

УДК 621.371.39

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ МОРСКОЙ ВОДЕ

В. В. НИКИШОВ

Специальное конструкторское бюро
Института гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 15.11.2002

Рассматривается распространение плоской световой волны в локально-однородной и изотропной турбулентной водной среде в случае, когда флуктуации оптического показателя преломления определяются флуктуациями температуры и солености. Для расчета статистических характеристик волны используется метод плавных возмущений. Кратко излагаются основные положения указанного метода, сделаны оценки и получены приближенные выражения статистических характеристик применительно к атмосферной турбулентности, рассмотрены характеристики световой волны, распространяющейся в турбулентной водной среде, когда флуктуации показателя преломления определяются флуктуациями одной скалярной компоненты. Использована ранее разработанная модель спектра флуктуаций оптического показателя преломления [25], которая базируется на модели Коррзина-Пао. Присутствие двух скалярных компонент приводит к аномальному поведению спектра флуктуаций показателя преломления в области малых масштабов, в частности появлению локальных экстремумов в зависимости от вкладов флуктуаций скалярных компонент (температуры и солености) в флуктуации показателя преломления. Показано, что эти аномалии проявляются в поведении таких статистических характеристик, как корреляционная функция флуктуаций уровня и структурная функция фазы. Это выражается в изменении ширины корреляционной функции, смещении локальных максимумов структурной функции фазы и др.

Розглядається розповсюдження плоскої світлової хвилі в локально-однорідному й ізотропному турбулентному середовищі у випадку, коли флуктуації оптичного показника заломлення визначаються флуктуаціями температури й солоності. Для розрахунку статистичних характеристик хвилі використовується метод плавних збурень. Коротко приводяться основні положення вказаного методу, зроблено оцінки і отримано наближені вирази для статистичних характеристик у випадку атмосферної турбулентності, розглянуто характеристики світлової хвилі, що розповсюджується в турбулентному водному середовищі, коли флуктуації показника заломлення визначаються флуктуаціями однієї скалярної компоненти. Використана модель спектру флуктуацій оптичного показника заломлення, яку отримано раніше [25] і яка базується на моделі Корсина-Пао. Наявність двох скалярних компонент призводить до аномальної поведінки спектру флуктуацій показника заломлення в області малих масштабів, зокрема появи локальних екстремумів у залежності від вкладів флуктуацій скалярних компонент (температури і солоності) у флуктуації показника заломлення. Показано, що ці аномалії впливають на поведінку таких статистичних характеристик, як кореляційна функція флуктуацій амплитуди і структурна функція фази. Це призводить до зміни ширини кореляційної функції, зсуву локальних максимумів структурної функції фази та ін.

Propagation of two-dimensional light wave in local homogeneous and isotropical turbulent water, when fluctuations of optical refractive index is determined by fluctuations of temperature and salinity, is studied. The method of smooth perturbations is used for estimations of statistical characteristics of wave. At first, the fundamentals of this method is briefly stated. The estimations and approximated expressions of statistical characteristics of wave propagating in atmosphere are found. The characteristics of wave propagating in turbulent water when fluctuations of refractive index are determined fluctuations of single scalar component are considered too. Model of spectrum of fluctuations of optical refractive index is developed earlier [25]. It is based on the model Corrsin-Pao. The presence of two scalar components results in anomalous behavior of spectrum of fluctuations of refractive index in small-scale region, in particular the arising of local extremums depending on the contributions of fluctuations of scalar components in fluctuations of refractive index. It is shown that these anomalous are manifested in behavior of such statistical characteristics as correlation functions of amplitude fluctuations and structure function of phase and others. This leads to the changing of the width of correlation function, displacement of local extremums of structure function of phase and so on.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное изучение процесса распространения волн в турбулентной атмосфере продолжается уже на протяжении более 30 лет. Турбулентность обуславливает появление случайных флуктуаций температуры и влажности, а значит и оптического показателя преломления. Это приводит к значительным искажениям волновых полей. Актуальность исследований флуктуаций характеристик волн, распространяющихся в условиях турбулентной среды, связана с широким кругом метеорологических, геофизических и астрофизических задач, для решения которых требуются все более точные количественные данные об этих характеристиках.

Теоретические основы изучения характеристик волн, распространяющихся в условиях атмосферы, разработаны в монографиях [1–4], обобщение результатов расчетов характеристик световой волны приведено в известном обзоре Лоуренса и Стробена [5]. В этих работах показано, что статистические характеристики флуктуаций параметров волн (фазы, углов прихода, амплитуды) за-

решения которых требуются все более точные количественные данные об этих характеристиках.

висят от спектра флуктуаций температуры. Для расчетов использовалась модель спектра флуктуаций температуры, которая для малых масштабов соответствует закону Обухова-Коррзина [2, 6] $E_T \approx \kappa^{-5/3}$ (инерционно-конвективный интервал). Здесь κ – волновое число. Сравнение с данными натуральных наблюдений показывает достаточно хорошее соответствие результатов [1–5, 7–9].

Наиболее часто применяемая модель спектра флуктуаций температуры описывается зависимостью

$$E_T \approx \kappa^{-5/3} f(\kappa\eta), \quad (1)$$

где η – пространственный масштаб Колмогорова, характеризующий влияние вязкости на турбулентные вихри, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{3/4}$; ϵ – скорость диссипации турбулентной энергии; ν – кинематический коэффициент молекулярной вязкости. Когда $f = 1$, получаем спектр Обухова-Коррзина. Так называемый ”спектр Татарского”, предложенный в работе [1], характеризуется следующим видом функции f : $f(\kappa\eta) = \exp[-(\kappa\eta/5.92)]$. При уменьшении масштабов спектр резко затухает (вязкодиффузионный интервал). В работах [10, 11] предложены более точные модели спектров, но они оказались довольно громоздкими для аналитических расчетов, поэтому в ряде работ была проведена их аппроксимация. Для этих модифицированных спектров функция f представлена в следующем виде [12]:

$$f(\kappa\eta) = \exp(-\tilde{\kappa}^2) \left(1 + 1.802\tilde{\kappa} - 0.254\tilde{\kappa}^{7/6} \right), \quad (2)$$

где $\tilde{\kappa} = \kappa/\kappa_l$, $\kappa_l = 3.3/\eta$.

Подобная модификация спектра, разработанного в работах [10, 11], была осуществлена в работе [13], где предложена следующая зависимость, описывающая функцию f :

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^4 a_i x^i \right) \exp(-\delta x), \quad (3)$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = 1.109$, $a_2 = 0.70937$, $a_3 = -0.28086$, $a_4 = 0.08277$, $\delta = 1.109$.

Важная особенность этого спектра заключается в том, что он описывает ”прыжок” (bump) спектра вблизи $\kappa\eta = 1$, который указывает на границу диссипативного интервала. В работе [14] рассматривалась аналогичная модель спектра при анализе малых перемещений области прыжка спектра. Анализируя данные мерцаний лазерного луча, в работе [13] предложено уточнение зависимости (3) (см. также работу [15]).

При достаточно большой длине трассы начинает сказываться влияние крупномасштабных возмущений, вплоть до энергонесущих. В этом случае появляются заметные расхождения теоретических и экспериментальных данных. Для устранения подобных расхождений используют уточненные модели спектра флуктуаций оптического показателя преломления, в которых учитывается зависимость от внешнего масштаба. Среди таких моделей следует отметить известную кармановскую модель [9], которая отличается от зависимости (1) введением множителя вида $f_1(\kappa/\kappa_0) = (1 + \kappa_0^2/\kappa^2)^{11/6}$, где $\kappa_0 = 2\pi/\Lambda$, Λ – интегральный масштаб турбулентности, или множителя вида [15] $f_1(x) = [1 + \eta^2/(\Lambda x)^2]$, где $x = \kappa\eta$. В ряде случаев используют так называемые экспериментальные модели. Тогда корректирующие множители имеют вид [9] $f_1(\kappa/\kappa_0) = 1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_e^2)$, где $\kappa_e = 2\pi/L_e$, $L_e = 0.54\Lambda$, или [16] $f_1(x) = 1 - \exp[-(x\Lambda/\pi d)^2]$, где d – диаметр апертуры приемника. Влияние внешнего масштаба на характеристики волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере, проанализировано в работах [17–19].

Рассматривая границы применимости приближения геометрической оптики, Татарский показал [1], что дисперсия логарифма амплитуды не должна превышать единицы. Кроме того, он нашел, что радиус первой зоны Френеля, равный $\sqrt{\lambda L}$, где L – длина трассы, должен быть меньше пространственного масштаба вариации оптического показателя преломления. Когда указанная дисперсия мала, имеется хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных. Однако на длинных горизонтальных трассах эта дисперсия заметно возрастает. В присутствии сильной турбулентности происходит ”насыщение” мерцаний светового луча, и эта вариация достигает значений порядка $O(1)$. Начало рассмотрения этих вопросов положено в работе [1]. Затем они рассматривались в работах [20–22].

В ряде работ изучались частотно-временные спектры волн, распространяющихся в атмосфере [15, 23], хотя основное внимание в работах уделялось изучению таких статистических характеристик, как флуктуации уровня, корреляционная функция флуктуаций уровня, корреляционная функция углов прихода, структурная функция фазы.

