УДК 539.3

Динамическая задача для несжимаемого многослойного цилиндра с винтовой анизотропией. Сообщение 1. Теория

В. А. Ромащенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Получены точные аналитические решения одномерной динамической задачи для несжимаемого упругого радиально-неоднородного спирально-ортотропного толстостенного цилиндра в условиях плоской деформации, нагруженного нестационарным давлением изнутри и (или) снаружи. Установлены необходимые и достаточные условия существования, единственности и физической адекватности решений. Аналитически доказана сходимость волновых решений для слабосжимаемых цилиндров к полученным аналитическим зависимостям для несжимаемых.

Ключевые слова: спиральная ортотропия, несжимаемость, многослойный толстостенный цилиндр, динамика.

В технике широко используются конструкции в виде многослойных цилиндрических толстостенных оболочек, слои которых выполнены из спирально-армированных композитных материалов (КМ). В ряде случаев они деформируются упруго вплоть до разрушения. Обычно такие слои рассматриваются в цилиндрических координатах (x, φ, r) как спирально-ортотропные упругие среды, одна из главных осей анизотропии которых всегда совпадает с направлением радиальной координаты r, а две другие повернуты на некоторый угол армирования α относительно продольной x и окружной φ осей [1]. Угол армирования, плотность и упругие характеристики КМ могут быть кусочно-непрерывными функциями радиуса. В ряде случаев такие конструктивные элементы испытывают осесимметричное динамическое нагружение импульсом давления (внутренний взрыв и т.п.). Часто представление о нестационарном напряженно-деформированном состоянии (НДС) в подобных конструкциях можно получить на основании одномерных динамических расчетов для бесконечно длинных цилиндров в условиях плоской деформации [2–4]. Аналитические решения для сжимаемых материалов даже в случае изотропии весьма громоздкие и записываются либо в рядах, либо в виде несобственных комплексных интегралов, содержащих специальные цилиндрические функции [4]. Если сжимаемостью слоев можно пренебречь, то, как будет показано далее, решения удается записать в квадратурах в общем случае, а для многих частных видов нагружения и радиальной неоднородности, имеющих прикладное значение, – в элементарных функциях.

Точные одномерные аналитические решения для многослойных упругих полых цилиндров из изотропных несжимаемых материалов, нагружаемых нестационарным давлением, получены [3] путем развития подхода, описанного в [2]. В данной работе полученные ранее результаты [3] будут обобщены на случай слоев с винтовой ортотропией и произвольной радиальной неоднородностью.

Рассмотрим несжимаемый бесконечно длинный толстостенный однородный, неоднородный либо многослойный цилиндр в условиях плоской деформации, нагруженный импульсным осесимметричным давлением $P_1(t)$ на внутренней и $P_2(t)$ на наружной поверхностях, где t – время. В начальный момент времени $(t=0)$ цилиндр ненапряжен и неподвижен, контакт между слоями в случаях N-слойного цилиндра полагается идеальным. Уравнение движения в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии и плоской деформации имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где ρ – плотность материала в рассматриваемой точке; u – радиальное перемещение; σ_r, σ_φ – компоненты тензора напряжений.

Для компонент тензора деформаций выполняются геометрические соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \partial u/\partial r; \qquad \varepsilon_\varphi = u/r; \qquad \varepsilon_x = \gamma_{xr} = \gamma_{x\varphi} = \gamma_{r\varphi} = 0. \tag{2}$$

Касательные напряжения τ_{xr} и $\tau_{r\varphi}$ отсутствуют. Остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны между собой физическими уравнениями теории упругости спирально-ортотропного тела, которые в векторной форме можно записать так [5]:

$$\{\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_r, \gamma_{x\varphi}\} = [C]\{\sigma_x, \sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{x\varphi}\}. \tag{3}$$

