

УДК 532.528

МОДЕЛЮВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ І ПЛОСКИХ ВІЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ДЖЕРЕЛ ТА ДИПОЛІВ

І. Г. НЕСТЕРУК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 20.01.2003

Запропоновано методику розрахунку форми осесиметричних і плоских каверн в ідеальній нестисливій невагомій рідині, основану на потенціалах, що розташовані на осі симетрії джерел та диполів. Наведені аналітичні формули для струменевих функцій та результати розрахунків з різними числами кавітації. Отримані довгі каверни з гладким замиканням можуть використовуватись для істотного зменшення опору тертя тіл, які рухаються у воді з великими швидкостями.

Предложена методика расчета формы осесимметричных и плоских каверн в идеальной несжимаемой невесомой жидкости, основанная на потенциалах, расположенных на оси симметрии источников и диполей. Приведены аналитические формулы для функций тока и результаты расчетов при различных числах кавитации. Полученные длинные каверны с гладким замыканием могут использоваться для существенного уменьшения сопротивления трения тел, движущихся в воде с большими скоростями.

Methods of calculating of axisymmetric and plane cavities in ideal incompressible fluid without gravity, based on the potentials of sources and dipoles located on the axis of symmetry, are proposed. Analytic formulae for streamline functions and calculations results for different cavity numbers are presented. The obtained long cavities with smooth re-attachment can be used for a considerable skin-friction drag reduction of the bodies moving in the water at high velocities.

ВСТУП

Рух у воді з великими швидкостями часто пов'язаний з виникненням каверн – порожнин заповнених газом та парою. У випадку так званого суперкавітаційного режиму вільна поверхня, що розділяє рідку і газову фази, може бути майже стаціонарною, а тиск на ній через велику різницю в густинах води і газу можна вважати сталим. Якщо обмежитись рухом твердого тіла з фіксованою швидкістю U_∞ в однорідній рідині при достатньо великих числах Рейнольдса та малих числах Маха, то потік поза вузьким прилеглим шаром (область D) можна вважати нев'язким, нестисливим та безвихровим. Крім того, при великих числах Фруда рідину можна вважати також невагомою.

Сформульовані обмеження дозволяють звести проблему знаходження невідомої форми осесиметричної вільної поверхні Σ до розв'язку наступної оберненої задачі для потенціалу течії $\phi(x, r)$ (див., наприклад, [1, 2]):

$$D- \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma + \Sigma_1 - \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = R'(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\infty - \quad \text{grad}(\phi) = (1, 0), \quad (3)$$

$$\Sigma - \quad \sigma = \frac{2(p_\infty - p_k)}{\rho U_\infty^2} = \text{grad}^2(\phi) - 1. \quad (4)$$

Тут $R(x)$ – радіус твердого тіла та вільної поверхні; Σ_1 – тверда поверхня, що складається з двох частин: кавітатора та замикача; p_∞, p_k – тиски на нескінченності та на вільній поверхні; σ – число кавітації; ρ – густина рідини.

До даного часу відомі лише точні розв'язки плоского варіанту задачі (1)-(4), докладно описані в монографії [3]. Осесиметрична задача досліджувалась чисельно (наприклад, [1]) та наближено з використанням напівемпіричних методів [4] та теорії тонкого тіла, справедливих лише для видовжених у напрямку руху каверн (див. огляд в [2]).

В роботах [5, 6] були запропоновані точні розв'язки осесиметричного та плоского рівнянь Лапласа (1), що є суперпозицією потенціалів джерел та стоків, розташованих всередині поверхні $\Sigma + \Sigma_1$. Ця методика дозволяє автоматично задовольнити рівняння (1) та умову на нескінченності (3). Якщо інтенсивність джерел $q(x)$ визначити з використанням лінійної теорії

$$q(x) = \pi \frac{dR^2}{dx} \quad (5)$$

в осесиметричному випадку [7] та

$$q(x) = 2 \frac{dY}{dx} \quad (6)$$

в плоскому [8] (тут $Y(x)$ – координата верхньої поверхні профіля, симетричного відносно осі x), то реальна форма твердої поверхні (точний розв'язок) може бути отримана з рівнянь

$$\psi(x, R(x)) = 0, \quad \psi(x, Y(x)) = 0. \quad (7)$$

Тут $\psi(x, r)$, $\psi(x, y)$ – осесиметрична та плоска струменеві функції.