Следует подчеркнуть, что в большинстве работ рассматривалось распространение волн в атмосфере. Известно, что молекулярный коэффициент температуропроводности χ_T близок к кинематическому коэффициенту вязкости ν и число

Прандтля $Pr = \nu/\chi_T \approx 0.7$. Отсюда следует, что волновые числа, характеризующие влияние вязкости и температуропроводности, близки друг к другу. Это приводит к тому, что резкому спаду спектра флуктуаций скорости соответствует резкое падение спектра флуктуаций температуры. Здесь не возникает вязко-конвективного интервала спектра $E_T(\kappa)$, когда он пропорционален κ^{-1} . Отметим, что в работе [11] рассмотрен спектр флуктуаций аэрозоля в условиях атмосферы. Авторы ввели малый коэффициент диффузии аэрозоля (число Прандтля $Pr = 10^7$), что привело к появлению вязко-конвективного интервала спектра. Они изучили характеристики светового луча, распространяющегося в таких условиях. Однако аэрозоль состоит из отдельных, хотя и маленьких, частиц, поэтому он не является континуумом. Необходимо более четкое обоснование корректности введения коэффициента диффузии, характерного для сплошных сред.

Работ, посвященных изучению распространения волн в водной среде, немного. В работе [24] рассмотрено распространение волн в турбулентной водной среде. Автор изучил статистические характеристики световой волны для случаев, когда флуктуации показателя преломления определяются флуктуациями температуры или солености. Проведенный анализ показал, что влияние вязко-конвективного интервала на статистические характеристики световой волны являются существенным, меняются как форма, так и их значения. Обнаружены различия в спектральных характеристиках для случаев, когда флуктуации оптического показателя преломления определяются флуктуациями температуры или солености, что обусловлено различной длиной вязко-конвективных интервалов спектров $E_T(\kappa)$ и $E_S(\kappa)$.

В отличие от атмосферы, в водной, в частности в морской, среде флуктуации показателя преломления обусловлены одновременно флуктуациями температуры и солености. В инерционно-конвективном интервале спектры флуктуаций температуры и солености, как и в атмосфере, подчиняются закону Обухова–Коррзина. Интервал волновых чисел, до которых простираются эти спектры, ограничен сверху эффектами температуропроводности и диффузии соли соответственно. Спектр энергии флуктуаций скорости в водной среде резко убывает при $\kappa > \kappa_K = 1/\eta$, где $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ – масштаб Колмогорова, который характеризует пространственный масштаб турбулентных вихрей, подверженных влиянию вязкости; ϵ – скорость диссипации энергии турбулент-

ных флуктуаций скорости; ν – кинематический коэффициент вязкости. Характерной особенностью водной среды является то, что коэффициент ν значительно превышает молекулярные коэффициенты температуропроводности χ_T и диффузии соли χ_S : $\nu \gg \chi_T \gg \chi_S$. Это приводит к тому, что в отличие от спектра флуктуаций скорости спектры флуктуаций температуры и солености при $\kappa > \kappa_K$ плавно понижаются вплоть до очень малых масштабов, где важную роль играют процессы температуропроводности и диффузии соли. На этом вязко-конвективном интервале спектры $E_T(\kappa)$ и $E_S(\kappa)$ обратно пропорциональны волновому числу (закон Бетчелора): $E_T(\kappa) \approx \kappa^{-1}$ и $E_S(\kappa) \approx \kappa^{-1}$ [2]. Протяженность данных интервалов определяется отношениями молекулярных коэффициентов переноса, т. е. значениями чисел Прандтля $Pr = \nu/\chi_T$ и Шмидта $Sc = \nu/\chi_S$. Ясно, что резкое падение уровня флуктуаций температуры под действием температуропроводности происходит в области меньших волновых чисел, чем падение уровня флуктуаций солености под действием эффекта диффузии соли. Другими словами, имеется интервал волновых чисел, на котором флуктуации температуры уже выродились, но существуют флуктуации солености. Указанные особенности поведения спектров флуктуаций температуры и солености могут приводить к аномальному поведению спектра флуктуаций оптического показателя преломления [24, 25] и, в частности, появлению локальных экстремумов и локальных выпуклостей (“bump”). Указанные аномалии в поведении спектра пульсаций оптического показателя преломления соответствующим образом проявляются в изменениях статистических характеристик волн, распространяющихся в турбулентной морской воде. Эти вопросы детально рассмотрены в работе [26]. В качестве спектра флуктуаций оптического показателя преломления авторы использовали модель спектра, описанную в работе [25]. Авторы провели расчеты структурной функции фазы и суммы продольной и поперечной корреляционных функций световой волны. Было показано, что изучаемые характеристики изменяются в зависимости от параметра $\omega = \alpha \Delta T_0 / \beta \Delta S_0$, характеризующего относительные вклады флуктуаций температуры и солености в флуктуации оптического показателя преломления. В работе использовалось приближение геометрической оптики, применимость которого ограничена сравнительно небольшими значениями длины трассы L , поскольку пространственный масштаб неоднородности l_ϵ не должен превышать радиус первой зоны Френеля

$\sqrt{\lambda L}$.

В данной работе на основе метода плавных возмущений, для которого нет указанных выше довольно жестких ограничений на размер L , изучаются основные статистические характеристики световой волны (флуктуации уровня, корреляционная функция флуктуаций уровня, структурная функция фазы), распространяющейся в турбулентной морской воде. Вначале кратко описаны главные положения метода плавных возмущений и приведены основные формулы для расчета статистических характеристик световой волны. Сделаны приближенные оценки характеристик волны, распространяющейся в условиях атмосферы, проведен анализ этих характеристик в случае распространения волны в водной среде, когда флуктуации оптического показателя преломления зависят только от флуктуаций одной скалярной компоненты. Представлены результаты расчетов статистических характеристик световой волны, распространяющейся в турбулентной морской воде. Для описания спектра флуктуаций оптического показателя преломления морской воды использована модель спектра, разработанная в работе [25]. Проведен анализ взаимного влияния флуктуаций температуры и солености на указанные характеристики.

1. МЕТОД ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Уравнение, описывающее распространение волн в среде с заданным показателем преломления $n^2 \equiv \epsilon_*$, может быть представлено в виде [2, 3, 26]

$$\Delta u(\vec{r}) + k^2 \epsilon(\vec{r}) u(\vec{r}) = 0. \quad (4)$$

Здесь u может обозначать любую из компонент вектора напряженности электрического поля; ϵ_* – диэлектрическая проницаемость среды, которую для малых флуктуаций рассматриваем в виде $\epsilon_* = \langle \epsilon_* \rangle + \epsilon_f$, ϵ_f – флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости, причем $\langle \epsilon_f \rangle = 0$. Будем рассматривать малые флуктуации, т. е. $|\epsilon_f| \ll \langle \epsilon_* \rangle = O(1)$.

Исследуем случай, когда плоская волна $u = A_0 \exp(ikz)$ падает на полупространство $z > 0$. Произведенные оценки показали [26], что длина световой волны λ значительно меньше пространственного масштаба флуктуаций оптического показателя преломления l_ϵ , $\lambda \ll l_\epsilon$. В этом случае рассеянные на неоднородностях волны концентрируются в узком угле с раствором $\vartheta \approx \lambda/l_\epsilon \ll 1$, т. е. распространяются в том же направлении,

что и первичная волна, а отраженная волна будет слабой [3]. Будем искать поле в среде в виде

$$u(\vec{\rho}, z) = v(\vec{\rho}, z) \exp(ikz). \quad (5)$$

Здесь $\vec{\rho} = \vec{\rho}(x, y)$ – двумерный вектор в плоскости x, y .

Поскольку изменения амплитуды связаны с наличием неоднородностей, размер которых l_ϵ значительно превышает длину волны, можно полагать, что сама амплитуда $v(\vec{\rho}, z)$ и ее производные мало меняются на длине волны (условие плавности возмущений). Другими словами, должны выполняться следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \ll k |v|, \quad \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|. \quad (6)$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), с учетом неравенств (6) получаем параболическое уравнение [1,3]

$$2ik \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 \epsilon(\vec{\rho}, z) v = 0. \quad (7)$$

Более строгий вывод этого уравнения приведен в работе [3], в которой рассматривается общее решение уравнения (4), записанного с использованием функции Грина.