Здесь квадратная матрица C размерности 4×4 симметрична $(C_{ij} = C_{ji})$, и ее элементы равны:

$$\begin{cases} c_{11} = \dfrac{\cos^4\alpha}{E_x} + \left(\dfrac{1}{4G_{x\varphi}} - \dfrac{v_{x\varphi}}{2E_x}\right)\sin^2 2\alpha + \dfrac{\sin^4\alpha}{E_\varphi}; \\ c_{12} = \left(\dfrac{1}{E_x} + \dfrac{1}{E_\varphi} + \dfrac{2v_{x\varphi}}{E_x} - \dfrac{1}{G_{x\varphi}}\right)\dfrac{\sin^2 2\alpha}{4} - \dfrac{v_{x\varphi}}{E_x}; \\ c_{13} = -\dfrac{v_{r\varphi}\sin^2\alpha + v_{rx}\cos^2\alpha}{E_r}; \\ c_{23} = -\dfrac{v_{r\varphi}\cos^2\alpha + v_{rx}\sin^2\alpha}{E_r}; \\ c_{14} = \left[2\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{E_\varphi} - \dfrac{\cos^2\alpha}{E_x}\right) + \left(\dfrac{1}{G_{x\varphi}} - \dfrac{2v_{x\varphi}}{E_x}\right)\cos 2\alpha\right]\dfrac{\sin 2\alpha}{2}; \\ c_{22} = \dfrac{\sin^4\alpha}{E_x} + \left(\dfrac{1}{4G_{x\varphi}} - \dfrac{v_{x\varphi}}{2E_x}\right)\sin^2 2\alpha + \dfrac{\cos^4\alpha}{E_\varphi}; \end{cases} \tag{4a}$$

$$
\begin{cases}
c_{24}=\left[2\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{E_\varphi}-\dfrac{\sin^2\alpha}{E_x}\right)-\left(\dfrac{1}{G_{x\varphi}}-\dfrac{2\upsilon_{x\varphi}}{E_x}\right)\cos 2\alpha\right]\dfrac{\sin 2\alpha}{2};\\
c_{33}=1/E_r; \qquad c_{34}=\dfrac{\upsilon_{rx}-\upsilon_{r\varphi}}{E_r}\sin 2\alpha;\\
c_{44}=\dfrac{\cos^2 2\alpha}{G_{x\varphi}}+\left(\dfrac{1}{E_x}+\dfrac{1}{E_\varphi}+\dfrac{2\upsilon_{x\varphi}}{E_x}\right)\sin^2 2\alpha,
\end{cases}
\tag{4б}
$$

где E_i, G_{ij}, υ_{ij} $(i, j = x, \varphi, r;\ i \neq j)$ – технические характеристики упругости ортотропного материала в главных осях анизотропии при нулевом угле армирования ($\alpha = 0$), т.е. в случае цилиндрической ортотропии.

Для любой ортотропной среды также выполняются три равенства [5]:

$$
E_i \upsilon_{ji} = E_j \upsilon_{ij}, \tag{5}
$$

и, следовательно, количество независимых упругих характеристик равно девяти.

Для несжимаемых материалов кроме (5) должны выполняться следующие три равенства:

$$
\upsilon_{ij} + \upsilon_{ik} = 1, \qquad i \neq j \neq k \neq i. \tag{6}
$$

Решая систему (5), (6) относительно υ_{ij}, получаем

$$
\upsilon_{ij} = \frac{1}{2} + \frac{E_i}{2E_j} - \frac{E_i^2 E_j}{2E_r E_x E_\varphi}. \tag{7}
$$

Таким образом, если в сжимаемом ортотропном теле есть девять независимых характеристик упругости [5], то в несжимаемом – шесть. Если за основные (базовые) принять модули Юнга и сдвига в соответствующих главных направлениях, то все коэффициенты поперечной деформации (Пуассона) однозначно можно определить по формулам (7).

