2. Модернізація України – наш стратегічний вибір: Щорічне Послання Президента України до Верховної Ради України. – К., 2011. – 416 с. - [Електроний ресурс]. - Режим доступу: http://www.president.gov.ua/docs/Poslannya_sborka.pdf.
3. Пащенко Ю.Є. Розвиток та розміщення транспортно-дорожнього комплексу України/ Ю.Є. Пащенко.– К.: Науковий світ, 2003. – 467 с.
4. Новікова А.М. Україна в системі міжнародних транспортних коридорів/ А.М. Новікова. – К.: НІПБМ, 2003. – 494 с.
5. Блудова Т.В. Транзитний потенціал України: форму-вання та розвиток/ Т.В. Блудова. – К.:НІПМБ, 2006. – 274 с.
6. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику./ В.В. Вітлінський. - К.: Деміург, 1996. – 212 с.
7. Кудрицька Н.В. Транспортно-дорожній комплекс України: сучасний стан, проблеми та шляхи розвитку / Н.В.Кудрицька. – К.: НТУ, 2010. – 338 с.
8. Шарп У. Инвестиции; [пер. с англ.] /Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. – М.: ИНФРА-М., 2003. – 1028 с.
9. Методическое пособие по расчету тарифов на автомобильном транспорте. – К.: Укравтотранс, Госавтотранснииproект, 1992. – 191 с.
10. Методологическая основа для определения общих критериев, касающихся идентификации узких мест, недостающих звеньев и качества услуг на сетях инфраструктуры. ЕЭК ООН, Нью-Йорк и Женева, 2009. – 37 с.
11. Кудрицька Н.В. Прогнозування основних показників діяльності транспортно-дорожнього комплексу України на довгострокову перспективу / Н.В.Кудрицька. – К.: РВПС України НАН України, 2008. – 48 с.

УДК 519.8:330
О.А. Шумейко, О.І. Цуканов

Динамічна модель оптимального розподілу інвестицій в умовах комплексного інвестування

Запропонована технологія реалізації моделі оптимального розподілу інвестиційних коштів між *декількома проектами, які реалізуються в рамках програми комплексного інвестування. Пропонується алгоритм задачі реалізований засобами системи комп'ютерної математики Mathcad який дозволяє безпосередньо реалізувати цю модель, з використанням динамічного програмування.*

***Ключові слова**: інвестиції, розподіл, динамічне програмування, модель.*

In the article offers technology implementation model of optimal allocation of investment funds among several projects being realized as an integrated investment. The algorithm is implemented by means of the problem of computer mathematics Mathcad allows you to implement this model directly, using dynamic programming.

***Key words**: investment, distribution, dynamic programming model.*

Вступ. Управління інвестиційними проектами розвитку підприємств має на меті розробку стратегічних планів їх впровадження. Стратегічні плани містять параметри діяльності об'єктів, які характеризують їх віддалене майбутнє. Оскільки всі економічні об'єкти функціонують і розвиваються не тільки у часі, а і в просторі, то вони є динамічними, отже, управління проектами розвитку підприємств може здійснюватись на основі динамічних моделей, для реалізації яких застосовуються методи динамічного програмування.

Актуальність. У статті розглядається задача оптимального розподілу інвестиційних коштів. Актуальність цієї задачі обумовлена станом сучасного інвестиційного процесу у транспортній галузі: дефіцит інвестиційних коштів а також гостра необхідність оновлення основних фондів вимагає інструментарію оптимізації інвестування.

Аналіз останніх досліджень. Алгоритм побудовано на основі класичних робіт Р. Беллмана [1-3].

Мета статті. Розробка алгоритму та чисельне розв'язання задачі оптимального розподілу інвестиційних коштів за допомогою динамічного програмування.