Для простих залежностей $q(x)$ можна отримати аналітичні формули для струменевих функцій (див. [5, 6]), тому розв'язання рівнянь (7) не викликає проблем. Досвід розрахунків, проведених, зокрема, в [2, 5, 6], свідчить, що для тонких тіл апріорні значення $R(x), Y(x)$, що використовуються в рівняннях (5), (6), мало відрізняються від точних розв'язків рівнянь (7). Розбіжності, звичайно, збільшуються при зростанні параметра тонкості ε – відношення максимального радіуса осесиметричного тіла або максимальної товщини профіля до довжини.

Запропонована в [5, 6] методика дозволяє розв'язувати деякі обернені задачі. Зокрема, її було використано для розрахунку форми осесиметричних і плоских тіл з від'ємними значеннями градієнта тиску на поверхні. Для цього використовувався наближений розв'язок задачі (1)-(4), узагальненої на випадок довільного розподілу безрозмірного тиску

$$Cp(x) = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho U_\infty^2} = 1 - \text{grad}^2(\phi)$$

на невідомій поверхні Σ . Зв'язок між радіусом цієї поверхні та коефіцієнтом тиску в першому наближенні має такий вигляд [2]:

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = -\frac{Cp(x)}{\ln \varepsilon}. \quad (8)$$

Отже, задаючи прості апріорні залежності $Cp(x)$, інтегруванням елементарного рівняння (8) можна отримати функції $R(x)$, а далі з використанням (5) – відповідний точний розв'язок. Радіус, розрахований за першим рівнянням (7), звичайно, відрізнятиметься від апріорного (отриманого з рівняння (8)), але для тонких тіл ця різниця буде малою. Значно більші розбіжності мають місце між апріорним розподілом тиску та тим, що отримується з точного розв'язку за допомогою рівнянь

$$v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$Cp(x) = 1 - v_x^2(x, R(x)) - v_r^2(x, R(x)). \quad (9)$$

Цього варто було сподіватись, оскільки точність рівняння першого наближення становить лише $-(\ln \varepsilon)^{-1}$ [2]. Разом з тим, якщо не ставити за мету точне виконання заданого розподілу тиску на невідомій поверхні, а вимагати лише певних властивостей функції $Cp(x)$, то запропонована методика дає простий і ефективний метод побудови точного розв'язку. Зокрема, в [2, 5, 6] вдалося таким чином розрахувати осесиметричні та плоскі тіла з дуже короткою зоною позитивного градієнта тиску на поверхні.

Метою даної роботи є розробка подібної методики моделювання вільних поверхонь, на яких виконується умова (4).

1. МОДЕЛЮВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КАВЕРН З НЕСИМЕТРИЧНОЮ СХЕМОЮ ЗАМИКАННЯ

Обмежимося кавітаторами параболічної форми

$$R(x) = bx^2 + \beta x + 1, \quad x \leq 0. \quad (10)$$

Всі довжини відносяться до радіуса кавітатора в точці початку вільної поверхні $x = 0$. Конічному кавітатору відповідає $b = 0$, β дорівнює похідній від радіуса кавітатора при $x = 0$, яку будемо вважати неперервною.

Перше наближення розв'язку оберненої задачі (1)-(4), отримане в [9], має вигляд

$$R^2(x) = \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} + 2\beta x + 1, \quad x \geq 0. \quad (11)$$

Формула (11) є розв'язком диференційного рівняння (8) при $Cp = -\sigma$. За аналогією з [9] будемо використовувати несиметричну схему Рябушинського, тобто вважати, що рівняння (11) описує також і форму замикача.

Побудову точного розв'язку почнемо з використання джерел (стоків), розташованих на осі симетрії. Їхню інтенсивність можна знайти за допомогою рівнянь (5), (10), (11):

$$q(x) = \begin{cases} 2\pi(bx^2 + \beta x + 1)(2bx + \beta), & x_1 \leq x \leq 0, \\ 2\pi(\alpha x + \beta), & 0 \leq x \leq x_2, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2 \ln \varepsilon}; \quad x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4b}}{2b};$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha}}{\alpha}. \quad (12)$$

Для визначення параметра тонкості ε при $\beta \leq 0$ можна використовувати співвідношення

$$\varepsilon = \frac{bx_m^2 + \beta x_m + 1}{x_2 - x_1}, \quad x_m = -\frac{\beta}{2b},$$

що випливають з формули (10). Відповідно при $\beta > 0$ з рівняння (11) отримуємо

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha x_m^2 + 2\beta x_m + 1}}{x_2 - x_1}, \quad x_m = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Підстановка співвідношень (12) у вираз для струменевої функції

$$\Psi(x, r) = 0.5r^2 - \frac{1}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x-\xi)q(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}} \quad (13)$$

