

УДК 624.048-033.26:621.651

М. Б. Демчук, ст. викладач

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НАГНІТАННЯ В'ЯЖУЧОГО РОЗЧИНУ В ПОРИСТЕ СЕРЕДОВИЩЕ

Розглянута задача закріплення пружного ґрунтового масиву методом нагнітання в нього в'язучого розчину. Побудовані математичні моделі та алгоритми розв'язку для випадків плоско-вертикальної та осесиметричної постановок. Розв'язки отримано методом скінченних різниць з використанням числових конформних відображень.

Ключові слова: *нагнітання, різницевий метод, конформне відображення, пористе середовище, рухома межа.*

Вступ. Перед спорудженням будівельних об'єктів на ділянках, де на значній глибині від поверхні залягають слабкі ґрунти, необхідно створити штучну основу. Одним з прийомів є нагнітання через ін'єктор у ґрунтовий масив в'язучого розчину. Важливо спершу промоделювати процес нагнітання на комп'ютері, щоб встановити режим в якому він повинен виконуватись. Проводиться багато досліджень з математичного моделювання процесу поширення в'язучого розчину при нагнітанні. У моделях, представлених в роботах [1—3], цю задачу відносять до класу задач про поширення забруднень. В одновимірній моделі, представлений в роботі [4], її без належного обґрунтування відносять до класу задач з вільними рухомими межами. У роботах [5, 6] цей підхід узагальнено на випадки двовимірних відповідно плоско-вертикальної та осесиметричної моделей поширення в'язучого розчину в абсолютно твердому скелеті ґрунту. У роботі [7] дві останні задачі розв'язані для випадку пружного ґрунту. Однак моделі [5—7] дозволяють знайти розв'язок тільки із значною похибкою чисельного розрахунку. У цій статті ми наводимо аргументи на користь останньої класифікації та представляємо модифікацію моделі [7], яка дозволяє суттєво зменшити похибку чисельного розрахунку.

Постановка задач. Формулювання моделей [1; 3] зводиться до крайових задач для рівнянь потоку та масопереносу. Оцінити поведінку функції концентрації розчину можна розглянувши одновимірне рівняння масопереносу

$$D \partial^2 c / \partial x^2 - V \partial c / \partial x = \partial c / \partial t, \quad (1)$$

з такими початковими та крайовими умовами:

$$c(x, 0) = 0, c(\infty, t) = 0, c(0, t) = \bar{c}. \quad (2)$$

Тут D , V та \bar{c} — додатні константи. Точний аналітичний розв'язок цієї задачі має такий вигляд [1, с. 41]

$$\frac{c}{\bar{c}} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left\{ \frac{x-Vt}{2\sqrt{Dt}} \right\} + \exp \left(\frac{Vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x+Vt}{2\sqrt{Dt}} \right\} \right], \quad (3)$$

де c/\bar{c} — безрозмірна концентрація, а $\operatorname{erfc}(\beta) = 1 - 2/\sqrt{\pi} \int_0^\beta e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon$.

Теорема 1. При $x \geq 0$, $t > 0$, $D > 0$ та $V > 0$ існує часткова похідна $\partial(c/\bar{c})/\partial x$ для якої справедлива оцінка

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}} < \frac{\partial(c/\bar{c})}{\partial x} < \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} \frac{Vt-x}{x+Vt} e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}}. \quad (4)$$

Доведення. Згідно означення часткової похідної, теорем про похідну складної функції та про похідну інтеграла зі змінною верхньою межею можна стверджувати, що при $t > 0$ існує часткова похідна $\partial(c/\bar{c})/\partial x(x, t)$, яка дорівнює такому виразу

$$\frac{\partial(c/\bar{c})}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}} + \frac{V}{D\sqrt{\pi}} e^{\frac{Vx}{D}} \int_{\frac{x+Vt}{2\sqrt{Dt}}}^{+\infty} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (5)$$

Якщо $x \geq 0$, $t > 0$, $D > 0$ та $V > 0$, то для другого доданку правої частини рівняння (5) справедливою є така оцінка

$$0 < \frac{V}{D\sqrt{\pi}} e^{\frac{Vx}{D}} \int_{\frac{x+Vt}{2\sqrt{Dt}}}^{+\infty} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon < \frac{2Vt}{x+Vt} \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}}. \quad (6)$$

Тому можна стверджувати, що при $x \geq 0$, $t > 0$, $D > 0$ та $V > 0$ справедливою є оцінка (4). Теорему доведено.

Верхня та нижня межі оцінки (4) суттєво відрізняються від нуля тільки для таких значень просторової координати

$$Vt - \sqrt{8Dt} \leq x \leq Vt + \sqrt{8Dt}.$$

Тому концентраційний фронт при $x = Vt$ може бути різким тільки якщо $Vt \gg \sqrt{8Dt}$, що для процесу нагнітання ($D \approx a_L \cdot V$) еквівалентно умові

$$\sqrt{V \cdot t} \gg \sqrt{8a_L}, \quad (7)$$

де a_L — коефіцієнт повздовжньої дисперсії, а V — швидкість частинок інфільтрату. Якщо розглядається задача нагнітання в'язучого

розчину в насичене водою пористе середовище [2; 3], то при виконанні умови (7) концентраційний фронт можна апроксимувати різкою границею між двома рідинами, при переході через яку концентрація змінюється різко від концентрації розчину в першій рідині до нуля. При цьому в зв'язку з наближенням, прийнятим при введенні в модель різкої границі замість перехідної зони, не можна порівнювати результати експериментальних вимірів в межах цієї зони з результатами модельних розрахунків [8, с. 235—236]. Отже, при виконанні умови (7) задачу поширення в'язучого розчину при нагнітанні можна вважати задачею з рухомою межею.