Основна частина. Динамічний процес поділяється на сукупність послідовних етапів (кроків). Плануючи багатокроковий процес, необхідно обирати управління на кожному кроці з урахуванням його майбутніх наслідків на тих кроках, які ще є попереду. Лише на останньому кроці можна прийняти рішення, яке дасть максимальний ефект. На базі відомої інформації про те, як закінчився попередній крок, для різних гіпотез щодо завершення передостаннього кроку вибирається управління на останньому. Таке управління називають умовно-оптимальним. Для всіх кроків його знаходять із припущення, що попередній крок закінчився згідно з однією із можливих гіпотез.

Коли всі умовно-оптимальні управління на всіх кроках відомі, то це означає, що визначено, як необхідно керувати на кожному кроці, яким би не був процес на початку. В такому разі можна знайти не умовно-оптимальне, а оптимальне управління.

У загальному вигляді задача динамічного програмування оптимального управління процесами або системами ставиться так. Нехай аналізується деякий керований процес, представлення якого допускає декомпозицію на послідовні стани (кроки), кількість яких n задана. Ефективність всього процесу F може бути представлена як сума ефективностей F_j $(j = 1,...,n)$ окремих кроків, тобто з кожним кроком (етапом) задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого керованого управління x_j $(j = 1,...,n)$, що визначає ефективність як даного етапу, так і всього процесу в цілому.

Розв'язування задачі динамічного програмування полягає в знаходженні такого управління процесом у цілому $X = (x_1,...,x_n)$, яке максимізує загальний прибуток:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} F_j.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається з сукупності оптимальних покрокових управлінь: $X^* = (x^*_1,...,x_n^*)$ і уможливлює досягнення максимальної ефективності.

Постановка задачі. Розглянемо постановку задачі оптимального управління проектами інвестицій у розвиток транспортного підприємства, для розв'язування якої застосовується метод динамічного програмування. Умови задачі передбачають розподіл капіталовкладень, які можуть бути інвестовані у проекти, для яких задаються суми витрат і прибутку за кожним проектом. Таким чином, задача має обмеження на використання заданих об'ємів капіталовкладень. Загальний алгоритм розв'язування задачі динамічного програмування складається із послідовності таких операцій:

1. Визначають показники станів досліджуваної системи і множину параметрів, що описують ці стани.

2. Поділяють процес на етапи, які відповідають певним його станам (періодам планування динамічного процесу, або окремим об'єктам системи) для підготовки рішень у керуванні процесом.

3. Формулюють перелік управлінь x_j $(j = 1,...,n)$ для

кожного етапу і відповідні обмеження до них.

4. Визначають ефект, який забезпечує управління x_j на j-му кроці, якщо перед тим система була у стані S, у вигляді функції ефективності $g_j(S, x_j)$.

5. Визначають, як змінюється стан S системи під впливом управління x_j на j-му кроці, тобто як здійснюється перехід до нового стану:

$$S^* = \phi_j(S, x_j).$$

6. Визначають рекурентну залежність задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект $F_j(S)$, починаючи з j-го кроку і до останнього, через вже відому функцію $F_{j+1}(S^*)$:

$$F_j(S) = \max_{x_i} \{g_j(S, x_i) + F_{j+1}(S^*, x_i)\},$$

де $g_j(S, x_i)$– ефективність j-го кроку за i-м варіантом капіталовкладень.

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на j-му кроці $x_j(S)$. При цьому у функції $F_{j+1}(S)$ необхідно замість S врахувати змінений стан системи, тобто $S^* = \phi_j(S, x_j)$.

7. Використовуючи умовну оптимізацію останнього n-го кроку, визначаємо множину станів S, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану. Умовний оптимальний ефект на j-му кроці обчислюють за формулою:

$$F_j(S) = \max_{x_j} \{g_j(S, x_j)\}.$$

Потім знаходять умовне оптимальне управління $x_j(S)$, в результаті реалізації якого цей максимум було досягнуто.

8. Проводять умовну оптимізацію (n-1)-го, (n-2)-го та інших кроків за рекурентними залежностями і визначають для кожного кроку умовне оптимальне управління: $x_j^*(S_{j-1})$.