після інтегрування дозволяє отримати наступну формулу:

$$\begin{aligned} \Psi(x, r) = & 0.5r^2 - 1.5b(\beta + 2bx)[F_1(0) - F_1(x_1)] - \\ & - 0.5(6b^2x^2 + 6\beta bx + 2b + \beta^2)[F_2(0) - F_2(x_1)] - \\ & - 3b^2[F_3(0) - F_3(x_1)] - 0.5\alpha[F_2(x_2) - F_2(0)] + \\ & + 0.5(\alpha x_2 + \beta)u(x_2), \end{aligned} \quad (14)$$

$$u(s) = \sqrt{r^2 + (s-x)^2}, \quad F_1(s) = 2u^3(s)/3,$$

$$F_2(s) = 0.5(s-x)u(s) + 0.5r^2 \ln[s-x+u(s)],$$

$$\begin{aligned} F_3(s) = & 0.25(s-x)u^3(s) - 0.125(s-x)r^2u(s) - \\ & - 0.125r^4 \ln[s-x+u(s)]. \end{aligned}$$

Аналогічні аналітичні формули для складових швидкості рідини та коефіцієнта тиску можа одержати з використанням співвідношень (9) і (14). Для визначення радіуса вільної поверхні алгебричне рівняння (7) розв'язувалось методом ітерацій. Приклади розрахунків наведені на рис. 1 та 2 лініями.

Для порівняння на обох рисунках "хрестиками" зображене також перше наближення для радіуса кавітатора і вільної поверхні (формули (10) та (11)), яке майже збігається з точним розв'язком

R, Cp

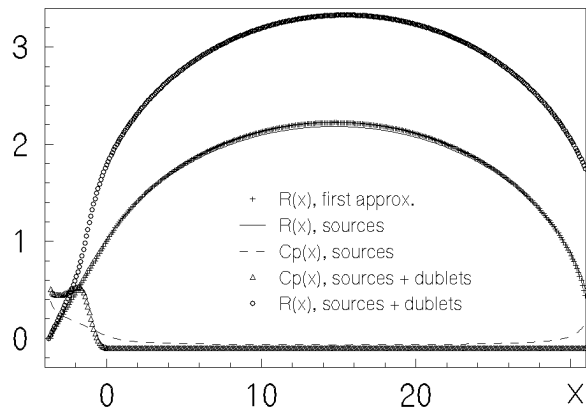


Рис. 1. Осесиметричні кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\sigma = 0.1$; $\beta = \arctg 15^\circ$; $b = 0$

R, Cp

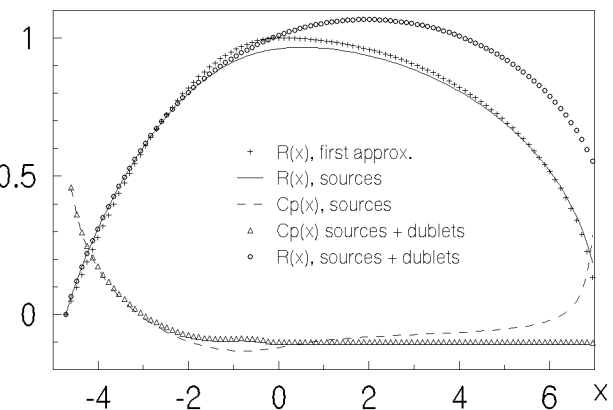


Рис. 2. Осесиметричні кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\sigma = 0.1$; $\beta = 0$; $b = -0.045$

(14), але тиск на поверхні каверни (штрихова крива) не є сталим і відрізняється від заданого значення $-\sigma$.

Для усунення цього недоліку були використані дискретні диполі з інтенсивністю d_k , розташовані на осі симетрії в точках $s_k = hk, k = 0, 1, 2, \dots, n$. Тоді струменева функція отримує приріст

$$\Delta\Psi(x, r) = -\frac{r^2}{4\pi} \sum_0^n \frac{d_k}{[(x-s_k)^2 + r^2]^{1.5}}. \quad (15)$$

За допомогою ітерацій інтенсивності диполів підбирались так, щоб сумарний тиск від усіх особливостей дорівнював $-\sigma$ в точках поверхні з координатами $x = s_k$.

Розрахунки показали, що значення $h = 0.1$ достатньо для забезпечення малості величини $Cp(x) + \sigma$ (в точках каверни з координатами, відмінними від s_k , її модуль не перевищував $1.3 \cdot 10^{-3}$). Приклади наведені на рис. 1, 2 маркерами. Тепер тиск на поверхні каверни практично збігається із заданим, але форма кавітатора значно міняється (особливо це видно на рис.1, де тверде тіло стало набагато товстішим і навіть частково увігнутим).