Можно также показать, что для несжимаемого спирально-ортотропного материала элементы матрицы податливости (4) удовлетворяют тождественно по α следующим четырем равенствам:

$$
c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} = 0, \qquad m = 1, 2, 3, 4. \tag{8}
$$

Закон Гука (3) для плоской деформации (2) и несжимаемого спирально-ортотропного материала (4)–(8) можно преобразовать к виду

$$
\begin{cases}
\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = 0;\\
B(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) = 2A(\sigma_r - \sigma_\varphi);
\end{cases}
\tag{9а}
$$

$$\begin{cases} B\sigma_x = \sigma_\varphi (c_{14}c_{24} - c_{44}c_{12}) + \sigma_r (c_{14}c_{34} - c_{44}c_{13}); \\ B\tau_{x\varphi} = [c_{33}c_{24} - c_{22}c_{34} + c_{23}(c_{24} - c_{34})](\sigma_r - \sigma_\varphi), \end{cases} \tag{9б}$$

где

$$B = c_{44}c_{11} - c_{14}^2,$$
$$A = c_{44}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) + 2c_{23}c_{24}c_{34} - c_{22}c_{34}^2 - c_{33}c_{24}^2 \tag{10}$$

и все v_{ij} должны определяться согласно (7).

Подставим (2) в первое равенство (9), в результате чего получим дифференциальное уравнение для прогиба:

$$\partial u/\partial r + u/r = 0.$$

Решая последнее, находим

$$u(r, t) = Y(t)/r. \tag{11}$$

Рассмотрим случай, когда выполняется условие

$$AB > 0. \tag{12}$$

Как будет показано ниже, ситуация $AB \leq 0$ лишена физического смысла и будет приводить к парадоксальным либо неоднозначным решениям. При выполнении требования (12) из (2), (11) и второго уравнения (9) следует

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -BY(t)/(Ar^2). \tag{13}$$

Подставляя (11) и (13) в уравнение движения (1), имеем

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho \frac{Y''(t)}{r} + \frac{BY(t)}{Ar^3}. \tag{14}$$

Интегрируя (14) по r от внутреннего R_1 до внешнего R_2 радиуса оболочки с учетом граничных условий

$$\sigma_r(R_l, t) = -P_l(t), \qquad l = 1, 2, \tag{15}$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $Y(t)$:

$$Y'' + \omega^2 Y = F(t), \tag{16}$$

где

$$F(t) = [P_1(t) - P_2(t)]\, M^{-1}; \tag{17а}$$

$$M = \int_{R_1}^{R_2} \rho r^{-1} dr; \qquad \omega = \sqrt{M^{-1} \int_{R_1}^{R_2} BA^{-1} r^{-3} dr}; \tag{17б}$$

величины ρ, A и B внесены под знак интегрирования, так как могут зависеть от текущего радиуса.

Интегрируя (16) с нулевыми начальными условиями $Y(0) = Y'(0) = 0$, получаем [6]

$$Y(t) = \omega^{-1} \int_0^t F(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi. \tag{18}$$

Определив $Y(t)$, напряжения можно найти по следующей схеме. Из (14) и (16) следует

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = (F - \omega^2 Y) \frac{\rho}{r} + \frac{BY}{Ar^3}. \tag{19}$$

Интегрируя (19) по r от внутреннего радиуса R_1 до рассматриваемой точки, получаем

$$\sigma_r(r, t) = -P_1(t)[F(t) - \omega^2 Y(t)] \int_{R_1}^{r} \rho r^{-1} dr + Y(t) \int_{R_1}^{r} BA^{-1} r^{-3} dr. \tag{20}$$

После этого σ_φ определится из (13), σ_x и $\tau_{x\varphi}$ – из последних двух равенств (9), деформации – из (2) и (11):

$$\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_r = Y(t) / r^2.$$

Таким образом, поставленная задача для случая (12) решена полностью. Для довольно обширного класса функций нагрузок $F(t)$ временной интеграл (18) записывается в элементарных функциях [6]. Пространственные интегралы в (17), (20) также в ряде случаев вычисляются точно: например, для N-слойного цилиндра, когда ρ, A и B есть кусочно-постоянными вдоль радиальной координаты.

Рассмотрим случай

$$AB \le 0 \tag{21}$$

на примере однослойного полого несжимаемого цилиндра (плотность, угол армирования и упругие константы не зависят от r). Для определенности нагрузки $P_1(t)$ и $P_2(t)$ будем полагать такими, что $F(t) \ge 0$ и $0 < \int_0^\infty F(t) dt < \infty$. Как отмечалось выше, случай (21) лишен физического смысла. Если кроме требований положительности и ограниченности модулей упругости E_x, E_r, E_φ и модуля сдвига $G_{x\varphi}$ не накладывать на них дополнительных ограничений, то можно строго показать, что при выполнении (21) в несжимаемом цилиндре возможны следующие семь случаев.