9. Проводять безумовну оптимізацію управління у прямому напрямку від початкового стану S_0 до кінцевого S_n. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці x_1^* змінюють стан системи згідно з пунктом 5. Потім для цього нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і аналогічно повторюють ці дії до останнього етапу.

В результаті знаходять оптимальне покрокове управління $X^* = (x_1^*,...,x_n^*)$, що забезпечує максимальний ефект F^*.

Виклад основного матеріалу. Припустимо, що розглядається n проектів розвитку підприємства на деякий період, протягом якого слід використовувати суму коштів K, що повинна бути розподіленою між цими проектами. За умови оновлення рухомого складу і сервісного обслуговування підприємство може досягти певного приросту прибутку. Підприємство планує інвестиції у розмірі K ум. гр. од. Припустимо, що вкладення коштів будуть здійснюватись за чотирма варіантами в обсягах k_i (i = 1,…,m) ум. гр. од.

Необхідно визначити оптимальний план розподілу коштів між проектами для максимізації загального прибутку від усіх чотирьох проектів за умови, що розраховані можливі прирости прибутку для кожного із них.

Далі номери проектів та етапи розв’язання задачі, які відповідають розглядуваним проектам, будемо ідентифікувати індексом j $(j = 1,...,n)$, а управління, які відповідають певним об'ємам коштів, що розподіляються, індексом i $(i = 1,...,m)$. Сума вкладень k_i приносить підприємству за j-м проектом прибуток $g_j(k_i)$.

Позначимо через $F_n(k)$ максимальний прибуток, який може бути досягнутий наслідок виконання n кроків обчислень, тоді

$$F_n(k) = \max_{x_1,...,x_n} F(k,\, k_1,...,k_n),$$

де змінні k_j $(j = 1,...,n)$ задовольняють обмеженням $0 \le k_j \le k \quad (j = 1,...,n)$.

Кошти k_j , які потрібно виділити на j-й проект так, щоб отримати максимальний сумарний прибуток визначаються як

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} g_j(k_j), \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j = k.$$

Позначимо кількість коштів, що залишаються після j-го кроку (тобто кошти, які необхідно розподілити між рештою (n- j) проектами через k_j :

$$k_j = k - k_{j-1}, \quad j = 1,..,n.$$

Задача розв'язується поетапно. Етапами розв'язання задачі будуть послідовний вибір проектів вкладення коштів у набір проекти. Отже маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень вважатимемо, що $g_j(k_i)$ – прибуток j-го проекту за умови інвестування в нього коштів об'ємом k_i ум. гр. од..

Розв'яжемо цю задачу, починаючи пошук умовно-оптимального управління з останнього етапу. Етапами задачі вважатимемо послідовний сумісний розгляд чотирьох проектів, починаючи з четвертого, тобто спочатку розглядається четвертий проект, потім четвертий і третій і т.д. На кожному етапі для кожного проекту вибирається оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженням на загальний обсяг виділених коштів – К ум. гр. од.

Позначимо обсяг інвестицій, виділених на кроках $1-4,\ 2-4,\ 3-4,\ 4$, якими керується процес розподілу коштів, через $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$ а об'єм інвестицій і відповідно оптимальний об'єм інвестицій у j-й проект через $k_j\ \ (j=1,...,n)$ і $k_j^*\ \ (j=1,...,n)$.

Рекурентне співвідношення, що описує ефективність управління від 1-го до 4-го кроку кожного етапу управління має вигляд:

$$F_{n+1}^*(x_i,\ k_i)=0,$$

$$F_j^*(x_i,\ k_i)=\max_{k_i}\{\,D_j(k_i)+F_{j+1}^*(x_i-C_j(k_i))\},$$

$$C_j(k_i)\le x_i \quad (i=1,...,m;\ j=1,,...,n),$$

де $F_j^*(x_i,\ k_i)$ – сумарна ефективність інвестицій з j-го кроку до останнього, $F^*{}_{n+1}=0,$ оскільки $(n+1)$-го проекту не існує.