Вказаний недолік можна виправляти застосуванням додаткових особливостей для фіксації форми кавітатора, що ускладнює розв'язок (14)-(15). Але в тих випадках, коли форма кавітатора не є жорстко фіксованою, запропонована методика може бути простим і ефективним засобом моделювання вільних поверхонь. Приклади таких задач наведені в наступних розділах.

2. ОСЕСИМЕТРИЧНА КАВЕРНА ІЗ СИМЕТРИЧНОЮ СХЕМОЮ ЗАМИКАННЯ

Відомо, що густина води приблизно у 800 разів більша, ніж густина повітря. Якщо врахувати також, що потужність, необхідна для подолання опору води, пропорційна величині ρU_∞^3 (див., наприклад, [10]), то стає очевидною актуальність задачі зменшення гідродинамічного опору при великих швидкостях руху U_∞ .

Один із способів вирішення проблеми полягає у зменшенні площі контакту поверхні тіла з водою (за рахунок збільшення поверхні контакту з повітрям або водяною парою). Ця ідея реалізована у суднах на підводних крилах та тілах, що обтікаються у суперкавітаційному режимі (див., наприклад, [3, 4, 8, 10–12]).

Суттєвою вадою такого методу є виникнення опору тиску через порушення парадокса Даламбера. Наведені в [13, 14] оцінки свідчать, що при фіксованому корисному об'ємі, що складається з об'ємів кінцевого кавітатора, каверни та замикача, суперкавітаційний режим має переваги над традиційним забезпеченням безвідривного обтікання лише при дуже малих числах кавітації ($\sigma < 10^{-3}$).

Разом з тим, можливі схеми обтікання з нульовим опором тиску. Приклад показаний на рис. 3. Він відрізняється від наведеного в [13] тим, що відрив каверни вважається гладким, тобто кривизни вільної поверхні та твердого тіла збігаються

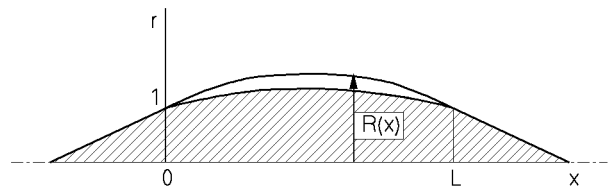


Рис. 3. Симетрична схема обтікання системи кавітатор–замикач з нульовим опором тиску

ся в точках їхнього стикування ($x = 0, x = L$). Відповідно будемо також вимагати неперервності розподілу тиску. Ця умова дозволяє сподіватись на гладке замикання каверни в точці $x = L$ і реалізацію показаного на рис. 3 обтікання замикача та нульового опору тиску.

Варто зауважити, що викладений в попередньому розділі метод моделювання вільних поверхонь автоматично забезпечує гладкість форми всієї системи кавітатор–каверна–замикач та розподілу тиску на ній, оскільки особливості розташовані лише на осі симетрії.

В якості початкового наближення розв'язку за зображеною на рис. 3 схемою можна взяти

$$R(x) = \begin{cases} 1 + \beta x, & -1/\beta \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq L, \\ 1 - \beta(x - L), & L \leq x \leq L + 1/\beta. \end{cases} \quad (16)$$

Тут L – довжина каверни, яка може бути дуже великою порівняно з радіусом кавітатора в точці сходу струменів і забезпечувати значний вигреш в опорі тертя через те, що тверде тіло на ділянці $0 < x < L$ контактує з газом, а не рідиною.

Відповідно до формул (5), (16) інтенсивність розташованих на осі симетрії джерел задається рівнянням

$$q(x) = \begin{cases} 2\pi\beta(1 + \beta x), & -1/\beta \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < L, \\ 2\pi\beta[\beta(x - L) - 1], & L \leq x \leq L + 1/\beta. \end{cases} \quad (17)$$

Варто зауважити, що на відміну від неперервного розподілу джерел (12) функція (17) терпить розрив в точках $x = 0, x = L$.

Підстановка рівняння (17) у вираз (13) дозволяє отримати просту аналітичну формулу для струменевої функції

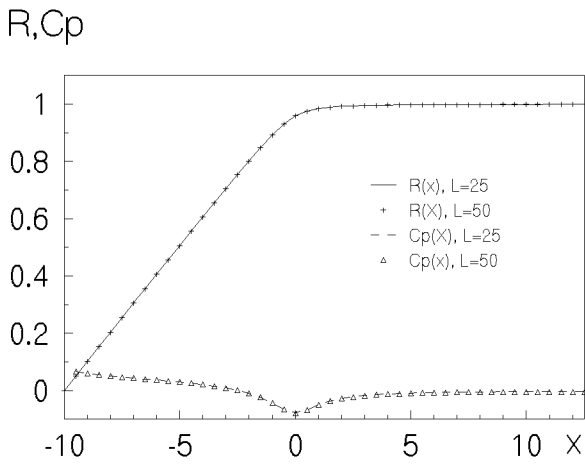


Рис. 4. Осесиметричні кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\beta = 0.1$. Моделювання за допомогою джерел