Щоб бути в змозі закріпити суттєві об'єми ґрунту, в в'язучий розчин додають суперпластифікатори, після чого він замість того, щоб проявляти властивості неньютонівської рідини, що є типовим, наприклад, для цементних розчинів, починає проявляти властивості неньютонівської рідини з в'язкістю такою як у води [2, с. 1197].

У цій роботі ми розглядаємо дві задачі. Для першої вважаємо, що під фундаментом ін'єктора зроблено довгу траншею ширини $2 \cdot r_0$ та глибини h_0 , в яку під тиском p_0 нагнітається в'язучий інфільтрат (рис. 1) густини ρ_0 . У другій — осесиметричній задачі, замість траншеї маємо свердловину радіуса r_0 та глибини h_0 . Необхідно знайти еволюцію фронту нагнітання. При цьому інфільтрат вважаємо неньютонівською рідиною.

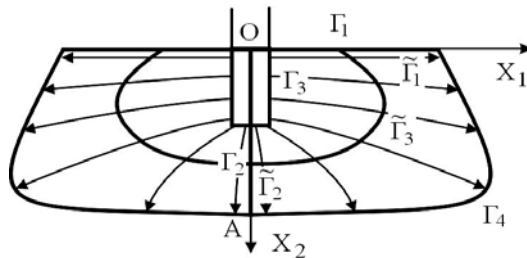


Рис. 1. Фізична область $G(t)$ нагнітання рідини в ґрунтовій масив

Математичні моделі задач. Математичні моделі та алгоритми розв'язування цих задач подібні, тому ми спочатку описуємо модель та алгоритм розв'язування плоско-вертикальної задачі, після чого вказуємо, що потрібно змінити, щоб отримати те саме для осесиметричної. У випадку плоско-вертикальної постановки та відсутності зовнішніх навантажень напір $h(x_1, x_2, t)$ в області $G(t)$ (рис. 1) задовольняє такому рівнянню та крайовим умовам [7, с. 271]:

$$a \frac{\partial h}{\partial t} = k \cdot \Delta h(x_1, x_2, t) = k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right), \quad (8)$$

$$\partial h / \partial \bar{n}_1 \Big|_{\Gamma_1} = 0, \partial h / \partial \bar{n}_2 \Big|_{\Gamma_2} = 0, h \Big|_{\Gamma_3} = p_0 / \rho_0 / g, h \Big|_{\Gamma_4} = -x_2. \quad (9)$$

Тут k — коефіцієнт фільтрації, $a = c_0 \cdot g / k_c$, $c = 1 / k_c$, k_c — модуль пружності пористого середовища, \bar{n}_1 , \bar{n}_2 — зовнішні нормалі до Γ_1 та Γ_2 відповідно. Для радіус-векторів точок вільної поверхні Γ_4 в моменти часу t і $t + dt$ справедливим є таке [5, с. 162]:

$$\bar{r}(t + dt) \Big|_{\Gamma_4} = \bar{r}(t) \Big|_{\Gamma_4} - k \left(\bar{\nabla} h \Big|_{\Gamma_4}, \bar{n}_4 \right) dt \bar{n}_4 / m, \quad (10)$$

де \bar{n}_4 одиничний вектор нормалі до Γ_4 , m — пористість ґрунту. При знаходженні функції напору, яка задовольняє (8)—(10), використовується різницевий метод з використанням числових конформних відображень [9, с. 13—19]. При розрахунку еволюції фронту нагнітання в кожний момент часу область закріплення покривається рідкою конформною сіткою наслідком чого є те, що похибка апроксимації є суттєвою і припускається, що в межах цієї похибки фронт нагнітання можна описувати двічі неперервно-диференційованою функцією змінної x_2 (рис. 1). Також припускається, що в межах цієї похибки у криволінійного чотирикутника № 1, сторонами якого є криві Γ_i , де $i = \overline{1,4}$, всі кути при вершинах є прямими. Внаслідок того, що кількість вузлів є незначною нехтується ймовірністю того, що в певний момент часу алгоритм побудує сітку з хаотичним розміщенням вузлів. Коректність цих припущень перевіряється наступним числовим експериментом. Оскільки інформація про те, що фронт нагнітання змінює своє положення, поширюється за допомогою звукових хвиль, які внаслідок тертя між ґрунтом та інфільтратом швидко затухають, то можна вибрати криву в межах закріпленої області і момент часу t_0 починаючи з якого значення функції напору в точках цієї кривої не залежать від часу. Тому модифікуємо модель, використовуючи припущення про те, що функція напору залежить від часу тільки поблизу рухомої межі. І тому починаючи з деякого моменту часу t_0 в рівняння (10), яке визначає еволюцію фронту нагнітання, замість функції напору підставляємо функцію, яка задовольняє такому рівнянню та крайовим умовам:

$$a \partial h / \partial t = k \cdot \Delta h(x_1, x_2, t) = k \left(\partial^2 h / \partial x_1^2 + \partial^2 h / \partial x_2^2 \right), \quad (11)$$

$$\partial h / \partial \bar{l}_1 \Big|_{\tilde{\Gamma}_1} = 0, \partial h / \partial \bar{l}_2 \Big|_{\tilde{\Gamma}_2} = 0, h \Big|_{\tilde{\Gamma}_3} = h(x_1, x_2, t_0), h \Big|_{\Gamma_4} = -x_2. \quad (12)$$