1. $AB < 0$. Деформации и перемещения неограниченно возрастают с увеличением времени, напряжения определяются однозначно. Примером такого гипотетического материала может служить цилиндрически ортотропный материал, для которого $E_r/E_x = E_\varphi/E_x = 5$.

2. $B \neq 0$; $A = 0$. Деформации и перемещения тождественно равны нулю, все компоненты тензора напряжений определяются неоднозначно. Пример гипотетического материала – цилиндрически ортотропный, $E_r/E_x = E_\varphi/E_x = 4$.

3. $B = 0$; $c_{14} \neq 0$; $c_{44}c_{12} \neq c_{14}c_{24}$. Деформации и перемещения неограниченно возрастают с увеличением времени, напряжения определяются однозначно. Пример гипотетического материала – спирально-ортотропный, $\alpha = \pi/4$; $E_x/E_\varphi = 2$; $E_r/E_\varphi = 12$; $G_{x\varphi}/E_\varphi = 420$.

4. $B = 0$; $c_{14} \neq 0$; $c_{44}c_{12} = c_{14}c_{24}$. Деформации и перемещения ограничены, напряжения определяются неоднозначно – бесчисленное множество решений для σ_x и $\tau_{\varphi x}$. Пример гипотетического материала – спирально-ортотропный, $\alpha = \pi/6$; $E_x/E_r = 16$; $E_x/E_\varphi = 9$.

5. $B = c_{14} = c_{44} = 0$; $c_{13} \neq 0$. Деформации и перемещения неограниченно возрастают с увеличением времени, напряжения определяются однозначно. Пример гипотетического материала – спирально-ортотропный, $\alpha = \pi/6$; $E_\varphi/E_x = 2$; $E_\varphi/E_r = 6{,}5$; $E_\varphi/G_{x\varphi} = 1{,}5$.

6. $B = c_{14} = c_{44} = c_{13} = 0$. Деформации и перемещения ограничены, напряжения определяются неоднозначно – бесчисленное множество решений для $\tau_{\varphi x}$. Пример гипотетического материала – спирально-ортотропный, $\alpha = \pi/4$; $E_\varphi/E_r = E_x/E_r = 4$.

7. $B = c_{14} = c_{11} = 0$. Деформации и перемещения неограниченно возрастают с увеличением времени, напряжения определяются однозначно. Пример гипотетического материала – спирально-ортотропный, удовлетворяющий условиям: $E_\varphi/E_x = \mathrm{tg}^4\alpha$; $E_\varphi(1/G_{x\varphi} + 1/E_r) = \cos^2 2\alpha/\cos^4\alpha$; $\alpha \neq \pi n/4$; $n \in Z$.

Приведенные примеры гипотетических материалов, для которых будут реализовываться случаи 1–7, не единственны. Подробности доказательств указанных положений опущены. Таким образом, моделировать спирально-ортотропный материал в задачах с цилиндрической симметрией несжимаемым упругим телом можно только при выполнении условия (12). Если это требование не выполняется, то подобное моделирование может приводить либо к неустойчивым, либо к неоднозначным решениям.

Случаи 1–7, лишенные физического смысла, возникают вследствие особенностей, связанных с несжимаемостью упругого анизотропного материала. Классическая теория упругости анизотропной среды [5] построена в предположении положительной определенности удельной потенциальной энергии упругого деформирования W. Если материал несжимаем, то этот постулат нарушается: всегда можно подобрать такую нагрузку, при которой деформации будут тождественно равны нулю при ненулевых напряжениях, т.е. $W \equiv 0$, когда не все σ_i и τ_{ij} равны нулю. В случае существенно анизотропных несжимаемых материалов ситуация может измениться более резко: из-за требования (7) некоторые v_{ij} могут оказаться отрицательными, некоторые – больше единицы. Вследствие этого W может принимать даже отрицательные значения. При условии конечной работы внешних сил, т.е. энергии Э, полученной системой извне за время и в результате действия внешней нагрузки, упругая потенциальная энергия цилиндра $П$ будет отрицательной, а кинетическая энергия K – положительной. При этом кроме энергетического баланса ($Э = П + K$) будет выполняться

$$П \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty; \qquad K \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty. \tag{22}$$