4-й етап. Задачу починаємо розв'язувати з визначення об'єму інвестицій у четвертий проект. Послідовно визначаємо доход від вкладення коштів у сумі $k_i\ \ (i=1,...,4)$ ум. гр. од.

Максимальна ефективність четвертого етапу визначається співвідношенням:

$$F_4(x_4,\,k_4) = \max_{0 \le k_4 \le x_4} \{D_4(k_4) + F_5(x_4 - C_4(k_4))\}.$$

3-й етап. На цьому етапі розподіляємо кошти k_i $(i = 1,...,4)$ між двома проектами і зіставляємо ефективності прийнятих рішень на попередньому і поточному етапах. При цьому користаємо формулою для загального випадку

$$F_3(x_3,\,k_3) = \max_{0 \le k_3 \le x_3} \{\, D_3(k_3) + F_4(x_3 - C_3(k_3))\}$$

за умов $C_4(k_3) \le x_3$, $k_3 = 0,\ x_1\ , x_2,\ x_3,\ x_4$.

Величина $D_3(k_3) -$ дохід, що дає третій проект, а величина $F_4(k - x) -$ ефективність, що дають інвестиції на попередньому етапі (вкладення коштів у четвертий проект).

2-й етап. Кошти розподіляються між трьома проектами. Знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що визначають дохід, який можна отримати від вкладення коштів одразу в перший та другий проект та дохід від вкладення коштів одночасно в три проекти. Використовуємо формулу:

$$F_2(x_2,\,k_2) = \max_{0 \le k_2 \le x_2} \{\, D_2(k_2) + F_3(x_2 - C_2(k_2))\}$$

за умов $C_2(k_2) \le x_2$, $k_2 = 0,\ x_1\ , x_2,\ x_3,\ x_4$.

1-й етап. Аналогічно продовжуємо процес розрахунків для 1-го етапу, розподіляючи кошти між чотирма проектами.

Використовуємо формулу:

$$F_1(x_1,\,k_1) = \max_{0 \le k_1 \le x_1} \{\, D_1(k_1) + F_2(x_1 - C_1(k1_2))\}$$

за умов $C_1(k_1) \le x_1$, $k_2 = 0,\ x_1\ , x_2,\ x_3,\ x_4$.

В результаті цих розрахунків одержуємо умовно-оптимальні управління від 1-го до 4-го етапу.

Тепер, згідно з методом динамічного програмування, виконуються розрахунки безумовної оптимізації, розглядаючи результати етапів у зворотному порядку від 4-г до 1-го.

Реалізація алгоритму в Mathcad. Згідно з технологією Mathcad, у якому робота алгоритму реалізується на числових даних, розглянемо приклад оптимізації проекту розподілу інвестицій.

Припустимо, що розглядається *n* варіантів інвестування на 4-х об'єктах. За умови оновлення рухомого складу і модернізації сервісного обслуговування підприємство може досягти певного приросту прибутку.

Протягом цього періоду вона має можливість вкладати кошти у розмірі *k* гр. одиниць. Вкладення коштів буде здійснюватись за чотирма варіантами проекту в обсягах k_i, $i = 1, 2, ..., m$ гр. од. Приріст прибутку від вкладених коштів за варіантами проекту представлені у табл.1.

Таблиця 1. Приріст прибутку за варіантами проекту

Кошти, гр. од. k_i	Варіант 1 $g_1(k_i)$	Варіант 2 $g_2(k_i)$	Варіант 3 $g_3(k_i)$	Варіант 4 $g_4(k_i)$
10	8	10	12	11
20	18	20	21	23
30	25	28	26	30
40	36	40	38	35
50	46	48	47	50

де $g_j(k_i)$ – прибуток проекту за *j*-м варіантом за умови інвестування в нього коштів об'ємом k_i гр. од.