Тут $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3, \Gamma_4$ зображені на рис. 1, а \bar{l}_1, \bar{l}_2 — зовнішні нормалі до $\tilde{\Gamma}_1$ та $\tilde{\Gamma}_2$ відповідно. Положення $\tilde{\Gamma}_3$ так само як і момент часу t_0 підбираються експериментально так, щоб кінцеве положення фронту

нагнітання відрізнялось від відповідного положення отриманого методом [7, с. 269—282] на як можна меншу величину і щоб похибка апроксимації модифікованого методу була як можна меншою. При цьому якщо похибка чисельного розрахунку кінцевого положення фронту нагнітання в рамках модифікованої моделі буде меншою ніж в рамках початкової моделі, то можна вважати модельні припущення вірними.

Для осесиметричної задачі, якщо ввести позначення, $x_1 = r$, $x_2 = x_3$, де r, x_3 — циліндричні координати, а вісь x_3 направлена вертикально вниз, то замість (8), (11) відповідно маємо

$$a \frac{\partial h}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right), \quad (13)$$

а (9), (10) та (12) залишаються без змін.

Алгоритми розв'язування задач. Початкова форма рухомої межі області $G(t)$ (рис. 1) невідома, але ми припускаємо, що її початкова форма не впливає на її кінцеву форму, якщо перша не надто сильно відрізняється від форми ін'єктора. Припускаючи, що значення функції напору в початковий момент часу також можна вибрати довільним чином, розраховуємо його, наприклад вважаючи скелет ґрунту абсолютно твердим [6, с. 209—214].

Алгоритм розв'язування першої задачі такий. Спочатку розв'язуємо задачу (8), (9) на момент часу t_1 в деякій фіксованій області $G(t_1)$. Потім згідно співвідношення (10) знаходимо положення фронту нагнітання Γ_4 на момент часу $t_1 + \Delta t$, після чого повертаємось до задачі (8), (9) вже в новій області $G(t_1 + \Delta t)$ і так діємо в методі [7, с. 269—282] до кінцевого моменту часу, а в модифікованому до вище згаданого моменту часу $t = t_0$. В останньому методі, починаючи з цього моменту часу, в рівняння (10), яке визначає еволюцію фронту нагнітання, підставляємо не розв'язок задачі (8), (9), а розв'язок задачі (11), (12). При цьому все інше робимо так само. Для розв'язання задач (8), (9) та (11), (12) використовуємо різницьевий метод з використанням числових конформних відображень [9, с. 13—19]. Цей метод пропонує алгоритм знаходження такої заміни змінних, яка конформно відображає відповідний криволінійний чотирикутник на параметричний прямокутник $G(t)$ з сторонами $1/M$ та 1 , де M — модуль прямокутника. Для нашої задачі більш зручним є нерухомий квадрат Q зі стороною рівною 1 (рис. 2). До нього від прямокутника $G(t)$ можна перейти за допомогою відображення $\xi = \bar{\xi}/M(\bar{t})$, $\eta = \bar{\eta}$, $t = \bar{t}$. При цьому вигляд рівнянь (8), (11) в нових змінних дещо зміниться, а крайові умови (9), (12) залишаться інваріантними:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{t}} = K_1 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \bar{\xi}^2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \bar{\eta}^2} + K_3 \cdot \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{\xi}} + K_4 \cdot \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{\eta}}, \quad (14)$$

$$K_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \frac{k(M(\bar{t}))^2}{a \cdot \left((\partial x_1 / \partial \bar{\eta})^2 + (\partial x_2 / \partial \bar{\eta})^2 \right)}, \quad (15)$$

$$K_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \frac{k}{a \cdot \left((\partial x_1 / \partial \bar{\eta})^2 + (\partial x_2 / \partial \bar{\eta})^2 \right)}, \quad (16)$$

$$K_3(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \frac{M(\bar{t})(\partial x_2 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_1 / \partial \bar{t} - \partial x_1 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_2 / \partial \bar{t})}{(\partial x_1 / \partial \bar{\eta})^2 + (\partial x_2 / \partial \bar{\eta})^2}, \quad (17)$$

$$K_4(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \frac{\partial x_1 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_1 / \partial \bar{t} + \partial x_2 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_2 / \partial \bar{t}}{(\partial x_1 / \partial \bar{\eta})^2 + (\partial x_2 / \partial \bar{\eta})^2}, \quad (18)$$

$$\partial \tilde{h} / \partial \bar{\eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \partial \tilde{h} / \partial \bar{\eta} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \tilde{h} \Big|_{\Gamma_3} = F_0, \tilde{h} \Big|_{\Gamma_4} = -x_2(1, \bar{\eta}). \quad (19)$$