Случаю (22) как раз и соответствуют вышеотмеченные случаи 1, 3, 5 и 7. В остальных случаях (2, 4, 6, а также (12)) удельная потенциальная энергия W может принимать нулевые значения на некоторых ненулевых тензорах напряжений, деформации и перемещения при этом однозначны и ограничены, а однозначное решение по напряжениям получается только в случае (12).

Таким образом, в случае цилиндров с винтовой анизотропией необходимым условием получения адекватных решений по модели несжимаемого материала является строгое неравенство (12). Путем предельного перехода можно показать, что (12) – также достаточное условие. На примере изотропного однородного цилиндра очертим кратко путь доказательства. В случае многослойных анизотропных оболочек выкладки усложняются, но суть доказательства при этом принципиально не изменяется.

Сформулируем краевую задачу для изотропного слабосжимаемого цилиндра в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{23}$$

где a – скорость распространения продольных волн, $a=\sqrt{\dfrac{2(1-v)G}{\rho(1-2v)}}$; v – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига.

Начальные условия таковы:

$$u = \partial u/\partial t = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0, \tag{24}$$

граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{1-2v}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=\frac{-P_l(t)}{2G} \qquad \text{при} \quad r = R_l, \quad l = 1, 2. \tag{25}$$

Можно проверить, что требование (12) для такой задачи удовлетворяется. Поскольку рассматривается случай v, близких к 1/2, обозначим:

$$\delta = \frac{1}{2} - v > 0. \tag{26}$$

Тогда для a будем иметь

$$a = \Omega/\sqrt{\delta}; \qquad \Omega = \sqrt{G(\delta + 0{,}5)/\rho}, \tag{27}$$

а граничные условия (25) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{2\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) = -P_l(t)/G; \qquad r = R_l, \qquad l = 1, 2. \tag{28}$$

Краевую задачу (23), (24), (28) решаем методом интегрального преобразования Лапласа по времени [7]:

$$\begin{cases} u(r, t) \Leftrightarrow U(r, s); \\ P_l(t) \Leftrightarrow \Phi_l(s), \quad l = 1, 2. \end{cases} \tag{29}$$

Уравнение движения (23) в изображениях (29) запишем так:

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r\frac{\partial U}{\partial r} - U\left(1 + \frac{s^2 r^2}{a^2}\right) = 0,$$

его общее решение таково:

$$U(r, s) = D_I(s) I_1(sr/a) + D_K(s) K_1(sr/a), \tag{30}$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя n-го порядка; $K_n(z)$ – функция Макдональда n-го порядка [8]; $D_I(s)$ и $D_K(s)$ – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Для их определения запишем граничные условия (28) в изображениях. С учетом известных свойств цилиндрических функций и их производных [8] получим

$$-\Phi_l(s)/G = D_I(s)\left[\frac{s}{2a\delta}(1 + 2\delta) I_0\left(\frac{sR_l}{a}\right) - \frac{2}{R_l} I_1\left(\frac{sR_l}{a}\right)\right] -$$

$$- D_K(s)\left[\frac{s}{2a\delta}(1 + 2\delta) K_0\left(\frac{sR_l}{a}\right) + \frac{2}{R_l} K_1\left(\frac{sR_l}{a}\right)\right], \qquad l = 1, 2. \tag{31}$$