Сделаем некоторые преобразования. Будем считать, что амплитуда волны $v(\vec{\rho}, z)$ в представлении (5) является комплексной величиной. Запишем ее в виде

$$\begin{aligned} v(\vec{\rho}, z) &= A(\vec{\rho}, z) \exp[iS'(\vec{\rho}, z)] = \\ &= A_0 \exp \left[iS'(\vec{\rho}, z) + \ln \frac{A(\vec{\rho}, z)}{A_0} \right] = \\ &= A_0 \exp [\Phi(\vec{\rho}, z)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь S' – отклонение фазы от регулярного набега, определяемого произведением kz ; $S' = S - ikz$; S – полное изменение фазы. Отсюда следует, что $\Phi = \ln(v/A_0)$ и величина $\chi = \ln A/A_0$ характеризуют уровень, т. е. характер изменения амплитуды волны. Можно записать $\Phi = \chi + iS'$. Тогда, подставляя (8) в (7), после некоторых преобразований получаем

$$2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta_h \Phi + (\nabla_h \Phi)^2 + k^2 \epsilon(\vec{\rho}, z) = 0. \quad (9)$$

Здесь индекс h обозначает горизонтальные аналоги операторов Δ и ∇ . Видно, что это уравнение, в отличие от (7), является нелинейным, но случайная функция $\epsilon(\vec{\rho}, z)$ входит в него адитивно. Это позволяет искать решение в виде разложения по

малому параметру $\sigma = \sqrt{\langle \epsilon_f^2 \rangle}$. Ограничившись первым приближением (нулевое приближение соответствует случаю отсутствия возмущений: и здесь не рассматривается), запишем

$$2ik \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \Delta_h \Phi_1 = -k^2 \epsilon(\vec{\rho}, z). \quad (10)$$

Тогда должно выполняться следующее условие малости изменений Φ на поперечных размерах порядка длины волны, т. е. условие плавности возмущений

$$\langle |\nabla_h \Phi|^2 \rangle \ll k^2 \sigma \quad \text{или} \quad \langle |\lambda \nabla_h \Phi|^2 \rangle \ll \sigma$$

На границе $z = 0$ пренебрегаем обратным рассеянием и имеем условия непрерывности функции и ее производной:

$$v(\vec{\rho}, 0) = A_0, \quad \Phi(\vec{\rho}, 0) = \ln[v(\vec{\rho}, 0)/A_0] = 0. \quad (11)$$

Для решения применяем к уравнению (10) преобразование Фурье по переменным x, y и с учетом граничных условий (11) для образа $\hat{\Phi}_1$ находим [3]

$$\hat{\Phi}_1(\vec{\kappa}, z) = \frac{ik}{2} \int_0^z \exp\left[-\frac{i\kappa^2(z-z')}{2k}\right] \epsilon(\vec{\kappa}, z') dz'. \quad (12)$$

Исходя из этого уравнения, определяем отклонение фазы S' от регулярного набега kz и уровень χ

$$S'(\vec{\kappa}, z) = \frac{k}{2} \int_0^z \cos\left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right] \epsilon(\vec{\kappa}, z') dz', \quad (13)$$

$$\chi(\vec{\kappa}, z) = \frac{k}{2} \int_0^z \sin\left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right] \epsilon(\vec{\kappa}, z') dz'. \quad (14)$$

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим корреляционную функцию флуктуаций фазы в плоскости $z = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z) &= \langle S'(\vec{\rho}_1, z) S'(\vec{\rho}_2, z) \rangle = \\ &= \int \int \exp(i\vec{\kappa}_1 \vec{\rho}_1) \exp(i\vec{\kappa}_2 \vec{\rho}_2) \times \\ &\times \langle S'(\vec{\kappa}_1, z) S'(\vec{\kappa}_2, z) \rangle d^2 \vec{\kappa}_1 d^2 \vec{\kappa}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Видно, что для расчета $\Psi(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, z)$ необходимо знать корреляционную функцию спектральных компонент. Используя условия (11), эту функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle S'(\vec{\kappa}_1, z) S'(\vec{\kappa}_2, z) \rangle &= \frac{k^2}{2} \int_0^z \int_0^z \cos Z_1 \times \\ &\times \cos Z_2 \langle \epsilon(\vec{\kappa}_1, z_1) \epsilon(\vec{\kappa}_2, z_2) \rangle dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $Z_1 = \kappa_1^2(z-z_1)/2k$, $Z_2 = \kappa_2^2(z-z_2)/2k$.

Рассматриваемая корреляционная функция определяется корреляционной функцией флуктуаций диэлектрической проницаемости. Известно [3], что для статистически однородной среды спектральные амплитуды являются дельта-коррелированными. Тогда для корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости можно записать

$$\langle \epsilon(\vec{\kappa}_1, z_1) \epsilon(\vec{\kappa}_2, z_2) \rangle = F_\epsilon(\vec{\kappa}_1, z_1 - z_2) \delta(\vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2), \quad (17)$$

где $F_\epsilon(\vec{\kappa}_1, z_1 - z_2)$ – двумерная спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Отметим, что корреляция между функциями в плоскостях z_1 и z_2 определяется такими неоднородностями, размеры которых превышают расстояние $|z_1 - z_2|$, т. е. $l > |z_1 - z_2|$, или, учитывая $\kappa = 2\pi/l$, получаем

$$|\kappa| |z_1 - z_2| \leq 2\pi. \quad (18)$$

Подставляя соотношение (17) в (16), находим

$$\langle S'(\vec{\kappa}_1, z) S'(\vec{\kappa}_2, z) \rangle = \delta(\vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2) F_S(\vec{\kappa}_1, z),$$

где

$$\begin{aligned} F_S(\vec{\kappa}, z) &= \frac{k^2}{4} \int_0^z \int_0^z \cos\left[\frac{\kappa^2(z-z_1)}{2k}\right] \times \\ &\times \cos\left[\frac{\kappa^2(z-z_2)}{2k}\right] F_\epsilon(\vec{\kappa}, z_1 - z_2) dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем новые переменные $z_+ = (z_1 + z_2)/2$, $z_- = z_1 - z_2$. Из неравенства (18) следует, что основной вклад даст область, определяемая неравенством $\kappa z_- < 2\pi$. Будем рассматривать ситуацию, когда характерные поперечные размеры неоднородностей малы по сравнению с расстоянием z , которое прошла волна, т. е. $2\pi/\kappa \ll z$. Объединяя два последних неравенства, запишем $z_- < 2\pi/\kappa \ll z$. Переходя к новым переменным в выражении (19) и проведя ряд упрощений на основе приведенных неравенств, получаем для локально изотропной турбулентности [3]

$$F_S(\vec{\kappa}, z) = \frac{\pi k^2 z}{4} \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k} \right] \Phi_\epsilon(\kappa_1, \kappa_2, 0). \quad (20)$$

Здесь $\Phi_\epsilon(\kappa_1, \kappa_2, 0)$ – трехмерная спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости, которая в данном случае может быть представлена в виде $\Phi_\epsilon(\kappa_1, \kappa_2, 0) = \Phi_\epsilon(\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}, 0) = \Phi_\epsilon(\kappa)$. Аналогичным образом можно получить

для двумерной спектральной плотности флуктуаций уровня

$$F_{\chi}(\vec{\kappa}, z) = \frac{\pi k^2 z}{4} \left[1 - \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k} \right] \Phi_{\epsilon}(\kappa). \quad (21)$$

Запишем теперь выражение для корреляционной функции флуктуаций фазы в плоскости $z = L = \text{const}$:

$$\Psi_S(\vec{\rho}, z) = \int F_S(\vec{\kappa}, z) \exp(i\vec{\kappa}\vec{\rho}) d\vec{\kappa}.$$

Вводя для случая локальной изотропии полярную систему координат, после интегрирования получаем

$$\Psi_S(\vec{\rho}, z) = \frac{\pi^2 k^2 L}{2} \int_0^{\infty} J_0(\kappa \rho) \times \left(1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (22)$$

Аналогичным образом для корреляционной функции флуктуаций уровня находим

$$\Psi_{\chi}(\vec{\rho}, z) = \frac{\pi^2 k^2 L}{2} \int_0^{\infty} J_0(\kappa \rho) \times \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (23)$$

Используя приведенные зависимости, получаем для структурной функции фазы $D_S(\vec{\rho}, z) = \langle [S'(\vec{\rho}_1, z) - S'(\vec{\rho}_2, z)]^2 \rangle$ следующее выражение:

$$D_S(\vec{\rho}, z) = \pi^2 k^2 L \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa \rho)] \times \left(1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_{\epsilon}(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение характерное волновое число κ_F , соответствующее радиусу первой зоны Френеля, $\kappa_F = \sqrt{2\pi/\lambda L} = \sqrt{k/L}$, а также волновое число κ_m , соответствующее наименьшему масштабу неоднородностей. Здесь $L = z$ – длина трассы. Волновой параметр $D = \kappa_m^2/\kappa_F^2 \approx \lambda L/l_{\epsilon}^2$ [27] характеризует отношение площади первой зоны Френеля к площади одной неоднородности.

Рассмотрим предельные случаи.

1. $D \ll 1$. Это случай соответствует ближней зоне распространения, в которой справедливо приближение геометрической оптики. Разлагая в ряд по малому параметру $\delta_* = \kappa^2 L/k \ll 1$ выражения, стоящие в квадратных скобках в уравнениях (20) и (21), находим

$$F_S(\kappa, L) \cong \frac{\pi L}{2} k^2 \Phi_{\epsilon}(\kappa), \quad (25)$$

$$F_{\chi}(\kappa, L) \cong \frac{\pi L^3}{24} k^4 \Phi_{\epsilon}(\kappa). \quad (26)$$

Осредненные значения квадрата флуктуаций фазы и уровня можно найти, полагая $\rho = 0$ в выражениях (22) и (23) соответственно.