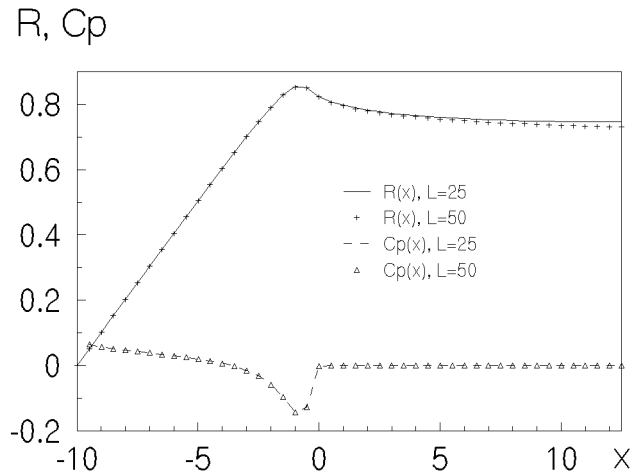


Рис. 5. Осесиметричні кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\beta = 0.1, \sigma = 0$. Моделювання за допомогою джерел-диполів

$$\Psi(x, r) = 0.5r^2 + 0.5\beta[u(0) + u(L)] - \quad (18)$$

$$-0.5\beta^2[F_2(0) - F_2(-1/\beta) + F_2(L + 1/\beta) - F_2(L)].$$

Приклади розрахунків радіуса та розподілу тиску з використанням рівнянь (18), (7), (9) наведені на рис. 4. Симетричність схеми обтікання дозволяє обмежитись тільки значеннями $x \leq L/2$. Лініями представлені результати розрахунків з $\beta = 0.1, L = 25$, маркерами – при $\beta = 0.1, L = 50$.

З рис. 4 видно, що для радіуса точний розв'язок (18) дає результати, близькі до початкового наближення (16). Коефіцієнт тиску при $0 \leq x \leq L$ не є сталим, хоча і наближається до нуля при збільшенні довжини L у відповідності до рівняння першого наближення (8).

Для забезпечення сталого тиску на поверхні каверни на ділянці, що їй відповідає ($0 \leq x \leq L$), були розташовані диполі. Приріст струменевої функції обчислювався за формулою (15). Результати розрахунків наведені на рис. 5. Лініям відповідають каверни з $L = 25$, маркерами представлений випадок $L = 50$.

Слід докладно зупинитись на особливостях форми кавітатора та каверни. Перш за все, в околі точки сходу струменів $x = 0$ форма твердого тіла значно міняється порівняно з показаним на рис. 4 випадком моделювання лише джерелами. Зокрема, при $x = 0$ радіус кавітатора, вирахований з

використанням рівнянь (18), (15), має від'ємну похідну.

Може здатися несподіваним факт існування каверни обмежених розмірів при нульовому числі кавітації. Але кавітору з від'ємною похідною в точці сходу струменів властиві обмежені вільні поверхні не тільки при нульовому, але і при від'ємних числах кавітації. Щоб переконатись у цьому, достатньо звернутись до [9] або до рівняння першого наближення (11).

З іншого боку, формула (11) дає опуклі каверни. Лише при мінімальному числі кавітації $\sigma_m = 2\beta^2 \ln \varepsilon < 0$ радіус каверни лінійно спадає при збільшенні x (див. [9]). Увігнутість каверни, зображеної на рис. 5, можна пояснити різницею в схемі обтікання та вже згадуваною недостатньою точністю рівняння першого наближення.

Може здатися, що отримана форма каверни суперечить принципу Брилюєна (див. [15, 16]), згідно з яким при $\sigma \geq 0$ вільна поверхня мусить бути опуклою. Але цей принцип є наслідком припущення про мінімальність тиску саме на поверхні каверни, в той час як з рис. 5 видно, що найменше значення тиску досягається на твердому тілі.

У зв'язку з цим виникає питання про можливість реалізації показаних на рис. 5 каверн. Адже кавітація може початись у точці мінімального тиску при $x < 0$. Тому отриману схему обтікання, напевне, можна реалізувати лише при штучному піддуві газу в каверну. Тоді при не дуже великих швидкостях руху можна уникнути кавітації на твердому тілі.