Тут $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) = h(x_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}), x_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}), \bar{t})$, $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3, \Gamma'_4$ (рис. 2) є образами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ для задачі (8), (9) і $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3, \Gamma_4$ для задачі (11), (12). У свою чергу для задачі (8), (9) $F_0 = p_0 / \rho_0 / g$, а для задачі (11), (12)

$$F_0 = \tilde{h}(0, \bar{\eta}, t_0). \quad (20)$$

Розглянемо такі дві одновимірні крайові задачі:

$$\partial u / \partial \bar{t} = K_2 \cdot \partial^2 u / \partial \bar{\eta}^2 + K_4 \cdot \partial u / \partial \bar{\eta}, \quad 0 < \bar{\xi}, \bar{\eta} < 1, \quad (21)$$

$$u(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}_p) = \tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}_p), \quad \partial u / \partial \bar{\eta}(\bar{\xi}, 0, \bar{t}) = 0, \quad \partial u / \partial \bar{\eta}(\bar{\xi}, 1, \bar{t}) = 0, \quad (22)$$

$$\partial w / \partial \bar{t} = K_1 \cdot \partial^2 w / \partial \bar{\xi}^2 + K_3 \cdot \partial w / \partial \bar{\xi}, \quad 0 < \bar{\xi}, \bar{\eta} < 1, \quad (23)$$

$$w(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}_p) = u(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}), \quad w(0, \bar{\eta}, \bar{t}) = F_0, \quad w(1, \bar{\eta}, \bar{t}) = -x_2(1, \bar{\eta}, \bar{t}). \quad (24)$$

В рівняннях (21)—(24) $\bar{t}_p \leq \bar{t} \leq \bar{t}_{p+1}$, а в рівняннях (22), (24) $0 \leq \bar{\xi}, \bar{\eta} \leq 1$. Доведемо таку теорему.

Теорема 2. Нехай існують такі функції $u(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$ та $w(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$, та існує таке $\delta > 0$, що ці функції є двічі неперервно-диференційованими на множині $\Omega_\delta = (-\delta, 1 + \delta) \times (-\delta, 1 + \delta) \times (\bar{t}_p - \delta, \bar{t}_p + \tau + \delta)$ і вони є розв'язками задач (21), (22) та (23), (24) відповідно. Нехай існує така функція $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$, яка є двічі неперервно-диференційованою на тій

самій множині і задовольняє (14), (19). Нехай, крім того, функції $K_i(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$, де $i = \overline{1, 4}$, є неперервними на Ω_δ . Тоді можна стверджувати, що виконується таке:

$$w(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}) = \tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}) + O(\tau^2), \quad (25)$$

$$w(0, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}) = \tilde{h}(0, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}), w(1, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}) = \tilde{h}(1, \bar{\eta}, \bar{t}_{p+1}), \quad (26)$$

при $0 < \bar{\xi}, \bar{\eta} < 1$ та

$$\partial w(\bar{\xi}, 0, \bar{t}_{p+1}) / \partial \bar{\eta} = O(\tau^2), \partial w(\bar{\xi}, 1, \bar{t}_{p+1}) / \partial \bar{\eta} = O(\tau^2), \quad (27)$$

при $0 \leq \bar{\xi} \leq 1$. Тут $\tau = \bar{t}_{p+1} - \bar{t}_p$.

Доведення. Рівність (26) безпосередньо слідує з (19) та (24). Оскільки при кожних фіксованих $\bar{\xi}_0 \in (-\delta, 1 + \delta)$ та $\bar{\eta}_0 \in (-\delta, 1 + \delta)$ функція $u(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t})$ є двічі неперервно-диференційованою функцією змінної \bar{t} на інтервалі $(\bar{t}_p - \delta, \bar{t}_p + \tau + \delta)$, то для будь-якої точки цього інтервалу існує окіл в якому виконується формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа. Крім того, оскільки $\partial u / \partial \bar{\eta}, \partial^2 u / \partial \bar{\eta}^2, K_2, K_4$ є неперервними на Ω_δ , то на основі (21), (22) можна стверджувати, що

$$\begin{aligned} u(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p + \tau) &= \tilde{h}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p) + \\ &+ \tau \left(K_2 \cdot \partial^2 \tilde{h} / \partial \bar{\eta}^2 + K_4 \cdot \partial \tilde{h} / \partial \bar{\eta} \right) \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p)} + \\ &+ \partial^2 u / \partial \bar{t}^2 \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0))} \tau^2 / 2, \bar{t}_p < \bar{t}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0) < \bar{t}_p + \tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Зауважимо, що оскільки функції $u(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$ та $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$ є двічі неперервно-диференційованими на Ω_δ , то при фіксованому τ на основі (28) та теореми про суперпозицію неперервних функцій можна стверджувати, що існує таке δ_1 , що $\delta > \delta_1 > 0$ і що функція

$$\begin{aligned} f(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}) &= \left(K_2 \cdot \partial^2 \tilde{h} / \partial \bar{\eta}^2 + K_4 \cdot \partial \tilde{h} / \partial \bar{\eta} \right) \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t} - \tau)} + \\ &+ \partial^2 u / \partial \bar{t}^2 \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}))} \tau / 2, \end{aligned} \quad (29)$$

є двічі неперервно-диференційованою на множині

$$\Omega'_1 = (-\delta_1, 1 + \delta_1) \times (-\delta_1, 1 + \delta_1) \times (\bar{t}_p + \tau - \delta_1, \bar{t}_p + \tau + \delta_1).$$

Аналогічно для функції $w(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t})$ можна написати, що

$$w(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p + \tau) = u(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p + \tau) + \tau \left(K_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}^2} + K_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} \right)_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p + \tau)} + \quad (30)$$

$$+ \partial^2 w / \partial \bar{t}^2 \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0))} \tau^2 / 2, \bar{t}_p < \bar{t}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0) < \bar{t}_p + \tau,$$

З (14), (28) та (30) слідує, що

$$w(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p + \tau) = \tilde{h}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p) + \tau \partial \tilde{h} / \partial \bar{t} \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p)} + \quad (31)$$

$$+ \tau^2 \left(K_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\xi}^2} + K_3 \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} \right)_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}_p)} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} \Big|_{(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{t}(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0))} \frac{\tau^2}{2}.$$