2. $D \gg 1$. Этот случай соответствует френелевой зоне дифракции. Здесь радиус первой зоны Френеля существенно превышает размер неоднородностей, и дифракционные эффекты необходимо учитывать. Поскольку спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости имеет несколько характерных волновых чисел (масштабов), будем полагать, что данное неравенство справедливо для наименьшего волнового числа. В результате находим, что спектральные плотности флуктуаций фазы и амплитуды равны друг другу:

$$F_S(\kappa, z) = F_{\chi}(\kappa, z) = \frac{\pi k^2 z}{4} \Phi_{\epsilon}(\kappa). \quad (27)$$

3. ОЦЕНКИ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим характеристики световой волны, распространяющейся в атмосфере. Флуктуации диэлектрической проницаемости определяются, в основном, флуктуациями температуры, и спектр флуктуаций в инерционно-конвективном интервале $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_m$ описывается законом Обухова–Коррзина [25]

$$\Phi_{\epsilon}(\kappa) = 2\tilde{C}_0 \kappa^{-11/3}, \quad (28)$$

где $\tilde{C}_0 = 0.5 C_0 \pi^{-1} \alpha^2 \epsilon^{-1/3} \epsilon_T$ C_0 – постоянная Обухова–Коррзина.

Пусть данный спектр имеет место для всех значений κ . Остановимся сначала на статистических характеристиках флуктуаций уровня. В области $\kappa < \kappa_0$, т. е. в области энергонесущих масштабов, $\Phi_{\epsilon}(\kappa)$ растет по мере уменьшения κ медленнее, чем $\kappa^{-11/3}$ или вообще не возрастает. В этой области значения подинтегральной функции в выражении (23) становятся малыми и эта область не влияет на величину интеграла [3]. В то же время, в области $\kappa > \kappa_m$ значения подинтегральной функции становятся малыми из-за степенного затухания и вклад этой области также мал. Таким образом, мы можем считать, что выражение (28) описывает спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости для всех значений κ . Тогда, сделав замену переменных $\kappa^2 L/k = q^2$, после вычисления интеграла в выражении (23), получим

$$\Psi_{\chi}(\rho, L) = \tilde{C}_0 k^{7/6} L^{11/6} \times$$

$$\times \int_0^\infty J_0 \left(q\rho\sqrt{\frac{k}{L}} \right) \left(1 - \frac{\sin q^2}{q^2} \right) q^{-8/3} dq. \quad (29)$$

Принимая $\rho = 0$, находим осредненный квадрат флуктуаций уровня

$$\langle \chi^2 \rangle = Q_0 \alpha^2 \epsilon^{-1/3} \epsilon_T k^{7/6} L^{11/6}, \quad (30)$$

где

$$Q_0 = \frac{C_0 \pi}{2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin q^2}{q^2} \right) q^{-8/3} dq \cong 0.53.$$

Из выражения (30) видно, что квадрат флуктуаций уровня пропорционален $L^{11/6}$ в отличие от предельных случаев, рассмотренных выше, когда для ближней зоны $D \ll 1$ (область геометрической оптики) эта величина пропорциональна L^3 , а для дальней зоны $D \gg 1$ она пропорциональна L .

В отличие от флуктуаций уровня, интеграл в выражении (22), которое описывает корреляционную функцию флуктуаций фазы, становится расходящимся в нуле после подстановки в него выражения (28), если не учитывать ограничение $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_m$. Отсюда следует, что в отличие от флуктуаций уровня вклад от крупномасштабной части спектра в флуктуации фазы является существенным. Для расчетов в этом случае следует использовать более точные модели спектров, например, описанную выше кармановскую модель.

Рассмотрим теперь структурную функцию фазы $D_S(\rho, z)$ в плоскости $z = L$. Подставляем спектр (28) в выражение (24), после замены переменных $\kappa\rho = q$ находим

$$D_S = 2\tilde{C}_0 k^2 L \rho^{5/3} \times \int_0^\infty [1 - J_0(q)] \left(1 + \frac{\kappa\rho^2}{q^2 L} \sin \frac{q^2 L}{\kappa\rho^2} \right) q^{-8/3} dq.$$

Сделаем некоторые оценки. Нетрудно заметить, что наибольший вклад дает область $q \approx 1$, причем в зависимости от величины ρ возможны два случая.

1. $k\rho^2/L \ll 1$ ($\rho \ll \sqrt{\lambda L}$). Тогда

$$D_S = 2Q_1 \tilde{C}_0 k^2 L \rho^{5/3}, \quad (31)$$

где

$$Q_1 = \int_0^\infty [1 - J_0(q)] q^{-8/3} dq.$$

2. $k\rho^2/L \gg 1$ ($\rho \gg \sqrt{\lambda L}$). Тогда

$$D_S = 4Q_1 \tilde{C}_0 k^2 L \rho^{5/3}. \quad (32)$$

Приведенные выше выражения получены для случая, когда $l_\epsilon \ll \rho \ll L$. Рассмотрим случай

$\rho \ll l_\epsilon$. При $\kappa \gg \kappa_m$ спектр быстро спадает, т.е. основной вклад дают флуктуации, для которых $\kappa < \kappa_m = 2\pi/l_\epsilon$. Тогда $\kappa\rho \ll 1$ и функцию Бесселя можно разложить в ряд по малому параметру $\kappa\rho$. В результате получаем

$$D_S(\rho, L) \cong \text{const} \cdot \rho^2 \kappa_m^2 + \dots \quad (33)$$

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

Будем полагать, что плоская световая волна распространяется в водной среде, в которой флуктуации оптического показателя преломления n определяются флуктуациями только одной компоненты, например, температуры, $n = -\alpha T'$, $\alpha = 2.6 \cdot 10^{-4}$ 1/град. Выражение, описывающее спектр $E_n(\kappa)$, имеет вид [25]

$$E_n(\kappa) = C_0 \alpha^2 \epsilon^{-1/3} \epsilon_T \left[1 + C_1 (\kappa\eta)^{2/3} \right] G_T(\kappa\eta), \quad (34)$$

где

$$G_T(\kappa\eta) = \exp \left\{ -A_T \left[1.5 C_1^2 (\kappa\eta)^{2/3} + C_1^3 (\kappa\eta)^2 \right] \right\},$$

$A_T = C_0 C_1^{-2} \text{Pr}^{-1}$, C_1 - постоянная Обухова-Коррзина.

Выражая спектр флуктуаций оптического показателя преломления через трехмерную спектральную плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости, после некоторых преобразований находим

$$\Psi_\chi(\rho, L) = \tilde{C}_0 k^{7/6} L^{11/6} \times \int_0^\infty J_0 \left(\sqrt{2\pi} \frac{\rho q}{\sqrt{\lambda L}} \right) \left(1 - \frac{\sin q^2}{q^2} \right) \times \left(1 + C_1 \tilde{q}^{2/3} \right) G_T(\tilde{q}) q^{-8/3} dq, \quad (35)$$

где $\tilde{q} = q\sqrt{2\pi\text{Pr}}/\kappa_B^T \sqrt{\lambda L}$. Однако прежде, чем анализировать зависимость корреляционной функции от параметра $\rho/\sqrt{\lambda L}$, определим при каких значениях величины $\sqrt{\lambda L}\kappa_B^T$ наиболее четко проявляется влияние вязко-конвективного интервала. Рассмотрим для этого осредненный квадрат флуктуаций уровня $\langle \chi^2 \rangle$, выражение для которого находится из (35), полагая $\rho = 0$:

$$\langle \chi^2 \rangle = \tilde{C}_0 k^{7/6} L^{11/6} \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin q^2}{q^2} \right) \times \left(1 + C_1 \tilde{q}^{2/3} \right) G_T(\tilde{q}) q^{-8/3} dq. \quad (36)$$

Результаты расчетов осредненного квадрата флуктуаций уровня, нормированного на величину

ну (30), которая характеризует флуктуации уровня в случае, когда $\Phi_T \approx \kappa^{-11/3}$, представлены на рис. 1. Видно, что для больших значений параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$ имеет место преобладающее влияние инерционно конвективного интервала спектра и кривая стремится к единице. При малых значениях параметра вклад вязко-диффузионного интервала является определяющим и кривая стремится к нулю.

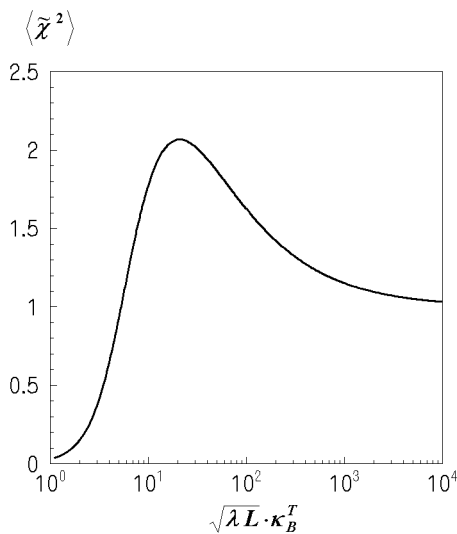


Рис. 1. Флуктуации уровня

Для промежуточных значений параметра кривая имеет ярко выраженную выпуклость и максимум при $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T \cong 21$. Этот подъем кривой связан с наличием вязко-конвективного интервала (интервал Бетчелора). Проведенные расчеты для случая, когда флуктуации диэлектрической проницаемости определяются флуктуациями солености, показали аналогичное поведение осредненного квадрата флуктуаций уровня. Максимальные значения наблюдаются при $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S \cong 17$, а само значение максимума существенно выше, что связано с большей протяженностью вязко-конвективного интервала. Отметим, что подобные результаты получены в работе [24] при рассмотрении распространения сферической волны в турбулентной водной среде.