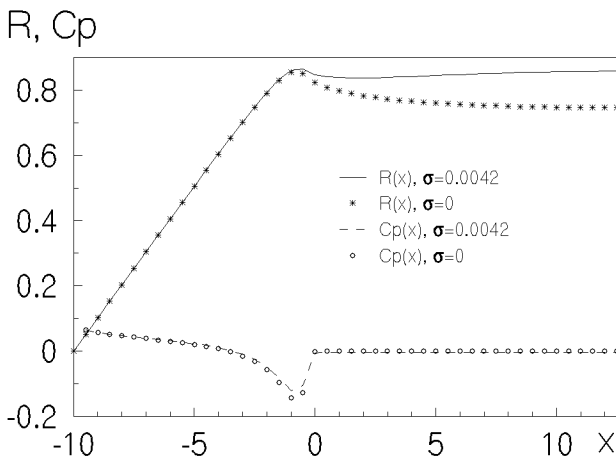


Рис. 6. Осесиметричні кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\beta = 0.1, L = 25$. Моделювання за допомогою джерел диполів

Іншим важливим питанням є відрив примезового шару, що може мати місце на кавітаторі після міделя та на замикачі і повністю змінити схему обтікання. Воно потребує додаткових досліджень. Зокрема, можливе використання форм з від’ємними градієнтами тиску, описаних в [17, 18].

Приклад розв’язку задачі (18), (15) з ненульовим числом кавітації показаний на рис. 6 лініями. Для порівняння маркерами наведено дані для $\sigma = 0$. Значення $\sigma = 0.0042$ відповідає тискові в точці міделя ($x = 12.5$) каверни, зображеної на рис. 4. З рис. 6 видно, що форма каверни при $\sigma = 0.0042$ зазнала принципових змін: вона має точки максимуму та перегину і є опуклою у своїй серединній частині.

Принцип Брилюена також не можна застосувати до отриманої каверни, оскільки мінімум тиску, як це видно з рис. 6, досягається на твердому тілі. Подібні форми плоскої каверни отримав Р. Еплер [19] (див. також [3]), який розглядав обтікання кругового циліндра за схемою Роща-Жуковського. Якщо похідна в точці початку каверни додатня (до міделя циліндра), то каверна Еплера є опуклою (подібною до показаних на рис. 4). Якщо каверна відривається після міделя циліндра, то вона може бути або увігнутою (подібно до рис. 5), або мати точки мінімуму та перегину (подібно до показаної на рис. 6 осесиметричної каверни).

3. МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ СИМЕТРИЧНИХ КАВЕРН

Викладений в попередньому розділі метод моделювання осесиметричних вільних поверхонь можна застосувати також до плоскої задачі, симетричної відносно осі x та вертикальної лінії $x = L/2$. Схема обтікання збігається із зображеною на рис. 3, якщо циліндричну координату r замінити на y , а радіус $R(x)$ – на координату верхньої поверхні профіля та каверни $Y(x)$.

За аналогією з формулою (16) в якості початкового наближення розв’язку можна взяти

$$Y(x) = \begin{cases} 1 + \beta x, & -1/\beta \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq L, \\ 1 - \beta(x - L), & L \leq x \leq L + 1/\beta. \end{cases} \quad (19)$$

Тоді відповідно до формули (6) інтенсивність розташованих на осі симетрії джерел задається рівнянням

$$q(x) = \begin{cases} 2\beta, & -1/\beta \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < L, \\ -2\beta, & L \leq x \leq L + 1/\beta. \end{cases} \quad (20)$$

Так само, як розподіл джерел (17), функція (20) терпить розрив у точках $x = 0, x = L$, який однак не порушує гладкості форми та розподілу тиску.

Підстановка рівняння (20) у вираз для комплексного потенціалу течії

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = z + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(\xi) \ln(z - \xi) d\xi$$

(тут $\phi(x, y)$ – потенціал течії; $\psi(x, y)$ – струменева функція; $z = x + iy$ – комплексна змінна) дозволяє отримати просту аналітичну формулу:

$$W(z) = z + \frac{\beta}{\pi} [[W_0(z, 0) - W_0(z, -1/\beta) - W_0(z, L + 1/\beta) + W_0(z, L)]; \quad (21)$$

$$W_0(z, \xi) = -(z - \xi)[\ln(z - \xi) - 1].$$

Координата $Y(x)$ вираховувалась з використанням формули (21) та алгебраїчного рівняння (7) що розв’язувалось чисельно методом простих ітерацій. Після визначення функції $Y(x)$ можна легко знайти компоненти швидкості та C_p на поверхні