Основою динамічного програмування є функціональне рівняння, яке рекурентно зв'язує значення цільових функцій $f_j(x)$ і $f_{j-1}(x)$ відповідно на *j*-му і *j*–1-му кроці. Це рівняння має вигляд:

$$f_1(x) = g_1 x),$$

$$f_j(x) = \max\left\{g_j(k_i) + f_{j-1}(x - k_i)\right\}, \quad i = 1,...,m; \quad j = 2,...,n,$$

де x – загальна сума виділених коштів, k_i – сума коштів, яка виділяється на *j*-му кроці.

Для представлення функціонального рівняння у векторно-матричному вигляді, що потрібно для запису алгоритму у Mathcad, перейдемо від функцій $g_j(x_i)$ до індексованих величин $g_{i,j}$, де $i = 1,...,m$ відповідає об'єму коштів k_i, $j = 1,...,n$ – номеру варіанту проекту. При цьому величина $\mathrm{f}_{\mathrm{i,j-1}}$ відповідає значенню функції $f_{j-1}(x - k_i)$.

Тепер рівняння буде представлене у векторно-матричному вигляді таким чином:

$$f_{i,1} = g_{i,1}, \quad i = 1,..., m;$$

$$f_{i,j} = \max_{0 \le k_i \le k} \left(g_{i,j} + f_{i,j-1}\right), \quad j = 2,..., 4.$$

Задача розв'язується поетапно. Етапами розв'язання задачі будуть послідовні вкладення коштів у сумісні варіанти проекту. Отже маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Алгоритм розв'язання задачі складається із чотирьох етапів.

1-й етап. Задачу починаємо розв'язувати із визначення кількості коштів у 1-й варіант проекту. Якщо маємо в розпорядження кошти k_i, $(i=1,...,m)$ гр. од., то їх ефективність відповідає прибутку $f_{i,1}=g_{i,1}$, що буде отриманий від інвестування в перший варіант проекту $-k_i$ гр. од. Максимальний прибуток (ефективність 1-го етапу) дорівнюватиме

$$f_1(k_i)=\max_{k_i}\left\{g_{i,1}\right\},\qquad i=1,...,m.$$

2-й етап. На цьому етапі розподіляємо кошти k_i $(i=1,...,m)$ між двома варіантами проекту і зіставляємо ефективності прийнятих рішень на попередньому і поточному етапах. Якщо позначити ефективності другого етапу через $f_{i,2}$ $i=1,...,m,$ то маємо рівняння:

$$f_{i,2}=\max_{k_i}\left\{g_{i,2}+f_{i,1}\right\},\quad i=1,...,m.$$

За цим рівнянням визначаємо оптимальні рішення на 2-му етапі.

3-й етап. Кошти k_i $(i=1,...,m)$ розподіляються між трьома варіантами проекту. Знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що визначають прибуток, який можна отримати від вкладення коштів одразу в перший та другий варіант проекту $(f_{i,2},\ i=1,...,m)$ та прибуток від вкладення коштів в третій варіант проекту. Використовуємо формулу

$$f_{i,3}=\max_{k_i}\left\{g_{i,3}+f_{i,2}\right\},\quad i=1,...,m.$$

4-й етап. Аналогічно продовжуємо процес розрахунків для 4-го етапу, розподіляючи кошти k_i $(i=1,...,m)$ між чотирма варіантами проекту.

В результаті цих кроків одержуємо умовно-оптимальні управління процесом розподілу інвестицій від

1-го до 4-го етапу. Згідно з методом динамічного програмування тепер потрібно розглянути процес безумовної оптимізації, розглядаючи результати етапів у зворотному порядку від 4-го до 1-го.