Основываясь на полученных результатах, были проведены вычисления зависимости нормированной корреляционной функции флуктуаций уровня от параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$, используя выражение (35). Результаты представлены на рис. 2. Здесь кривая 1 соответствует значению $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S = 7$, кривая 2 – $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S = 20$, кривая 3 – $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S = 100$, кривая 4 –

$\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S = 1000$. Эти значения, как следует из рис. 1, характеризуют превалирующее влияние вязко-конвективного интервала спектра на осредненный квадрат флуктуаций уровня.

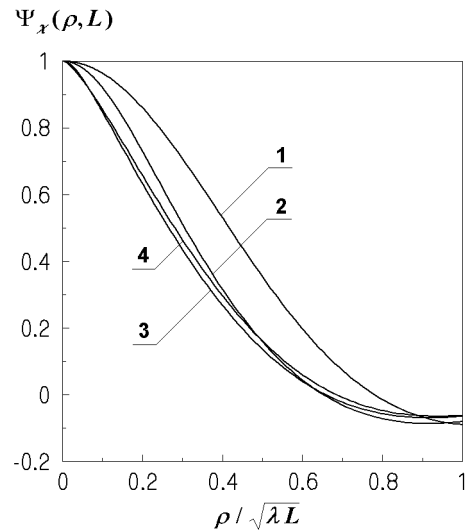


Рис. 2. Корреляционная функция флуктуаций уровня

Видно, что наибольшая ширина корреляционной функции $\Psi_\chi(\rho, L)$ соответствует $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S = 7$. Как показали расчеты, при уменьшении этого параметра ширина растет. Отметим, что эти значения (малые) соответствуют наибольшему вкладу вязко-диффузионного интервала, когда имеет место наиболее быстрое его спадание и ширина корреляционной функции становится наибольшей. По мере роста параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^S$ ширина становится меньше, что соответствует доминирующему влиянию вязко-конвективного интервала. При дальнейшем росте этого параметра преобладающим становится вклад инерционно-конвективного интервала и ширина корреляционной функции принимает промежуточные значения.

Аналогичные расчеты были проведены для случая, когда флуктуации диэлектрической проницаемости определяются флуктуациями солености. Выводы остаются такими же, отличия носят количественный характер.

Результаты согласуются с данными, представленными в работе [24], в которой рассматривалось распространение сферической волны в турбулентной водной среде.

Перейдем теперь к анализу структурной функции фазы. Общее выражение, описывающее эту величину, имеет вид (24). Для нормировки используем выражение (32), описывающее асимптотику структурной функции фазы для атмосферной тур-

булентности в случае $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$. Используя выражение (34), получаем после замены переменной $\kappa\rho = q$ следующее выражение для нормированной структурной функции фазы:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_S \tilde{\rho}^{-5/3} &= \frac{1}{2Q_1} \int_0^\infty [1 - J_0(q)] \times \\ &\times \left[1 + \frac{2\pi\tilde{\rho}^2}{q^2} \sin\left(\frac{q^2}{2\pi\tilde{\rho}^2}\right) \right] (1 + C_1 q_1^{2/3}) \times \\ &\times \exp\left[-A_T \left(1.5C_1^2 q_1^{4/3} + C_1^3 q_1^3\right)\right] q^{-8/3} dq, \end{aligned} \quad (37)$$

где $q_1 = q\sqrt{\rho\Gamma}/\rho\kappa_B^T$; $\tilde{\rho} = \rho/\sqrt{\lambda L}$. Для удобства последний параметр использовался в виде $\tilde{\rho} = \rho\kappa_B^T/\sqrt{\lambda L\kappa_B^T}$. Результаты расчетов представлены на рис. 3 для значений параметра $\sqrt{\lambda L\kappa_B^T} = 7$ (кривая 1); $\sqrt{\lambda L\kappa_B^T} = 15$ (кривая 2); $\sqrt{\lambda L\kappa_B^T} = 30$ (кривая 3); $\sqrt{\lambda L\kappa_B^T} = 150$ (кривая 4); $\sqrt{\lambda L\kappa_B^T} = 1000$ (кривая 5), для которых влияние вязко-конвективного интервала является доминирующим.

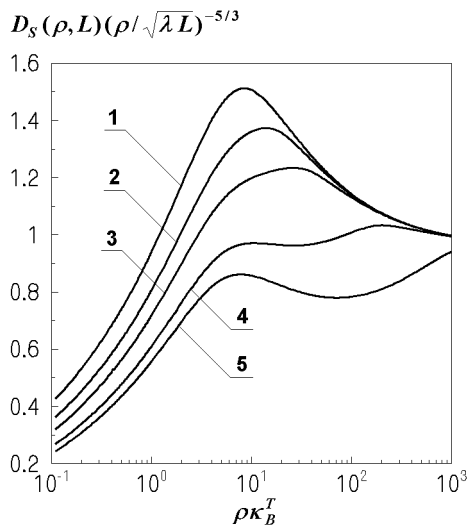


Рис. 3. Структурная функция фазы

При больших значениях ρ , $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$, структурная функция фазы стремится к асимптотической форме (32), которая соответствует доминирующему влиянию инерционно-конвективного интервала спектра, для которого $\Phi_T \approx \kappa^{-11/3}$. На графике это проявляется в том, что структурная функция стремится при этом к единице. При очень малых значениях ρ структурная функция стремится к своей асимптотической форме $D_S(\rho, L) \approx \rho^2$ (см. (33)), когда преобладает влияние вязко-диффузионного интервала и ее значения стремятся к нулю. Это соответствует малым

значениям $\rho\kappa_B^T$ на рис. 3. В промежуточной области наблюдается ярко выраженный подъем кривых. Эта область соответствует преобладающему влиянию вязко-конвективного интервала.

Аналогичные расчеты были выполнены для случая, когда флуктуации диэлектрической проницаемости определяются флуктуациями солености. Расчеты, как и в предыдущем случае, проводились для тех значений $\sqrt{\lambda L\kappa_B^T}$, для которых вклад вязко-конвективного интервала спектра в осредненный квадрат флуктуаций уровня является преобладающим. Выводы о поведении кривых совпадают с предыдущими. Отличие только в том, что подъем кривых выше, что объясняется большей протяженностью вязко-конвективного интервала по сравнению со случаем температурных флуктуаций.

Остановимся в заключение на влиянии внешнего масштаба турбулентностных флуктуаций на структурную функцию фазы. В использованной выше модели спектра отсутствует внешний масштаб. В то же время, экспериментальные данные о распространении световых волн в атмосфере свидетельствуют о заметном влиянии этого масштаба в реальных условиях, особенно при больших ρ , о чем упомянуто в разделе 1. Там же описаны типичные поправочные функции к спектру, которые учитывают отмеченное влияние. Ситуация существенно изменяется при распространении света в водной среде. Влияние вязко-конвективного интервала на подынтегральную функцию является преобладающим в общем выражении (24) и соответствующий спектр $\Phi_T \approx \kappa^{-3}$ оказывает больший эффект, чем спектр $\Phi_T \approx \kappa^{-11/3}$. В результате при умеренных ρ ($\rho < 10\eta$) (24)) влияние внешнего масштаба мало. Естественно, при больших ρ , когда доминирует влияние спектра $\Phi_T \approx \kappa^{-11/3}$ и $\tilde{D}(\rho, L) \cong (\rho/\sqrt{\lambda L})^{5/3}$, влияние внешнего масштаба сохраняется.

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ МОРСКОЙ ВОДЕ

В отличие от атмосферы, где изменения оптического показателя преломления определяются во многих случаях только флуктуациями температуры, в морской среде изменения зависят от флуктуаций температуры и солености. Известные зависимости показателя преломления от температуры и солености описываются полиномами высокой степени и являются достаточно громоздкими [28]. Ограничиваясь линейным приближением, за-

пишем для флуктуирующей части оптического показателя преломления

$$n = -\alpha T' + \beta S', \quad (38)$$

где $\alpha = 2.6 \cdot 10^{-4}$ 1 / град, $\beta = 1.75 \cdot 10^{-4}$ л/г.