Оскільки функції $w(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$, $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$, $\partial \tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) / \partial \bar{t}$ є неперервно-диференційованими на Ω_δ , то на основі (31) можна стверджувати, що існує таке δ_2 , що $\delta_1 > \delta_2 > 0$ і функція

$$g(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \left(K_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\xi}^2} + K_3 \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} \right)_{(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t} - \tau)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} \Big|_{(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t}))}, \quad (32)$$

є обмеженою разом зі всіма своїми похідними першого порядку на $\bar{\Omega}'_2 = [-\delta_2, 1 + \delta_2] \times [-\delta_2, 1 + \delta_2] \times [\bar{t}_p + \tau - \delta_2, \bar{t}_p + \tau + \delta_2]$. Тому з рівняння (31) слідує рівняння (25). Продиференціювавши праву і ліву частини рівняння (31) по $\bar{\eta}$, аналогічно отримуємо (27). Теорему доведено.

Вектор зовнішньої нормалі \bar{n}_4 до кривої Γ_4 , який присутній у співвідношенні (10), та $\partial x_1 / \partial \bar{t}$, $\partial x_2 / \partial \bar{t}$, які входять в (17), (18), обчислюються так само, як в роботі [7, с. 273—274].

Якщо ввести позначення $x_1 = r$, $x_2 = x_3$, де r , x_3 — циліндричні координати, а вісь x_3 направлена вертикально вниз, то для того, щоб отримати алгоритм для осесиметричної задачі, необхідно рівняння (17), (18) замінити на

$$K_3 = \frac{M(\bar{t})(k/a/x_1 \cdot \partial x_2 / \partial \bar{\eta} + \partial x_2 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_1 / \partial \bar{t} - \partial x_1 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_2 / \partial \bar{t})}{(\partial x_1 / \partial \bar{\eta})^2 + (\partial x_2 / \partial \bar{\eta})^2}, \quad (33)$$

$$K_4 = \frac{k/a/x_1 \cdot \partial x_1 / \partial \bar{\eta} + \partial x_1 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_1 / \partial \bar{t} + \partial x_2 / \partial \bar{\eta} \cdot \partial x_2 / \partial \bar{t}}{(\partial x_1 / \partial \bar{\eta})^2 + (\partial x_2 / \partial \bar{\eta})^2}, \quad (34)$$

а все інше залишити без змін.

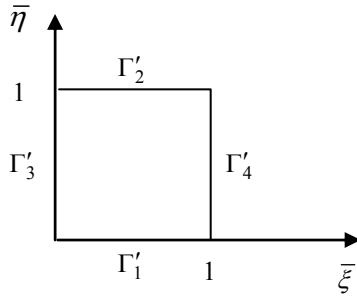


Рис. 2. Квадрат Q , в який відображається криволінійний чотирикутник при переході до змінних $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$.

Для розв'язання пари крайових задач (21)—(24) використовуємо різницеву схему, яка представлена в роботі [7, с. 275—282].

Результати числових експериментів. Чисельний розрахунок кінцевого положення вільної поверхні при нагнітанні ньютонівської рідини в ґрунтовий масив для часу нагнітання 1 година виконується при наступних вхідних даних [7, с. 282]: $m = 0,47$, $p_0 = 7 \times 10^5$ Па, $\rho_0 = 1200$ кг/м³, $k = 4,0 \cdot 10^{-5}$ м/сек, $h_0 = 1,74$ м, $r_0 = 0,015$ м. У випадку першої задачі вважаємо, що дно траншеї є пів-циліндром, а у випадку другої задачі півсферою з радіусами r_0 . Як зазначено в роботі [7, с. 283] значення параметра a для реальних ґрунтів змінюється в межах від $2,4 \times 10^{-6}$ м⁻¹ до $2,4 \times 10^{-5}$ м⁻¹, тому в даній роботі розрахунки проводяться при $a = 2,4 \times 10^{-6}$ м⁻¹ та $a = 2,4 \times 10^{-5}$ м⁻¹. Решту вхідних даних потрібно підбирати чисельно. Так абсолютна похибка положення вузла конформної сітки має таке значення $\varepsilon_x = 1,0 \times 10^{-5}$ м. Щоб оцінити невизначеність у кінцевому положенні фронту нагнітання пов'язану з кінцевістю величини ε_x , ми обраховуємо його також при $\varepsilon_x = 1,0 \times 10^{-6}$ м. Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_1) між радіус-векторами точок, які лежать на відповідних кінцевих положеннях фронтів нагнітання та мають спільне значення координати x_2 . Для отримання початкової форми вільної межі кожену точку (x_1, x_2) границі ін'єктора зміщуємо у випадку $0 \leq x_2 \leq h_0$ в горизонтальному напрямку, а у випадку $h_0 \leq x_2 \leq h_0 + r_0$ в радіальному напрямку з центром в точці $(0, h_0)$ на відстань $\sqrt{2(p_0 + \rho_0 g x_2) / \rho_0} \tau_0$, де g — прискорення вільного падіння, τ_0 — ефективний час рівний 0,004 сек.