Для запису алгоритму у Mathcad опишемо процедуру визначення значень величин $f_{i,j}$. Розглянемо, наприклад, визначення $f_{i,j}$ на 2-му етапі для $k_3 = 30$. Належність $f_{i,j}$ до 2-го етапу позначатимемо як $f2_{i,j}$. Для визначення ефекту на цьому кроці етапу використовуємо стовпець $g_2(k_i)$ табл. 1. Усі варіанти значень $f2_{i,j}$ можна уявити у такому вигляді:

$f2_{i,j}$	$f2_{3,1}$	$f2_{3,2}$	$f2_{3,3}$	$f2_{3,4}$
$g_{i,j}$	$g_{3,2}$	$g_{2,2}$	$g_{1,2}$	0
$F1_i$	0	$F1_1$	$F1_2$	$F1_3$

Індекси i, j тут мають інший зміст. У величині $f2_{i,j}$ індекс i означає номер кроку, що відповідає k_3, тут $i = 3$; індекс j – порядковий номер величини $f2_{i,j}$ у рядку: $f2_{3,1}$, $f2_{3,2}$,... У величин $g_{i,j}$ індекс i відповідає величині k_i, індекс j – номеру етапу. Значення цільової функції на попередньому етапі позначаються як $F1_i$, де i відповідає величині k_i.

$$ORIGIN := 1 \qquad k := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} \qquad g := \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 11 \\ 18 & 20 & 21 & 23 \\ 25 & 28 & 26 & 30 \\ 36 & 40 & 38 & 35 \\ 46 & 48 & 47 & 50 \end{pmatrix}$$

Пошук умовно-оптимальних управлінь (прямий хід алгоритму):

1-й етап

$k^T = (10\ \ 20\ \ 30\ \ 40\ \ 50) \qquad i := 1..5$

$F1_i := g_{i,1} \quad F1^T = (8\ \ 18\ \ 25\ \ 36\ \ 46)$

2-й етап

$k_1 = 10$

$f2_{1,1} := g_{1,1} + 0 \qquad f2_{1,2} := 0 + g_{1,2} \qquad f2 = (8\ \ 10)$

$F2_1 := \max(f2) \qquad F2_1 = 10$

$k_2 = 20$

$f2_{2,1} := g_{2,2} + 0 \quad f2_{2,2} := g_{1,2} + F1_1 \qquad f2_{2,3} := F1_2 + 0$

$f2 := \mathrm{submatrix}(f2, 2, 2, 1, 3) \qquad f2 = (20\ \ 18\ \ 18)$

$F2_2 := \max(f2) \qquad F2_2 = 20$

$k_3 = 30$

$f2_{3,1} := g_{3,2} + 0 \qquad f2_{3,2} := g_{2,2} + F1_1 \qquad f2_{3,3} := g_{1,2} + F1_2 \qquad f2_{3,4} := 0 + F1_3$

$f2 := \mathrm{submatrix}(f2, 3, 3, 1, 4) \qquad f2 = (28\ \ 28\ \ 28\ \ 25)$

$F2_3 := \max(f2) \qquad F2_3 = 28$

$k_4 = 40$

$f2_{4,1} := g_{4,2} + 0 \quad f2_{4,2} := g_{3,2} + F1_1 \quad f2_{4,3} := g_{2,2} + F1_2$

$f2_{4,4} := g_{1,2} + F1_3 \quad f2_{4,5} := 0 + F1_4$

$f2 := \mathrm{submatrix}(f2, 4, 4, 1, 4) \quad f2 = (40 \;\; 36 \;\; 38 \;\; 35)$

$F2_4 := \max(f2) \qquad F2_4 = 40$

$k_5 = 50$

$f2_{5,1} := g_{5,2} + 0 \quad f2_{5,2} := g_{4,2} + F1_1 \quad f2_{5,3} := g_{3,2} + F1_2$

$f2_{5,4} := g_{2,2} + F1_3 \quad f2_{5,5} := g_{1,2} + F1_4$

$f2 := \mathrm{submatrix}(f2, 5, 5, 1, 5) \quad f2 = (48 \;\; 48 \;\; 46 \;\; 45 \;\; 46)$

