left(b_{1n},R_0\right)r^{-\alpha_1}\sin\left(b_{1n}\ln r\right)\Big],$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)=q_{\alpha_2}(\beta_n)\Big[\delta_{\alpha_1;21}(\beta_n)\varphi_{12}^1\left(b_{2n}R_1,b_{2n}r\right)-$$

$$-\delta_{\alpha_1;11}(\beta_n)\varphi_{22}^1\left(b_{2n}R_1,b_{2n}r\right)\Big],$$

$$\varphi_{j2}^1\left(b_{2n}R_1,b_{2n}r\right)=v_{j2}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)\cos b_{2n}r-v_{j2}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)\sin b_{2n}r\,,\ j=1,2\,,$$

$$V_{(\alpha);3}\left(r,\beta_n\right)=\omega_{(\alpha);1}(\beta_n)D_{\alpha_2}\left(\lambda r,b_{3n}\right)-\omega_{(\alpha);2}(\beta_n)C_{\alpha_2}\left(\lambda r,b_{3n}\right). \tag{36}$$

Отже, спектральна вектор-функція $V_{(\alpha)}(r,\beta_n)$ визначена.

Згідно з роботою [6] сформулюємо твердження.

Теорема 1 (про власні числа). Корені β_n трансцендентного рівняння (31) складають дискретний спектр ГДО $M_{(\alpha)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на півпрямій $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Визначимо величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}, \ \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} R_2^{2\alpha_2+1}, \ \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\begin{gathered}\sigma(r) = \theta\left(r - R_0\right)\theta\left(R_1 - r\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta\left(r - R_1\right)\times \\ \times\theta\left(R_2 - r\right)\sigma_2 + \theta\left(r - R_2\right)\theta\left(R_3 - r\right)\sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1}\end{gathered} \qquad (37)$$

та квадрат норми власної функції

$$\left\| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|^2 = \int_{R_0}^{R_3} \left[V_{(\alpha)}\left(r, \beta_n\right) \right]^2 \sigma(r) dr \equiv$$

$$\equiv \int_{R_0}^{R_1} \left[V_{(\alpha);1}\left(r, \beta_n\right) \right]^2 \sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr + \qquad (38)$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} \left[V_{(\alpha);2}\left(r, \beta_n\right) \right]^2 \sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} \left[V_{(\alpha);3}\left(r, \beta_n\right) \right]^2 \sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1} dr.$$

Теорема 2 (про власні функції). Система власних функцій $\left\{ V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка векторфункція $g(r)$ із області визначення ГДО $M_{(\alpha)}$ зображається за системою $\left\{ V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_3} g(\rho) V_{(\alpha)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{(\alpha)}(r, \beta_n)}{\left\| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|^2}. \qquad (39)$$

Якщо перейти до ортонормованої системи функцій

$$\left\{ V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \cdot \left\| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|^{-1} \right\}_{n=1}^{\infty} \equiv \left\{ v_{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

то ряд Фур'є (39) набуває вигляду

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)v_{(\alpha)}\left(\rho,\beta_n\right)\sigma(\rho)d\rho v_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right). \tag{40}$$

Ряд Фур'є (40) визначає пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП) типу Ейлера — Фур'є — Бесселя, породжене на множині I_2 ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{R_3} g(r)v_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n, \tag{41}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n v_{(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\equiv g(r). \tag{42}$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r)=\left\{B_{\alpha_1}^{*}\left[g_1(r)\right];g_2''(r);B_{\alpha_2}\left[g_3(r)\right]\right\}$$

неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}H_{(\alpha)}\left[M_{(\alpha)}[g]\right]&=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\\-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{ni}&+\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}v_{(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0+\\+\left(\alpha_{22}^3\right)^{-1}&\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}v_{(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right)g_R+\\+\sum_{k=1}^{2}d_k&\left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right].\end{aligned} \tag{43}$$

У рівності (43) беруть участь функції та величини:

$$\tilde{g}_{n1}=\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)v_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr,\quad \tilde{g}_{n2}=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)v_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr,$$

$$\tilde{g}_{n3}=\int_{R_2}^{R_3} g_3(r)v_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr,\ d_1=\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}:c_{11},\quad d_2=\sigma_2:c_{12};$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta_n)=\left.\left(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k\right)v_{(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\right|_{r=R_k},\quad i,k=1,2.$$

Формули (41), (42) та (43) складають математичний апарат для розв'язання крайової задачі (1)—(3) за відомою логічною схемою [7].

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(B_{\alpha_1}^{*}-q_1^2\right)u_1(r) \\ \left(d^2\big/dr^2-q_2^2\right)u_2(r) \\ \left(B_{\alpha_2}-q_3^2\right)u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}$ згідно правила (41) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\alpha)}[\cdots] = \left[\int\limits_{R_0}^{R_1} \cdots v_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr \int\limits_{R_1}^{R_2} \cdots v_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr \right.$$
$$\left. \int\limits_{R_2}^{R_3} \cdots v_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \right]. \tag{45}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (45) до системи (44). Внаслідок основної тотожності (43) отримуємо алгебраїчне рівняння:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\beta_n^2+k_i^2+q_i^2\right)\tilde{u}_{ni} = \tilde{g}_n + \left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1} v_{(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 +$$
$$+\left(\alpha_{22}^3\right)^{-1}\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} v_{(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right) g_R + \tag{46}$$
$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right].$$