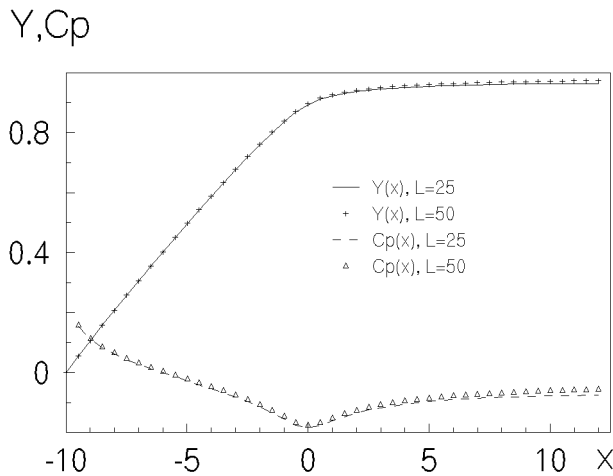


Рис. 7. Плоскі кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\beta = 0.1$. Моделювання за допомогою джерел

профіля і каверни з використанням наступних рівнянь:

$$v_x(x, y) - i v_y(x, y) = dW(z)/dz = \quad (22)$$

$$= 1 - \frac{\beta}{\pi} [\ln(z-0) - \ln(z+1/\beta) - \ln(z-L-1/\beta) + \ln(z-L)];$$

$$Cp(x) = 1 - v_x^2(x, Y(x)) - v_y^2(x, Y(x)).$$

Приклади розрахунків форми поверхні та розподілу тиску з використанням рівнянь (21), (7), (22) наведені на рис. 7. Симетричність схеми обтікання дозволяє обмежитись тільки значеннями $x \leq L/2$. Лініями представлені результати розрахунків при $\beta = 0.1, L = 25$, маркерами – $\beta = 0.1, L = 50$.

З рис. 7 видно, що для $Y(x)$ плоский розв'язок (21) дає результати не такі близькі до початкового наближення (19), як для зображеної на рис. 4 аналогічної осесиметричної каверни. Коефіцієнт тиску при $0 \leq x \leq L$ не є сталим, і наближається до нуля при збільшенні довжини L та прямованні координати x до значення $L/2$, але не так швидко, як в осесиметричному випадку.

Для забезпечення сталого тиску на поверхні каверни додатково до джерел на ділянці осі симетрії $0 \leq x \leq L$ розташовувались диполі з інтенсивністю $D_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$. Приріст комплексного потенціалу розраховувався за формулою

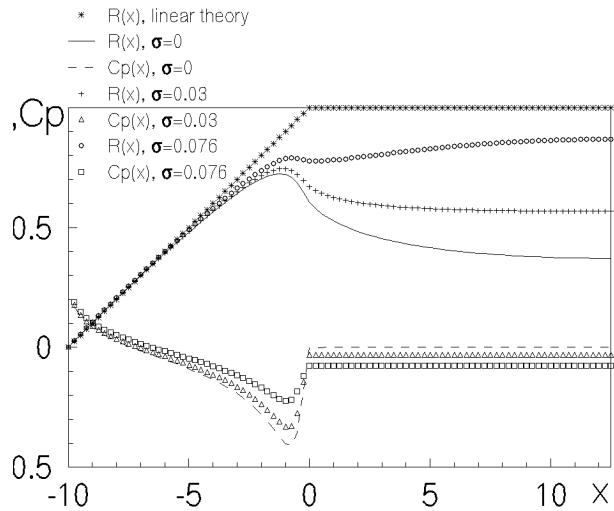


Рис. 8. Плоскі кавітатор ($x \leq 0$) і каверна ($x \geq 0$) при $\beta = 0.1, \bar{L} = 25$. Моделювання за допомогою джерел-диполів

$$\Delta W(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_0^n \frac{D_k}{z - s_k}. \quad (23)$$

Відповідні прирости компонент швидкості визначаються рівнянням

$$\Delta v_x - i \Delta v_y = -\frac{1}{2\pi} \sum_0^n \frac{D_k}{(z - s_k)^2}. \quad (24)$$

За допомогою ітерацій інтенсивності диполів підбирались так, щоб сумарний тиск від усіх особливостей дорівнював $-\sigma$ в точках поверхні з координатами $x = s_k = kh$.

Розрахунки показали, що значення $h = 0.1$ достатньо для забезпечення малості величини $Cp(x) + \sigma$ (в точках каверни, що мають координати відмінні від s_k , її модуль не перевищував $5.2 \cdot 10^{-3}$). Результати розрахунків наведені на рис. 8. Лініям відповідають каверни з $\sigma = 0$, маркерами представлені випадки ненульового числа кавітації та початкове наближення (19).