$F2_5 := \max(f2) \qquad F2_5 = 48$

$F2^T = (10 \;\; 20 \;\; 28 \;\; 40 \;\; 48)$

3-й етап

$k_1 = 10 \quad f3_{1,1} := g_{1,3} + 0 \quad f3_{1,2} := F2_1 + 0 \qquad f3 = (12 \;\; 10)$

$f3 := \mathrm{submatrix}(f3, 1, 1, 1, 2) \quad f3 = (12 \;\; 10)$

$F3_1 := \max(f3) \qquad F3_1 = 12$

$k_2 = 20 \quad f3_{2,1} := g_{2,3} + 0 \quad f3_{2,2} := g_{1,3} + F2_1 \quad f3_{2,3} := F2_2$

$f3 := \mathrm{submatrix}(f3, 2, 2, 1, 3) \quad f3 = (21 \;\; 22 \;\; 20)$

$F3_2 := \max(f3) \qquad F3_2 = 22$

$k_3 = 30$ $f3_{3,1} := g_{3,3} + 0$ $f3_{3,2} := g_{2,3} + F2_1$ $f3_{3,3} := g_{1,3} + F2_2$

$f3_{3,4} := F2_3 + 0$

$f3 := \mathrm{submatrix}(f3, 3, 3, 1, 4)$ $f3 = (26\ \ 31\ \ 32\ \ 28)$

$F3_3 := \max(f3)$ $F3_3 = 32$

$k_4 = 40$ $f3_{4,1} := g_{4,3} + 0$ $f3_{4,2} := g_{3,3} + F2_1$ $f3_{4,3} := g_{2,3} + F2_2$
$f3_{4,4} := g_{1,2} + F2_3$ $f3_{4,5} := 0 + F2_4$

$f3 := \mathrm{submatrix}(f3, 4, 4, 1, 5)$ $f3 = (38\ \ 36\ \ 41\ \ 38\ \ 40)$

$k_5 = 50$ $f3_{5,1} := g_{5,3} + 0$ $f3_{5,2} := g_{4,3} + F2_1$ $f3_{5,3} := g_{3,3} + F2_2$
$f3_{5,4} := g_{2,3} + F2_3$ $f3_{5,5} := g_{1,3} + F2_4$ $f3_{5,6} := 0 + F2_5$

$f3 := \mathrm{submatrix}(f3, 5, 5, 1, 6)$ $f3 = (47\ \ 48\ \ 46\ \ 49\ \ 52\ \ 48)$

$F3_5 := \max(f3)$ $F3_5 = 52$

$F3^T = (12\ \ 22\ \ 32\ \ 41\ \ 52)$

4-й етап

$k_1 = 10$ $f4_{1,1} := g_{1,4} + 0$ $f4_{1,2} := F3_1 + 0$ $f4 = (11\ \ 12)$

$F4_1 := \max(f4)$ $F4_1 = 12$

$k_2 = 20$ $f4_{2,1} := g_{2,4} + 0$ $f4_{2,2} := g_{1,4} + F3_1$ $f4_{2,3} := 0 + F3_2$

$f4 := \mathrm{submatrix}(f4, 2, 2, 1, 3)$ $f4 = (23\ \ 23\ \ 22)$

$F4_2 := \max(f4)$ $F4_2 = 23$

$k_3 = 30$ $f4_{3,1} := g_{3,4} + 0$ $f4_{3,2} := g_{2,4} + F3_1$ $f4_{3,3} := g_{1,4} + F3_2$

$f4_{3,4} := 0 + F3_3$

$f4 := \mathrm{submatrix}(f4, 3, 3, 1, 4)$ $f4 = (30\ \ 35\ \ 33\ \ 32)$

$F4_3 := \max(f4)$ $F4_3 = 35$

$k_4 = 40 \quad f4_{4,1} := g_{4,4} + 0 \quad f4_{4,2} := g_{3,4} + F3_1 \quad f4_{4,3} := g_{2,4} + F3_2$