Припустимо, що $\max\left\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\right\} = q_1^2 > 0$. Покладемо $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = q_1^2 - q_3^2 \geq 0$, $\tilde{u}_{n1} + \tilde{u}_{n2} + \tilde{u}_{n3} \equiv \tilde{u}_n$. Із алгебраїчного рівняння (46) знаходимо, що функція

$$\tilde{u}_n = \frac{\tilde{g}_n}{\beta_n^2+q_1^2} + \frac{v_{(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 +$$
$$+\frac{v_{(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right)}{\alpha_{22}^3\left(\beta_n^2+q_1^2\right)} R_3^{2\alpha_2+1} g_R + \left(\alpha_{22}^3\right)^{-1}\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} v_{(\alpha);3}\left(R_3,\beta_n\right) g_R + \tag{47}$$
$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right].$$

Оператор $H_{(\alpha)}^{-1}$ згідно формули (42) як обернений до (45) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\cdots]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots v_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots v_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdots v_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\end{bmatrix}. \tag{48}$$

Застосувавши за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (48) до матриці-елемента $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена формулою (47), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$\begin{aligned} u_j(r)=&\int\limits_{R_0}^{R_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)v_{(\alpha);1}(\rho,\beta_n)}{\beta_n^2+q_1^2}\right)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\\ &+\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q_1^2}v_{(\alpha);2}(\rho,\beta_n)\right)g_2(\rho)\sigma_2 d\rho+\\ &+\int\limits_{R_2}^{R_3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q_1^2}v_{(\alpha);3}(\rho,\beta_n)\right)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)}{\left(\alpha_{22}^3\right)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)R_3^{2\alpha_2+1}g_R+\\ &+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\alpha);12}^k(\beta_n)}{\beta_n^2+q_1^2}v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)\right)\omega_{2k}-\right.\\ &\left.-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{(\alpha);22}^k(\beta_n)}{\beta_n^2+q_1^2}v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)\right)\omega_{1k}\right],\ j=\overline{1,3}, \end{aligned} \tag{49}$$

Порівнюючи розв'язки (24) та (49) внаслідок теореми єдиності, одержуємо такі формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)=\left(\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\right)^{-1}W_{(\alpha);1j}(r,q);\quad j=\overline{1,3}, \tag{50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);3}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3\left(\beta_n^2+q_1^2\right)}v_{(\alpha);j}(r,\beta_n)=\left(\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}\right)^{-1}W_{(\alpha);3j}(r,q);\quad j=\overline{1,3}, \tag{51}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_{(\alpha);12}^{k}(\beta_n)\frac{v_{(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\beta_n^2+q_1^2}=d_k^{-1}R_{(\alpha);2k}^{j}(r,q);\quad k=1,2,\quad j=\overline{1,3},\quad (52)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_{(\alpha);22}^{k}(\beta_n)\frac{v_{(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\beta_n^2+q_1^2}=-d_k^{-1}R_{(\alpha);1k}^{j}(r,q);\quad k=1,2,\quad j=\overline{1,3},\quad (53)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\beta_n^2+q_1^2}v_{(\alpha);k}\left(\rho,\beta_n\right)=\sigma_k^{-1}H_{(\alpha);jk}\left(r,\rho,q\right);\quad j,k=\overline{1,3}.\quad (54)$$

Функції Гріна $W_{(\alpha);1j}\left(r,q\right)$ визначені формулами (20), функції Гріна $W_{(\alpha);3j}\left(r,q\right)$ визначені формулами (21), функції Гріна $R_{(\alpha);ik}^{j}\left(r,q\right)$ умов спряження визначені формулами (22), а функції впливу $H_{(\alpha);jk}\left(r,\rho,q\right)$ — формулами (23); $q=\left(q_1,q_2,q_3\right)$.

Зауваження 1. Якщо $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_2^2>0$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\geq$ ≥ 0, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\geq 0$ і замість $(\beta_n^2+q_1^2)$ стане вираз $(\beta_n^2+q_2^2)$. Якщо $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_3^2>0$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\geq 0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$ і замість виразу $(\beta_n^2+q_1^2)$ всюди стоятиме вираз $(\beta_n^2+q_3^2)$.

Зауваження 2. Оскільки праві частини у формулах (50)—(54) не залежать від нерівностей $\left(q_j^2-q_m^2\right)\geq 0$, то при необхідності можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2>0$.

Результатом виконаного в роботі дослідження є таке твердження.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $g(r)$ задовольняє умови теореми про основну тотожність та виконується умова (19) однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3), то справедливі формули (50)—(54) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (25).

Висновок. Одержані формули (50)—(54) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі підсумовування функціональних рядів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

Список використаних джерел:

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
2. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.

3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
5. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
6. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г. М. Комаров, М. П. Ленюк, В. В. Мороз. — Чернівці : Прут, 2001. — 228 с.
7. Ленюк М. П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том VI / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2006. — 376 с.

By comparison of the boundary problem for a system of Euler differential equations, Fourier and (Kontorovich-Lebedev) segment $[R_0, R_3]$ of the polar axis with two point of interface, built on the one hand, by Cauchy functions, and on the other hand, using the corresponding finite hybrid integral transform (FHIT), summarized polyparametric family of functional series in its own elements corresponding hybrid differential operator (HDO).

Key words: *functional series, features the Cauchy principal of the boundary problem, the solvability conditions of the unique, custom items hybrid differential operator, the main identity logic circuit.*

Отримано 16.09.10

УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук,
Л. С. Лобанова, канд. фіз.-мат. наук,
Г. В. Залужна, ст. викладач
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

У роботі пропонується загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь параболічного типу в областях складної форми, що складаються з об'єднання прямокутників. Розглянуто приклад.

Ключові слова: *нестаціонарна задача теплопровідності, сплайн-інтерлінація функцій двох змінних.*

У праці [1] запропоновано загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку еліптичного типу в областях складної