В качестве модели спектра будем использовать модель, разработанную в работе [25]. Выражение для спектральной функции (спектра) флуктуаций оптического показателя преломления имеет вид

$$E_n(\kappa) = C_0 \epsilon^{-1/3} \kappa^{-5/3} \left[1 + C_1 (\kappa \eta)^2 \right] \Gamma(\kappa \eta), \quad (39)$$

где

$$\Gamma(\kappa \eta) = \alpha^2 \epsilon_T G_T(\kappa \eta) + \beta^2 \epsilon_S G_S(\kappa \eta) - 2\alpha\beta \epsilon_{TS} G_{TS}(\kappa \eta),$$

$$G_T(\kappa \eta) = \exp(-A_T \delta), G_S(\kappa \eta) = \exp(-A_S \delta),$$

$$G_{TS}(\kappa \eta) = \exp(-A_{TS} \delta),$$

$$\delta = 1.5 C_1^2 (\kappa \eta)^{2/3} + C_1^3 (\kappa \eta)^2, A_T = C_0 C_1^{-2} \text{Pr}^{-1},$$

$$A_S = C_0 C_1^{-2} \text{Sc}^{-1}, A_{TS} = 0.5 C_0 C_1^{-2} (\text{Pr}^{-1} + \text{Sc}^{-1}).$$

В работе [25] на основе градиентной гипотезы была осуществлена параметризация скоростей затухания ϵ_T , ϵ_S , ϵ_{TS} . Было показано, что в спектре флуктуаций E_n в зависимости от параметра $\omega = \alpha(dT_0/dz)/\beta(dS_0/dz)$, (здесь $T_0(z)$ и $S_0(z)$ - осредненные профили распределения температуры и солености соответственно), определяющего вклады флуктуаций температуры и солености в флуктуации оптического показателя преломления, могут возникать области аномального поведения, в частности, появляться локальные экстремумы. Это должно соответствующим образом проявляться в изменениях статистических характеристик световой волны, распространяющейся в указанной среде.

Рассмотрим сначала амплитудные характеристики. Выражение (23), описывающее корреляционную функцию флуктуаций уровня, после замены переменных $q^2 = \kappa^2 L/k$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi_\chi(\rho, L) &= \frac{C_0 \pi}{2} \epsilon^{-1/3} k^{7/6} L^{11/6} \times \\ &\times \int_0^\infty J_0 \left(\sqrt{2\pi} \frac{\rho q}{\sqrt{\lambda L}} \right) \left(1 - \frac{\sin q^2}{q^2} \right) \times \\ &\times \left(1 + C_1 \tilde{q}^{2/3} \right) \Gamma(\tilde{q}) q^{-8/3} dq, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\tilde{q} = \sqrt{2\pi \text{Pr} q} / \sqrt{\lambda L \kappa_B^T}$.

Используя введенную в работе [25] параметризацию скоростей затухания, представим множитель $\Gamma(\tilde{q})$ в виде

$$\Gamma(\tilde{q}) = \beta^2 \epsilon_S [\omega^2 \theta G_T(\tilde{q}) + G_S(\tilde{q}) - \omega(1 + \theta) G_{TS}(\tilde{q})].$$

Здесь $G_T(\tilde{q}) = \exp(-A_T \tilde{\delta})$; $G_S(\tilde{q}) = \exp(-A_S \tilde{\delta})$; $G_{TS}(\tilde{q}) = \exp(-A_{TS} \tilde{\delta})$; $\tilde{\delta} = 1.5 C_1^2 \tilde{\delta}^{2/3} + C_1^3 \tilde{\delta}^2$; $\theta = K_T/K_S$; K_T и K_S - турбулентные коэффициенты температуропроводности и диффузии соли соответственно.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим сначала поведение осредненного квадрата флуктуаций уровня в зависимости от параметра $\sqrt{\lambda L \kappa_B^T}$. Полагая $\rho = 0$ в (40), находим

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle &= \beta^2 \tilde{C}_0^* k^{7/6} L^{11/6} \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin q^2}{q^2} \right) \times \\ &\times \left(1 + C_1 \tilde{q}^{2/3} \right) \Gamma_T(\tilde{q}) q^{-8/3} dq, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\tilde{C}_0^* = \tilde{C}_0 \epsilon_S / \epsilon_T$.

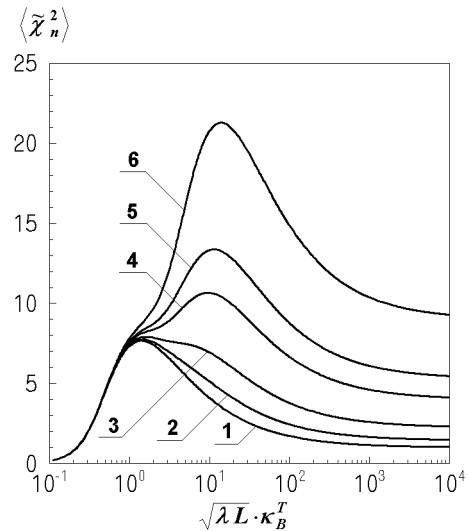


Рис. 4. Флуктуации уровня в зависимости от параметра ω

Результаты расчетов нормированной функции $\langle \tilde{\chi}^2 \rangle = \langle \chi^2 \rangle / 0.5 C_0 \pi \beta^2 \epsilon^{-1/3} \epsilon_S k^{7/6} L^{11/6} Q_0$ для разных значений параметра ω представлены на рис. 4. Здесь кривая 1 соответствует случаю $\omega = 0$, кривая 2 - $\omega = -0.2$, кривая 3 - $\omega = -0.5$, кривая 4 - $\omega = -0.7$, кривая 5 - $\omega = -1.0$, кривая 6 - $\omega = -2.0$. При расчетах полагалось, что турбулентные коэффициенты температуропроводности и диффузии соли равны друг другу, хотя в условиях океана могут иметь место различия между ними [29]. Такая ситуация может наблюдаться, например, при возникновении послойной конвекции в подогреваемой снизу жидкости, в которой существует устойчивый солевой градиент. Как показано в работах [29 - 31], отношения этих коэффициентов определяются величиной плотностного соотношения $R = \beta \Delta S_0 / \alpha \Delta T_0$ и при больших R

коэффициенты могут сильно отличаться друг от друга. В данной работе случаи, когда возникает дифференциально-диффузионная конвекция, не рассматриваются. Предполагается, что жидкость устойчива как по температуре, так и по солености. В этом случае можно считать [32, 33], что коэффициенты турбулентного обмена равны друг другу. Отметим, что различие в такой ситуации может возникнуть в случае, когда один скаляр является активным, а другой пассивным [34 – 36].

Из рис. 4 видно, что при $\omega = 0$, когда флуктуации показателя преломления определяются только флуктуациями солености, имеет место явко выраженный максимум при $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T \cong 1$, обусловленный наличием вязко-конвективного интервала спектра флуктуаций солености. При увеличении значений $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$ поведение $\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ определяется инерционно-конвективным интервалом и график стремится к единице, поскольку для нормировки было использовано выражение, аналогичное (30), которое описывает осредненный квадрат флуктуаций уровня, когда флуктуации подчиняются закону Обухова–Коррзина, $\Phi_\epsilon \approx \kappa^{-11/3}$, во всем спектральном диапазоне. При малых $\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ имеет место влияние вязко-диффузионного интервала и функция $\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ резко спадает. При появлении вклада флуктуаций температуры ($\omega = -0.2$) наблюдается подъем кривой в области $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T > 2$, который обусловлен влиянием вязко-конвективного интервала температурного спектра. При возрастании $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$ кривая стремится к пределу, отвечающему эффекту инерционно-конвективного интервала. Отметим, что этот предел превышает единицу, как в случае $\omega = 0$, что обусловлено выбранной нормировкой. Это же имеет место при других значениях ω . При увеличении вклада флуктуаций температуры влияние вязко-конвективного интервала температурного спектра возрастает и при $|\omega| > 0.5$ появляется второй локальный экстремум при $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T \cong 10$. Его положение соответствует положению максимума $\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ в случае, когда имеются только температурные флуктуации (см. рис. 1). При $|\omega| > 1.0$ значения максимумов значительно превышают значение максимума, соответствующего случаю $\omega = 0$.

Используя полученные результаты, проведены расчеты зависимости корреляционной функции флуктуаций уровня от $\rho / \sqrt{\lambda L}$ при различных значениях параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$. В отличие от рис. 2 здесь расчеты проводились для различных вкладов флуктуаций температуры и солености в флуктуации оптического показателя преломления.