Щоб оцінити невизначеність у кінцевому положенні фронту нагнітання пов'язану з кінцевістю величини τ_0 , ми обраховуємо його також при $\tau_0 = 0,008$ сек. Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_2) між радіус-векторами точок, які лежать на відповідних кінцевих положеннях фронтів нагнітання та мають спільне значення координати x_2 . Вважаючи скелет ґрунту абсолютно твердим функцію напору в початковий момент часу обчислюємо методом представленим в роботі [6, с. 209—214]. Щоб оцінити невизначеність у кінцевому положенні фронту нагнітання пов'язану з невизначеністю в початковому значенні функції напору, обчислюємо перше також коли останнє задається наступним чином. Значення $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0)$ на сторонах Γ'_3 та Γ'_4 квадрата Q задаються двома останніми умовами (19). $\tilde{h}(\bar{\xi}, 0, 0)$ та $\tilde{h}(\bar{\xi}, 1, 0)$ є лінійними функціями змінної $\bar{\xi}$, які узгоджені в крайніх точках відповідно Γ'_1 та Γ'_2 із значеннями $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0)$ на Γ'_3 та Γ'_4 . Значення $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0)$ всередині квадрата Q обчислюються так

$$\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0) = (\tilde{h}(0, \bar{\eta}, 0) + \tilde{h}(1, \bar{\eta}, 0) + \tilde{h}(\bar{\xi}, 0, 0) + \tilde{h}(\bar{\xi}, 1, 0)) / 4.$$

Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_3) між радіус-векторами точок, які лежать на відповідних кінцевих положеннях фронтів нагнітання та мають спільне значення координати x_2 . Фронт нагнітання в любий момент часу інтерполюється тим локальним сплайном [10, с. 38], значення якого в околі точки A (рис. 1) визначається більшою кількістю вузлових точок (сплайн № 1). Всі сплайни в даній роботі та їхні перші дві похідні є неперервними. Сплайн № 1 будується по точкам відповідної конформної сітки, які знаходяться на Γ_4 у відповідний момент часу. Щоб оцінити невизначеність у мірі, яку вибрано для порівняння кінцевих положень фронтів нагнітання, пов'язану з невизначеністю у виборі сплайна, обраховуються вузлові точки кінцевого положення фронту нагнітання. Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_4) між радіус-векторами точок, які лежать на двох різних локальних сплайнах [10, с. 34—38], побудованих по вузловим точкам та мають спільне значення координати x_2 . Обрахунки виконуємо на сітці №1, яка створюється таким чином. Квадрат Q у випадку плоско-вертикальної задачі покривається рівномірною сіткою 9×9 , при цьому крок по часу є таким $\tau = 0,2$ сек, а у випадку осесиметричної задачі він покривається рівномірною сіткою 11×11 і крок по

часу є таким $\tau = 0,05$ сек. Щоб оцінити невизначеність у кінцевому положенні фронту нагнітання пов'язану з невизначеністю у величині τ , обчислюємо його також на сітці № 2, яка відрізняється від сітки № 1 удвічі більшим значенням τ . Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_5) між радіус-векторами точок, які лежать на відповідних кінцевих положеннях фронтів нагнітання та мають спільне значення координати x_2 . Щоб оцінити похибку апроксимації, розрахунки проводяться на сітці № 3, яка відрізняється від сітки № 1 тим, що квадрат Q покривається рівномірною сіткою 7×7 в обох випадках. Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_6) між радіус-векторами точок, які лежать на кінцевих положеннях фронтів нагнітання одне з яких отримане на сітці № 1, а інше на сітці № 3 та мають спільне значення координати x_2 . До цих пір і надалі у всіх випадках якщо не зазначено інше обрахунки виконуються на сітці № 1 при $\varepsilon_x = 1,0 \times 10^{-5}$ м, $\tau_0 = 0,004$ сек, при цьому фронт нагнітання в любий момент часу інтерполюється сплайном № 1, а початкове значення функції напору обчислюється для абсолютно твердого скелету ґрунту. Сумарна похибка розрахунку (ε) оцінюється як корінь суми квадратів похибок з різних джерел [11, с. 102]. Значення похибок для різних пружних властивостей ґрунту та різних постановок наведені в таблиці 1. Порівнюючи величини в цих таблицях, можна зробити висновок, що для обох значень коефіцієнта a та для обох задач виконується $\varepsilon_6 \approx \varepsilon$. Це означає, що величини ε_x , τ_0 та τ є достатньо малими, підтверджує коректність вибору початкового значення функції напору і підтверджує те, що вибір сплайна не впливає на оцінку похибки розрахунку кінцевого положення фронту нагнітання.

Таблиця 1

Результати числових експериментів

	$a, \times 10^{-6}$ м ⁻¹	$\varepsilon_1, \times 10^{-3}$ %	$\varepsilon_2, \%$	$\varepsilon_3, \times 10^{-3}$ %	$\varepsilon_4, \times 10^{-3}$ %	$\varepsilon_5, \%$	$\varepsilon_6, \%$	$\varepsilon, \%$
1	24	6,9	0,12	7,0	7,9	0,91	5,0	5,0
	2,4	6,7	0,13	7,3	7,0	0,82	5,2	5,3
2	24	5,9	0,17	6,1	13	1,15	6,9	7,0
	2,4	5,8	0,18	6,6	7,8	1,25	7,2	7,3

На рис. 3 представлена еволюція фронту нагнітання для випадку осесиметричної задачі при $a = 2,4 \times 10^{-5}$ м⁻¹. Положення рухомої межі представлено на рисунку через кожні 10 хвилин. Вздовж осей відкладена