Так само, як в осесиметричному випадку, в околі точки сходу струменів $x = 0$ форма профілю значно міняється порівняно з показаним на рис. 7 випадком моделювання лише джерелами. Зокрема, при $x = 0$ радіус кавітатора, врахований з використанням рівнянь (21)–(24), має від'ємну похідну. Подібно до осесиметричного випадку, нульовому числу кавітації відповідає скінченна увігнута каверна. Принцип Брилюена (див. [15, 16]) не

порушується, оскільки з рис. 8 видно, що найменше значення тиску досягається на твердому тілі.

Для плоскої задачі так само, як для осесиметричної, потребують додаткових досліджень питання реалізації отриманої схеми обтікання та відриву примежового шару. Зокрема, для забезпечення безвідривного режиму на кавітаторі та замкачі можливе використання форм з від'ємними градієнтами тиску, описаних у [6].

Приклад розв'язку задачі (21)–(24) при $\sigma = 0.076$ показаний на рис. 8 маркерами. Це значення числа кавітації відповідає тискові в точці міделя ($x = 12.5$) каверни, зображеної на рис. 7. З рис. 8 видно, що плоска каверна при $\sigma = 0.076$ (подібно до зображеної на рис. 6 осесиметричної) має точки максимуму та перегину і є опуклою у своїй серединній частині. Вона подібна також до каверни Еплера [19, див. також 3].

Окрім того, на рис. 8 наведені розрахунки форми кавітатора і каверни при проміжному значенні числа кавітації $\sigma = 0.03$. Вільна поверхня в цьому випадку є ввігнутою (точки перегину немає), подібно до випадку нульового числа кавітації.

4. ВИСНОВКИ

Запропоновані методи є ефективним і точним засобом розрахунку форми осесиметричних та плоских каверн у тих випадках, коли форма кавітатора не жорстко фіксована. Отримані результати розрахунків свідчать про можливість існування довгих каверн з гладким приєднанням до замкача, що відкриває перспективу їхнього використання для зменшення опору різних об'єктів, що рухаються у воді з великими швидкостями. Разом з тим, додаткових теоретичних та експериментальних досліджень вимагають питання можливостей реалізації запропонованих схем обтікання та відриву примежового шару.

1. Гузевський Л.Г. Численный анализ кавитационных течений // Новосибирск: СО АН СССР, Ин-т теплофизики.– 1979.– Препринт 40-79.– С. 3-36.
2. Бурага О.А., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Дозвукові осесиметричні форми із стрибком тиску

на поверхні // Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут.– 2001.– 1(15).– С. 90-99.

3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости.– М.: Наука, 1979.– 536 с.
4. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук.думка, 1969.– 208 с.
5. Нестерук І.Г. Про форму тонких тіл мінімального опору // Доповіді АН УРСР, сер. А.– 1989.– 4.– С. 57-60.
6. Нестерук І. Г. Плоскі дозвукові форми з від'ємними градієнтами тиску на поверхні // Доповіді НАНУ.– 2001.– 9.– С. 63-67.
7. Cole J. D. Perturbation Methods in Applied Mathematics.– Waltham, Massachusetts; Toronto; London: Blaisdell Publishing Company, 1968.– 268 p.
8. Егоров И. Г., Садовников Ю. М., Исаев И. И. и др. Искусственная кавитация.– Л.: Судостроение, 1971.– 284 с.
9. Нестерук І.Г. К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1979.– N 6.– С. 133-136.
10. Савченко Ю. Н. О движении в воде на суперкавитационных режимах обтекания // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 105-115.
11. Knapp R. T., Daily J.W., Hammit F.G. Cavitation.– New York: McGraw-Hill Book Co., 1970.– 687 p.
12. Эпштейн Л. А. Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов.– Л.: Судостроение, 1970.– 207 с.
13. Бурага О.А., Нестерук І. Г., Савченко Ю.М. Порівняння опору тонких конусів при безвідривному та суперкавітаційному режимах обтікання // Прикладна гідромеханіка.– 2002.– Т. 4(76), N 2.– С. 3-8.
14. Нестерук І.Г. Розрахунки опору тонких конусів з використанням другого наближення для форми утворених ними каверн // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5 (77), N 1.– С. 42-46.
15. Brillouin M. Les surfaces de glissement de Helmholtz et la resistance des fluides // Ann. chemie et phys.– 1911.– t. 23.– P. 234-245.
16. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.– М.: Мир, 1964.– 466 с.
17. Нестерук І. Г. Пошуки безвідривних осесиметричних дозвукових форм // Доповіді НАНУ.– 2002.– 5.– С. 59-64.
18. Nesteruk I. Subsonic Shapes without Separation and Cavitation // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки.– 2002.– 1.– С. 127-136.
19. Eppler R. Beitrage zur Theorie und Anwendung der unstetigen Stroemungen // J. Rat. Mech. Anal.– 1954.– V. 3.– P. 315-325.