На рис. 5 представлены результаты расче-

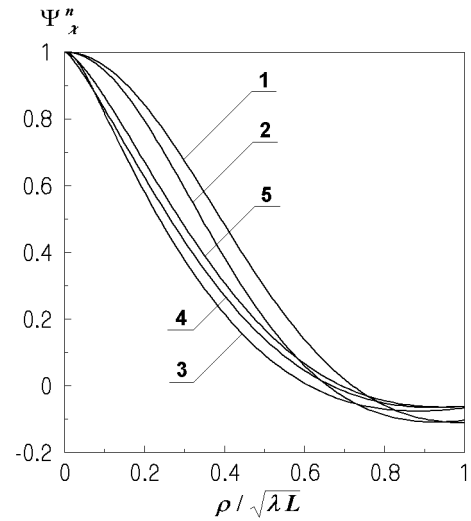


Рис. 5. Корреляционная функция флуктуаций уровня при $\omega = 0$

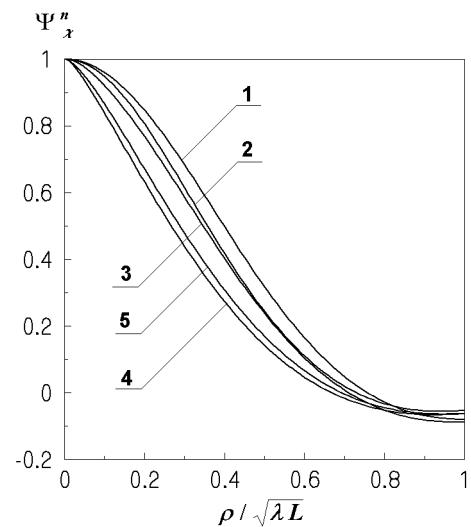


Рис. 6. Корреляционная функция флуктуаций уровня при $\omega = 0$

та функции Ψ_χ^n при $\omega = 0$ (имеются только флуктуации солености). Кривая 1 соответствует $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 0.7$; кривая 2 – 1.0; кривая 3 – 7.0; кривая 4 – 200; кривая 5 – 5000. Отметим, что значения параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$ соответствуют тем величинам, при которых $\langle \tilde{\chi}^2 \rangle$ принимает максимальные значения, обусловленные, как отмечалось в предыдущем разделе, влиянием вязко-конвективного интервала. При малых $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$, соответствующих преобладающему влиянию вязко-диффузионного интервала, в котором происходит наиболее быстрое спадание спектра, ширина корреляционной

функции наибольшая. Наименьшая ширина корреляционной функции соответствует доминирующему влиянию вязко-конвективного интервала (кривая 3). При больших значениях $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$, которые соответствуют превалирующему влиянию инерционно-конвективного интервала на флуктуации уровня, ширина корреляционной кривой принимает промежуточные значения.

При появлении вклада от температурных флуктуаций ($\omega \neq 0$) корреляционная функция претерпевает соответствующие изменения. Как показали расчеты, когда этот вклад невелик ($\omega = -0.2$), изменения небольшие, но уже наименьшая ширина корреляционной функции наблюдается при больших значениях $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$. При увеличении вклада флуктуаций температуры эта тенденция сохраняется и при $\omega = -2.0$ наименьшая ширина соответствует $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 200$ (см. рис. 6).

Важно отметить, что положение корреляционной функции, соответствующей значению параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 0.7$, при котором уже имеет место существенное влияние вязко-диффузионного интервала, практически не зависит от ω . Небольшие изменения наблюдаются только при больших $\rho/\sqrt{\lambda L}$ и достаточно большом вкладе флуктуаций температуры. Эти изменения становятся более заметными при увеличении значения параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$, и при $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 7$ они становятся наибольшими, что связано с существенным влиянием вязко-конвективного интервала температурного спектра. При дальнейшем росте указанного параметра изменения становятся менее заметными, но смещаются в область малых $\rho/\sqrt{\lambda L}$ в отличие от случаев, когда значение параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$ невелико и изменения имеются при больших $\rho/\sqrt{\lambda L}$. При $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 1000$ и более вид корреляционной функции перестает зависеть от ω . Эта ситуация соответствует превалирующему влиянию инерционно-конвективного интервала на флуктуации уровня.

Перейдем теперь к анализу структурной функции фазы. Общее выражение, описывающее эту функцию, имеет вид (24). Выражение для спектра флуктуаций оптического показателя преломления используем в виде (39). Исходя из асимптотической формы структурной функции фазы, описываемой выражением (32), представим эту функцию в виде

$$\tilde{D}_S(\rho, L) = D_S(\rho, L)/2\pi^2 \tilde{C}_0 k^2 L (\sqrt{\lambda L})^{5/3}.$$

После замены переменных $\kappa \rho = q$ получаем

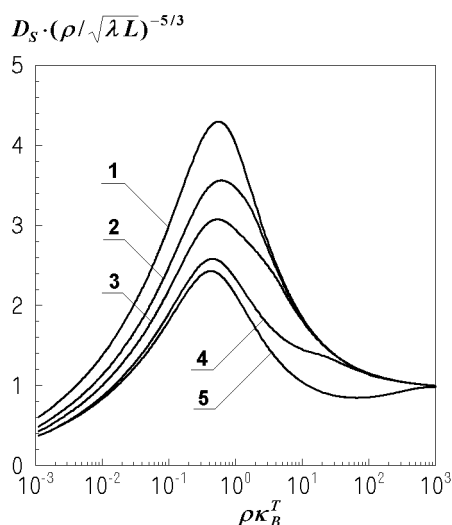
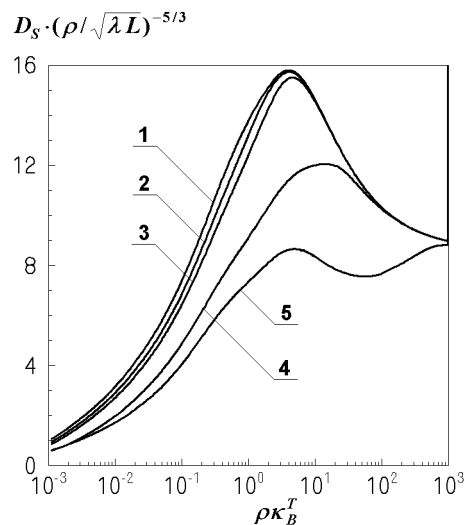
$$\begin{aligned} \tilde{D}_S(\rho, L) \tilde{\rho}^{-5/3} &= \frac{1}{2Q_1} \int_0^\infty [1 - J_0(q)] \times \\ &\times \left[1 + \frac{2\pi \tilde{\rho}^2}{q^2} \sin\left(\frac{q^2}{2\pi \tilde{\rho}^2}\right) \right] (1 + C_1 q_1^{2/3}) q^{-8/3} \times (42) \\ &\times [\omega^2 \theta G_T(q_1) + G_S(q_1) - \omega(1 + \theta) G_{TS}(q_1)] dq, \end{aligned}$$

где обозначения те же, что и в выражении (37).

Расчеты проводились для тех значений параметра $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$, для которых влияние вязко-конвективного интервала спектра флуктуаций солености на осредненный квадрат флуктуаций уровня было преобладающим. При больших ρ , $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$, структурная функция фазы стремится к своей асимптотической форме (32), которая соответствует инерционно-конвективному интервалу спектра и $\tilde{D}_S(\rho, L) \cong (\rho/\sqrt{\lambda L})^{5/3}$. Тогда при использовании этого выражения для нормировки графики структурной функции фазы должны стремиться к единице при больших ρ . При расчетах полагалось, что турбулентные коэффициенты теплопроводности и диффузии соли равны друг другу, т. е. $\theta = 1$. Результаты расчетов структурной функции фазы для случая, когда имеются только флуктуации солености ($\omega = 0$), представлены на рис. 7. Кривая 1 соответствует $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 0.7$; кривая 2 - $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 1.5$; кривая 3 - $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 3.0$; кривая 4 - $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 20$; кривая 5 - $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T = 500$.

Видно, что максимумы функций располагаются в области $\rho \kappa_B^T \approx 0.5$, что находится в соответствии с предыдущими результатами расчетов структурной функции фазы в случае, когда флуктуации оптического показателя преломления определяются только флуктуациями солености.

Расчеты показали, что при появлении малого вклада флуктуаций температуры ($\omega = -0.2$) вид структурных функций меняется незначительно, но уже наблюдаются изменения кривых в области $\rho \kappa_B^T \approx 5$, которые обусловлены вкладом флуктуаций температуры. При этом размер области максимальных значений становится больше, что объясняется влиянием вязко-конвективного интервала температурного спектра при $\rho \kappa_B^T \geq 5.0$. Кроме того, значения структурной функции фазы становятся больше, чем при $\omega = 0$, и все кривые при больших ρ , как и при вычислении корреляционной функции флуктуаций уровня, стремятся к величине, которая определяется вкладом инерционно-конвективного интервала спектра флуктуаций оптического показателя преломления.


 Рис. 7. Структурная функция фазы при $\omega = 0$

 Рис. 8. Структурная функция фазы при $\omega = -2.0$

При увеличении вклада флуктуаций температуры ($\omega = -0.5$) заметно меняется форма кривых, что проявляется в появлении локального подъема кривых в области умеренных значений $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^T$, равных 3 и 20. Более того, этот добавочный локальный подъем становится определяющим в поведении соответствующей структурной функции фазы. При дальнейшем увеличении вклада флуктуаций температуры в флуктуации n все кривые претерпевают существенные изменения. Ширина кривых значительно увеличивается за счет влияния вязко-конвективного интервала температурного спектра. Особенно это заметно при $\omega = -2.0$ (см. рис. 8), когда влияние указанного спектрального интервала становится доминирующим и кривые в области экстремумов обостряются. И самое характерное – положение экстремумов смещается в область больших значений $\rho \kappa_B^T$, соответствующих максимальным значениям осредненного квадрата флуктуаций уровня в случае присутствия только температурных флуктуаций, которые характеризуют влияние вязко-конвективного интервала температурного спектра. Здесь на рис. 8 обозначения те же, что и на рис. 7.