відстань від початку координат в метрах. На основі цього рисунку можна перевірити виконання умови (7), оцінивши $V \cdot t$ як відстань між початковим та кінцевими положеннями точки A (рис. 1) $Vt \approx 1,524$ м. Якщо порівнювати нагнітання цементного розчину в насичений водою ґрунт з нагнітанням його в сухий ґрунт при інших рівних умовах, то в останньому випадку відношення кількості частинок цементу, які знаходяться одночасно в зоні переходу в контакт з поверхнею скелету ґрунту, до повної кількості частинок цементу, які знаходяться в зоні переходу, більшим ніж в першому випадку, тому при моделюванні сухого ґрунту в останньому випадку ґрунтом, насиченим фіктивною негадомою рідиною нульової в'язкості, значення меншим ніж відповідне значення у першому випадку [8, с. 196—201]. Оскільки $a_L \approx 2.0 \times 10^{-2}$ м [3, с. 5], то умова (7) виконується. Для зменшення похибки апроксимації розрахунки проводимо згідно модифікованої моделі. На основі рис. 3 можна зробити висновок, що досить довгий час довжини сторін Γ_1 та Γ_2 криволінійного чотирикутника № 1 є суттєво меншими ніж довжини сторін Γ_3 та Γ_4 . Тому, виконуючи розрахунки модифікованим методом у випадку другої задачі, замість сіток 1—3 використовуємо сітки 4—6. У випадках сіток № 4 та № 6 крок по часу є таким $\tau = 0,05$ сек, а квадрат Q покривається рівномірними сітками 9×13 та 5×9 відповідно. Сітка № 5 відрізняється від сітки № 4 удвічі більшим значенням τ . У випадку ж першої задачі розрахунки модифікованим методом виконуються на сітках 1—3 тому, що в цьому випадку фронт рухається набагато швидше. В якості $\tilde{\Gamma}_3$ (див. рівняння (12)) вибираємо прообраз вертикальної середньої лінії квадрата (рис. 2), який є образом криволінійного чотирикутника № 1 в момент часу t_0 . Цю криву інтерполюємо сплайном № 1. При розрахунках другим методом значення параметру t_0 , який входить в рівняння (12) змінюємо від $t_0 = 700$ сек до $t_0 = 2900$ сек з кроком $\Delta t_0 = 100$ сек у всіх випадках.

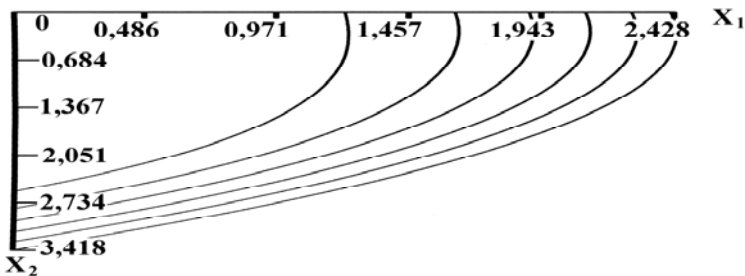


Рис. 3. Еволюція фронту нагнітання.

При обчисленні F_0 згідно (20), та при обчисленні $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t_0)$ використовуємо такі формули двовимірної інтерполяції по восьми найближчим точкам, які у випадку коли всі вузли інтерполювання розміщені на одній прямій переходять в інтерполяційний многочлен Лагранжа [12, с. 194]. На рис. 4 ε_6 — похибка апроксимації модифікованого методу, ω — різниця між кінцевими положеннями фронтів нагнітання отриманими відповідно першим методом та модифікованим. Лінії 1 та 2 представляють графіки функцій $\omega(t_0)$, а лінії 3 та 4 представляють графіки функцій $\varepsilon_6(t_0)$ для випадків плоско-вертикальної та осесиметричної задач відповідно. Рис. 4а відповідає розрахункам при $a = 2,4 \times 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, а рис. 4б — розрахункам при $a = 2,4 \times 10^{-6} \text{ м}^{-1}$. На основі рис. 4 для кожного випадку вибираємо значення $t_0 = \tilde{t}_0$ при якому значення ω різко зменшується, або хоча б, починаючи з якого, ω стає меншим за ε , де ε — похибка чисельного розрахунку першим методом. Так для випадку першої задачі при $a = 2,4 \times 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ $\tilde{t}_0 = 1300$ сек, а при $a = 2,4 \times 10^{-6} \text{ м}^{-1}$ $\tilde{t}_0 = 1800$ сек. При цьому відповідні функції $\varepsilon_6(t_0)$ на відповідних відрізках $[\tilde{t}_0, 2900 \text{ сек}]$ є приблизно постійними, тому в якості оптимального вибираємо в першому випадку $t_0 = 2400$ сек, а в другому $t_0 = 2800$ сек, оскільки при цих значеннях відповідні ω є мінімальними. У випадку другої задачі при $a = 2,4 \times 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ $\tilde{t}_0 = 900$ сек, а при $a = 2,4 \times 10^{-6} \text{ м}^{-1}$ $\tilde{t}_0 = 1300$ сек. Тут в якості оптимальних відповідно вибираємо $t_0 = 2200$ сек та $t_0 = 1900$ сек, оскільки при них відповідні функції $\varepsilon_6(t_0)$ на відповідних відрізках $[\tilde{t}_0, 2900 \text{ сек}]$ приймають мінімальні значення. Для оцінки похибки пов'язаної з невизначеністю величини t_0 ми порівнюємо таким чином вибрані кінцеві положення фронтів нагнітання з кінцевими положеннями отриманими при значенні t_0 у всіх випадках крім останнього на Δt_0 більшим, а в останньому на $2 \cdot \Delta t_0$ меншим тому, що в цьому випадку відповідна функція $\varepsilon_6(t_0)$ при такому значенні параметру має локальний мінімум. Після чого обраховуємо максимальну відносну величину відхилення (ε_7) між радіус-векторами точок, які лежать на відповідних кінцевих положеннях фронтів нагнітання та мають спільне значення координати x_2 . Значення величин ε_1 та ε_3 , які відповідають розрахункам модифікованим методом, є значно мен-