$f4_{4,4} := g_{1,4} + F3_3 \quad f4_{4,5} := 0 + F3_4$

$f4 := \text{submatrix}(f4, 4, 4, 1, 5) \quad f4 = (35 \;\; 42 \;\; 45 \;\; 43 \;\; 41)$

$F4_4 := \max(f4) \quad F4_4 = 45$

$k_5 = 50 \quad f4_{5,1} := g_{5,4} + 0 \quad f4_{5,2} := g_{4,4} + F3_1 \quad f4_{5,3} := g_{3,4} + F3_2$

$f4_{5,4} := g_{2,4} + F3_3 \quad f4_{5,5} := g_{1,4} + F3_4 \quad f4_{5,6} := 0 + F3_5$

$f4 := \text{submatrix}(f4, 5, 5, 1, 6) \quad f4 = (50 \;\; 47 \;\; 52 \;\; 55 \;\; 52 \;\; 52)$

$F4_5 := \max(f4) \quad F4_5 = 55$

$F4^T = (12 \;\; 23 \;\; 35 \;\; 45 \;\; 55)$

Умовно-оптимальні значення розподілу коштів за варіантами проекту

$$F1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 25 \\ 36 \\ 46 \end{pmatrix} \quad F2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \\ 40 \\ 48 \end{pmatrix} \quad F3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \\ 41 \\ 52 \end{pmatrix} \quad F4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 35 \\ 45 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Пошук безумовних оптимальних управлінь (зворотний хід алгоритму):

1. Отже оптимальний розв’язок на 4-му етапі розв’язання задачі дає максимальний прибуток у розмірі $F_{max} = 55$ гр. од.: $F_{max} := \max(F1, F2, F3, F4) \quad F_{max} = 55.$ Це значення одержується із відповідного виразу на 4-му кроці алгоритму $f4_{5,4} := g_{2,4} + F3_3 \quad f4_{5,4} = 55,$ що і дає $F4_5 = 55.$ Це означає, що за 4-м варіантом проекту за рахунок коштів $k_2 = 20$ гр. од. можна одержати $g_{2,4} = 23$ гр. од. прибутку. Залишок коштів складає 50 20=30 гр. од.

2. Продовжуючи пошук оптимального плану, із виразу $f4_{5,4} = g_{2,4} + F3_3$ маємо $F3_3 = 32$. Цьому значенню відповідає вираз $f3_{3,3} = g_{1,3} + F2_2$, який дає значення $f3_{3,3} = 32$. У вираз $f3_{3,3}$ входить величина $g_{1,3} = 12$, яка означає, що на 3-му кроці, тобто за 3-м варіантом проекту, одержується прибуток у сумі 12 гр. од. Сума витрачених коштів складає 10 гр. од., залишок – $30 - 10 = 20$ гр. од.

3. На цьому етапі маємо $F2_2 = 20$, що одержується із виразу $f2_{2,1} = g_{2,2} + 0$. Це означає, що на 2-му етапі, тобто за другим варіантом проекту, за рахунок 20 гр. од. коштів одержується прибуток у сумі $g_{2,2} = 20$ гр. од. Залишок коштів дорівнює 0. Таким чином, оптимальним розв'язком задачі буде:

$$k_1^* = 0, \;\; g_1^* = 0; \quad k_2^* = 20, \quad g_2 * = 20;$$

$$k_3^* = 10, \quad g_3 * = 12; \quad k_4^* = 20, \quad g_4 * = 23.$$

На цьому алгоритм розв'язання задачі оптимального розподілу ресурсів закінчується.

Висновки. Розглянуто задачу оптимального розподілу інвестицій за допомогою динамічного програмування. Запропоновано алгоритм розв'язання та розв'язана чисельна задача за допомогою Mathcad.

Література.

1. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. – 458 с.
3. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. – 118 с.