Смещение максимумов кривых в сторону больших $\rho \kappa_B^T$ при возрастании вклада температурных флуктуаций зависит от соотношения между радиусом первой зоны Френеля и масштабом Бетчелора температурного спектра. Когда радиус этой зоны мал, влияние вязко-конвективного интервала температурного спектра невелико. С ростом длины трассы, когда радиус первой зоны Френеля становится соизмерим с масштабом, характе-

ризующим указанный вязко-конвективный интервал, влияние температурных флуктуаций может стать определяющим.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены статистические характеристики плоской световой волны, распространяющейся в турбулентной водной среде, в которой присутствуют неоднородности температуры и солёности. В такой среде, примером которой может служить морская вода, флуктуации показателя преломления определяются флуктуациями температуры и солёности. Одно из важных отличий водной среды от атмосферы заключается в том, что молекулярные коэффициенты теплопроводности χ_T и диффузии соли χ_S значительно меньше, чем кинематический коэффициент вязкости ν . Это свойство водной среды обуславливает существование вязко-конвективных интервалов (интервалов Бетчелора) в спектрах флуктуаций температуры E_T и солёности E_S . В этих интервалах указанные спектры пропорциональны κ^{-1} в отличие от инерционно-конвективных интервалов (интервала Обухова–Коррзина), в котором спектры пропорциональны $\kappa^{-5/3}$. Вязко-конвективные интервалы спектров E_T и E_S ограничены снизу волновыми числами, определяемыми масштабами Бетчелора κ_B^T и κ_B^S , соответственно. Поскольку в водной среде $\chi_T \gg \chi_S$ нижние границы спектров отличны друг от друга, точнее $\kappa_B^S \gg \kappa_B^T$, это приводит к тому, что при $\kappa > \kappa_B$

спектр E_T быстро затухает (вязко-диффузионный интервал), но существуют флуктуации солености (вязко-конвективный интервал). Такое поведение скалярных величин может приводить к аномальному поведению спектра флуктуаций оптического показателя преломления в области больших волновых чисел. Впервые на такую возможность было указано в работе [24]. Влияние этих особенностей спектра E_n на статистические характеристики плоской волны изучено в работе [26]. Показано, что они могут сильно изменяться в зависимости от параметра $\omega = \alpha(dT_0/dz)/\beta(dS_0/dz)$, который характеризует вклады флуктуаций температуры и солености в флуктуации оптического показателя преломления. В этой работе использовалось приближение геометрической оптики, которое не учитывает дифракционные эффекты, и применение которого ограничено условием малости радиуса первой зоны Френеля по сравнению с характерным масштабом неоднородности, $\lambda L/l_\epsilon^2 \ll 1$, т.е. это приближение может быть использовано для сравнительно коротких трасс, особенно в водной среде.

В данной работе статистические характеристики световой волны, распространяющейся в турбулентной водной среде при наличии флуктуаций температуры и солености, находятся на основе метода плавных возмущений. Область применения данного метода значительно шире, чем метода геометрической оптики. Как было показано в работах [1, 3], этот метод применим, если выполняется условие $\lambda L/l_\epsilon^2 \ll (l_\epsilon/\lambda)^2$. Отметим, что, как и в методе геометрической оптики, длина волны должна быть значительно меньше, чем размер неоднородности. Кроме того, возмущения параметров световой волны должны быть малыми.

Видно, что условие применения метода плавных возмущений значительно слабее. Метод может применяться при достаточно больших L , когда имеет место влияние дифракционных эффектов. Здесь возникает новый параметр, характеризующий для заданной длины трассы вклад вязко-конвективного интервала температурного (соленостного) спектра. Им является произведение радиуса первой зоны Френеля и волнового числа Бетчелора, $\sqrt{\lambda L} \kappa_B^{T(S)}$. Этот параметр определяет, при каких L важен вклад от вязко-конвективного интервала, который приводит к существенному изменению статистических характеристик световой волны по сравнению со случаем ее распространения в атмосфере.

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.

2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 2. – М.: Наука, 1967. – 720 с.
3. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
4. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. – М.: Наука, 1975. – 171 с.
5. Lawrence R.S., Strohbehn J.W. A survey of clear-air propagation effects relevant to optical communication // Proc IEEE. – 1970. – 58. – P. 1523-1545.
6. Ranchev S. Random function and turbulence. – Oxford: Pergamon Press, 1971. – 444 p.
7. Зуев В.Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. – М.: Советское радио, 1970. – 496 с.
8. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1981. – 246 с.
9. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. Оптика турбулентной атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 271 с.
10. Hill R.J. Models of the scalar spectrum for turbulent advection // J. Fluid Mech. – 1978. – 88, No. 3. – P. 541-562.
11. Hill R.J., Clifford S.F. Modified spectrum of atmospheric temperature fluctuations and its applications to optical propagation // JOSA. – 1978. – 68, No. 7. – P. 892-899.
12. Andrews I.C., Phillips R.I., Hopen C.Y., Al-Habash V.F. Theory of optical scintillations // JOSA. – 1999. – A 16, No. 6. – P. 1417-1429.
13. Frehlich R. Laser scintillation measurements of the temperature spectrum in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. – 1992. – 49. – P. 1494-1509.
14. Tatarskii V.I., Dubovikov M.M., Praskovsky A.A., Karyakin M.Yu. Temperature fluctuation spectrum in the dissipation range for statistically isotropic turbulent flow // J. Fluid Mech. – 1992. – 238. – P. 683-698.
15. Rao R., Wang S., Liu X., Gong Zh. Turbulent spectrum effect on wave temporal-frequency spectra for light propagating through the atmosphere // JOSA. – 1999. – A 16, No. 11. – P. 2755-2762.
16. Voitikhovich V.V., Cuevas S. Adaptive optic and the outer scale of turbulence // JOSA. – 1995. – A 12, No.11. – P. 2523-2531.
17. Yura H.T. Optical beam spread in a turbulent medium: effect of the outer scale of turbulence // JOSA. – 1973. – 63, No.1. – P. 107-109.
18. Borgnino J. Estimation of the spatial coherence outer scale relevant to long baseline interferometry and imaging in optical astronomy // Appl. Opt. – 1990. – 29, No.13. – P. 1863-1865.
19. Consortini F., Ronchi L., Moroder E. Role of the outer scale of turbulence in atmospheric degradation of optical images // JOSA. – 1973. – 63, No.10. – P. 1246-1248.
20. Clifford S.F., Ochs G.B., Lawrence R.W. Saturation of optical scintillation by strong turbulence // JOSA. – 1974. – 64. – P. 148-154.
21. Hill R.J., Clifford S.F. Theory of saturation of optical scintillation by strong turbulence for arbitrary refractive-index spectra // JOSA. – 1981. – 71, No.6. – P. 675-686.
22. Flatte S.M., Gerber J.S. Irradiance-variance behavior by numerical simulation for plane-wave and spherical-wave propagation through strong turbulence // JOSA. – 2000. – A 17, No.6. – P. 1092-1097.

23. *Clifford S.F.* Temporal-frequency spectra for a spherical wave propagating through atmospheric turbulence // *JOSA.*–1971.– **61**, No.10.– P. 1285-1292.
24. *Hill R.J.* Optical propagation in turbulent water // *J. Opt. Soc. Amer.*– 1978.– **68**, No.8.– P. 1067-1072.
25. *Никишов В.В., Никишов В.И.* Спектр турбулентных флуктуаций оптического показателя преломления морской воды // *Прикладная гидромеханика.*– 1999.– **1(73)**, No.1.– С. 52-63.
26. *Никишов В.В., Олексюк В.В.* Распространение света в турбулентной водной среде // *Прикладная гидромеханика.*– 2002.– **1(73)**, No.1.– С. 52-63.
27. *Горелик Г.С.* Колебания и волны.– М: Физматгиз, 1959.– 572 с.
28. *Ruddick B.R., Shirtcliffe T.G.L.* Data for double diffusers: Physical properties of aqueous salt-sugar solutions // *Deep Sea Research.*– 1979.– **26A**, No.7.– P. 775-787.
29. *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана.– Л.: Гидрометеиздат, 1976.– 184 с.
30. *Huppert H.E.* On the stability of double-diffusive layers // *Deep-Sea Res.*– 1971.– **18**, No. 10.– P. 1005-1022.
31. *Huppert H.E., Turner J.S.* Double-diffusive convection and its implications for the thermocline and salinity structure of ocean and Lake Vanda // *J. Phys. Oceanogr.*– 1972.– **2**, No. 4.– P. 456-461.
32. *Yamada T., Mellor G.* A simulation of the Wangara atmospheric boundary layer data // *J. Atmos. Sci.*– 1975.– **32**.– P. 2309-2329.
33. *Freeman B.E.* Tensor diffusivity of a trace constituent in a stratified boundary layer // *J. Atmos. Sci.*– 1977.– **34**.– P. 124-136.
34. *Komori S., Nagata K.* Effects of molecular diffusivities on counter-gradient scalar and momentum transfer in strongly stable stratification // *J. Fluid Mech.*– 1996.– **324**.– P. 205-237.
35. *Pearson H.J., Puttock J.S., Hunt J.C.R.* A statistical model of fluid-element motion and vertical diffusion in a homogeneous stratified turbulent flow // *J. Fluid Mech.*– 1983.– **129**.– P. 219-249.
36. *Nagata K., Komori S.* The difference in turbulent diffusion between active and passive scalars in stable thermal stratification // *J. Fluid Mech.*– 2001.– **430**.– P. 361-381.