шими за решту невизначеностей у всіх випадках і тому в таблиці 2 ми наводимо тільки значення ε_i , де $i = 2, 4, 5, 6, 7$ та значення сумарної похибки ε для обох задач та обох значень коефіцієнта a . Порівнюючи величини в таблиці 2, можна зробити висновок, що для обох значень коефіцієнта a та для обох задач виконується $\varepsilon_6 \gg \varepsilon_i$, де $i = 1, 2, 3, 4, 7$. Це означає, що величини ε_x , τ_0 , Δt_0 є достатньо малими, що кінцева форма закріпленої області не є чутливою до початкового значення функції напору і що вибір сплайна не впливає на оцінку похибки розрахунку кінцевого положення фронту нагнітання. Той факт, що у всіх випадках модифікація методу приводить до зменшення сумарної похибки, свідчить про коректність всіх модельних припущень.

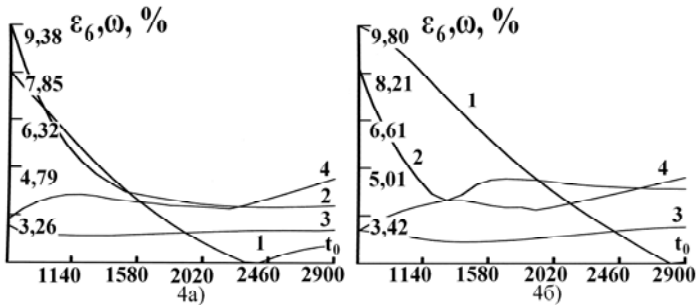


Рис. 4. Залежність величин ω та ε_6 від значення параметру t_0 при різних пружних властивостях ґрунту.

Таблиця 2

Результати числових експериментів на основі модифікованої моделі

	$a, \times 10^{-6}$	$\varepsilon_2, \%$	$\varepsilon_4, \%$	$\varepsilon_5, \%$	$\varepsilon_6, \%$	$\varepsilon_7, \%$	$\varepsilon, \%$
1	24	0,139	0,09	2,33	2,77	0,20	3,63
	2,4	0,141	0,06	2,05	3,02	0,26	3,66
2	24	0,226	0,135	2,30	3,47	0,18	4,18
	2,4	0,212	0,053	2,75	3,60	0,43	4,56

Висновок. Запропонована модель поширення в'язучого розчину відноситься до класу задач з вільними рухомими межами. Вона дозволяє з прийнятною точністю отримати кінцеву форму закріпленої області у випадках плоско-вертикальної та осесиметричної постановок.

Аналогічні розрахунки будуть виконуватись на густій сітці і порівнюватись з результатами даної роботи та з результатами польових досліджень. Отримана в даній роботі еволюція фронту нагнітання буде використовуватись для аналізу числових розв'язків моделі класу задач поширень забруднень.

Список використаних джерел:

1. Honma S. A mathematical model for the analysis on the injection and distribution of chemical grout in soils / S. A. Honma // Proceedings of the faculty of Engineering of Tokai University, 1986. — Vol. 12. — P. 13—79.
2. Bouchelaghem F. Mathematical and numerical filtration-advection-dispersion model of miscible grout propagation in saturated porous media / F. Bouchelaghem, L. Vulliet // Int. J. for Num. and analytical methods in Geomech, 2001. — № 12. — P. 1195—1227.
3. Chupin O. Numerical modeling of cement grout injection in saturated porous media / O. Chupin, N. Saiyouri, P. Y. Hicher // Proceedings 16th ASCE Engineering Mechanics Conference. University of Washington, Seattle.
4. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений / Н. Н. Веригин // Изв. Акад. Наук СССР отд. техн. наук, 1952. — № 5. — С. 674—687.
5. Власюк А. П. Чисельне розв'язання однієї задачі укріплення основи гідротехнічного об'єкту / А. П. Власюк, М. Б. Демчук // Вісник Київського університету, Серія фізико-математичні науки, 2005. — Вип. 1. — С. 158—166.
6. Власюк А. П. Укріплення основи гідротехнічного (енергетичного) об'єкта в осесиметричному випадку / А. П. Власюк, М. Б. Демчук // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки, 2005. — Вип. 3. — С. 207—216.
7. Власюк А. П. Застосування числових конформних відображень до розв'язання крайової задачі з рухомою межею для рівняння параболічного типу в криволінійному чотирикутнику / А. П. Власюк, М. Б. Демчук, М. М. Обезюк // Вісник НУВГП. Збірник наукових праць — 2007. — Вип. 4 (40). — С. 268—286.
8. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat // Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1990. — 553 p.
9. Власюк А. П. Чисельне розв'язування одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. — К., 1994. — 23 с. — (Препр. / НАН України, Ін-т математики; 94.36).
10. Рябенкий В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенкий. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 294 с.
11. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. — М. : «Мир», 1985. — 272 с.
12. Березин И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Государственное издательство физ.-мат. лит., 1959. — 464 с.

The problem of soil tract reinforcing by means of grout injection in it is discussed. Mathematical models and solution algorithms are constructed for the cases of vertical plane and axis symmetry set ups. The solutions are obtained by the finite difference method with the usage of numerical conformal transformations.

Key words: *grouting, finite difference method, conformal mapping, porous media, moving boundary.*

Отримано 6.10.2010