При $\delta \to +0$ аргументы цилиндрических функций в (30) и (31) в силу (27) также будут бесконечно малыми порядка $\sqrt{\delta}$. Используя известные разложения цилиндрических функций в окрестности нуля [8] и решая систему (31), можно показать, что при малых δ будут выполняться оценки:

$$D_I(s) = O(\sqrt{\delta}\ln\delta); \tag{32a}$$

$$D_K(s)=\frac{2\Omega\sqrt{\delta}[\Phi_1(s)-\Phi_2(s)]}{G[s\ln(R_2/R_1)+4\Omega^2(R_1^{-2}-R_2^{-2})/s]}+O(\delta\ln\delta). \qquad (32б)$$

Подставляя (32) в (30) и используя разложения цилиндрических функций при малых аргументах, получаем

$$U(r,s)=\frac{\Phi_1(s)-\Phi_2(s)}{r\rho(s^2+\omega^2)\ln(R_2/R_1)}+O(\sqrt{\delta}\ln\delta), \qquad (33)$$

где $\omega=\sqrt{2G\rho^{-1}(R_1^{-2}-R_2^{-2})/\ln(R_2/R_1)}$, что совпадает с (17).

Обращение главной (конечной) части (33) совпадает с (11), (17), (18) [7]. Учитывая также непрерывность функции $u(r,t)$ по каждому из аргументов, приходим к выводу, что предельный переход $\upsilon\to 1/2-0$ приводит решение краевой задачи (23)–(25) к решению (11), (17), (18), что и требовалось доказать.

Как видно из (11), (17) и (18), действующие (активные) нагрузки в формулу для перемещения входят только в виде разности $[P_1(t)-P_2(t)]$. Таким образом, перемещения, а значит, и тензор деформаций в несжимаемом цилиндре не изменятся, если вместо граничных давлений $P_1(t)$ и $P_2(t)$ задать $[P_1(t)+f(t)]$ и $[P_2(t)+f(t)]$ соответственно ($f(t)$ – любая функция, одинаковая для внутренней и внешней поверхностей оболочки). Это подтверждает известный факт, что однозначно восстановить тензор напряжений в несжимаемом теле, зная только перемещения (либо деформации), невозможно. Так, например, равномерное обжатие цилиндра по внутренней и наружной поверхностям одновременно ($P_1(t)\equiv P_2(t)$) не приведет ни к каким перемещениям и деформациям, хотя тензор напряжений при этом, естественно, нулевым не будет. Однозначно определить напряжения в несжимаемом цилиндре, например по вышеизложенной схеме (20), можно, если известны силовые граничные условия.

Сходимость решений нестационарных краевых задач для цилиндров из слабосжимаемых материалов к полученным аналитическим зависимостям, справедливым в предположении несжимаемости, можно проиллюстрировать с привлечением численных методов интегрирования гиперболических краевых задач. Этому вопросу, а также некоторым инженерным приложениям полученных решений будет посвящено следующее сообщение.

Резюме

Отримано точні аналітичні розв'язки одновимірної динамічної задачі для нестисливого пружного радіально-неоднорідного спірально-ортотропного товстостінного циліндра в умовах плоскої деформації, що знаходиться під дією нестаціонарного тиску зсередини та (або) зовні. Установлено необхідні і достатні умови існування, єдиності і фізичної адекватності розв'язків. Аналітично доказано збіжність хвильових розв'язків для слабостисливих циліндрів до отриманих аналітичних залежностей для нестисливих.

1. *Григоренко Я. М.*, *Василенко А. Т.*, *Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
2. *Агабабян Е. Х.* Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки // Укр. математический журн. – 1953. – **5**, № 3. – С. 4 – 8.
3. *Лепихин П. П.*, *Деменко В. Ф.*, *Ромащенко В. А.*, *Бабич Ю. Н.* Напряженно-деформированное состояние двухслойных цилиндрических матриц для штамповки бризантными взрывчатыми веществами и электрогидравлической штамповки // Авіац.-косм. техніка і технологія. – 2002. – Вип. 33. – С. 118 – 127.
4. *Лепихин П. П.* Решение динамической задачи для двухслойного толстостенного цилиндра // Вопр. механики деформируемого твердого тела. – Харьков, 1977. – Вып. 1. – С. 55 – 60.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.
7. *Диткин В. А.*, *Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
8. *Никифоров А. Ф.*, *Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978. – 320 с.

Поступила 25. 05. 2005