

## **Экспериментальное обоснование аналитического метода определения верхних и нижних пределов критических нагрузок в ребристых оболочках**

**Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер**

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

*Разработан и описан метод определения верхних и нижних пределов параметров критических нагрузок в упругих ребристых оболочках. Экспериментально обоснованы критические параметры для цилиндрических оболочек с тремя типами подкреплений: перекрестными ребрами; только стрингерами и шпангоутами. Показано, что нижние пределы критических нагрузок значительно лучше согласуются с минимальными экспериментальными параметрами, чем верхние пределы критических нагрузок, определяемые по линейной безмоментной теории.*

**Ключевые слова:** эксперимент, аналитический метод, критические нагрузки, верхний и нижний пределы, ребристые оболочки.

**Введение.** Аналитические методы по сравнению с численными более удобны в исследованиях, так как позволяют по аналитическим выражениям проводить анализ критических нагрузок.

В данной работе используется подход [1], предполагающий докритическое состояние подкрепленной оболочки безмоментным и однородным. Аналогичный подход изложен в [2], где описана методика с применением уравнений смешанной формы, проанализированы восемь случаев потери устойчивости, определена минимальная верхняя критическая нагрузка и проведено ее сравнение с полученной в экспериментах. В [2] показано, что минимальные расчетные параметры критических нагрузок оказались значительно выше экспериментальных, что характерно для обычной классической теории устойчивости безмоментных оболочек при однородном докритическом состоянии.

В отличие от указанных работ ниже уточнены критические нагрузки, соответствующие уже 17 различным случаям потери устойчивости. Проведено сравнение верхних критических нагрузок [2, 3] с таковыми, полученными предложенным авторами методом. Дана оценка нижних пределов несущей способности подкрепленных оболочек и выполнено сопоставление их с экспериментальными результатами, полученными как в Украине (Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины), так и в США (Калифорнийский технологический институт), а также в других научных центрах. Особое внимание уделялось тем оболочкам, которые были рассчитаны на устойчивость с учетом начального поля несовершенств формы. Причем для их замеров и обработки были разработаны специальная аппаратура, а также методики анализа и описания начальных прогибов по всей поверхности испытываемых оболочек.

При разработке методов расчета тонкостенных подкрепленных оболочек на устойчивость используют следующие подходы:

1) конструктивно-ортотропная схема безмоментной оболочки, когда жесткостные характеристики ребер равномерно распределяются по обшивке. Подход использован в работах [4–6];

2) теория идеальных упругих тонкостенных ребристых оболочек при безмоментном однородном докритическом состоянии. Ее допущения и гипотезы полностью совпадают с обычными допущениями классической теории гладких оболочек, отличие состоит лишь в учете дискретности размещения ребер. Основные результаты и приемы описаны в работах [2, 3];

3) теория неидеальных тонкостенных ребристых оболочек при моментном неоднородном докритическом состоянии. Деформации могут быть как упругие, так и упругопластические. В этом случае второй подход является частным случаем третьего и используется как нулевое приближение в итерационных процессах, изложен он в работах [7–11];

4) оболочка и ребра могут рассматриваться как твердые деформируемые тела, т.е. как трехмерная среда. Это наиболее общий, точный и сложный подход [12–15].

Первые два подхода удобны тем, что позволяют разрабатывать простейшие аналитические методы расчета оболочек. Третий и четвертый подходы преимущественно требуют использования численных методов, например, таких, как метод конечного элемента и метод конечных разностей.

Во многих работах при анализе результатов расчетов их сравнение проводят по первому и второму подходам. Причем при использовании первого анализируют общую форму потери устойчивости, при использовании второго – рассматривают так называемые частные случаи потери устойчивости. Исходя из этого рассматривают различные случаи применимости теории конструктивно-ортотропных оболочек и, как правило, ее критикуют [2].

В настоящей работе при использовании первого подхода показано, что сравнение только общего случая потери устойчивости и частных неправильно, ибо приводит к заведомо неправильным выводам [2, 3]. Если при использовании этого подхода рассматривать те же частные случаи потери устойчивости, что и во втором подходе, то получим в основном аналогичные выводы. При этом параметры минимальных критических нагрузок будут отличаться не более чем на 11%.

Следовательно, две безмоментные схемы докритического состояния (первая и вторая) практически равноценны при определении параметров критических нагрузок.

**1. Методика аналитического расчета.** Ранее [16] был разработан метод уменьшенной жесткости, или метод нижнего предела для расчета нагрузок выпучивания в гладких оболочках. Затем авторы использовали его при расчете множества задач как для оболочек, подкрепленных стрингерами, так и шпангоутами. Обзор этих результатов представлен в работах [17–20]. С помощью аналогичного подхода были рассчитаны гладкие оболочки с осесимметричной кольцевой вмятиной [21, 22].

Впервые этот подход был распространен на подкрепленные оболочки с осесимметричными вмятинами [1]. В настоящей работе используется только основная гипотеза метода уменьшенной жесткости, которая определяет вклад

в потенциальную энергию деформации нелинейной составляющей окружающей мембранной энергии. Последняя является определяющей при оценке критических нагрузок идеальных оболочек, но в оболочках с несовершенствами формы ее влияние становится незначительным или отсутствует. Этот прием аналогичен подходу Доннелла [23].

Рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки длиной  $l$ , радиусом срединной поверхности  $r$  и толщиной  $t$ , подкреплённой ребрами жесткости в двух направлениях, под действием осевых сжимающих сил (рис. 1).

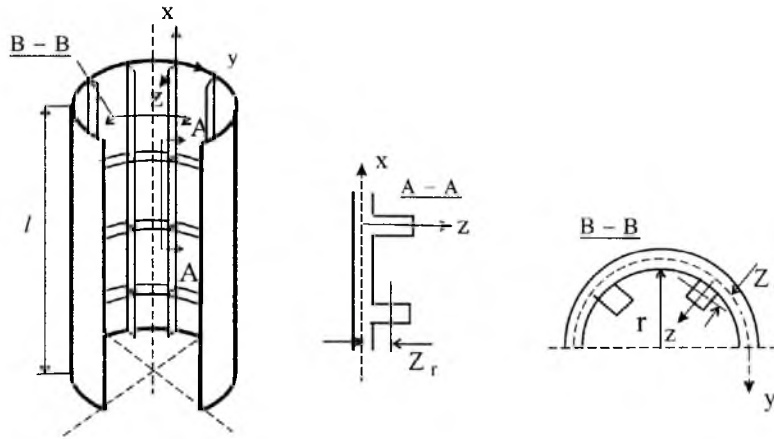


Рис. 1. Схема ребристой оболочки.

Деформации и кривизны срединной поверхности обшивки выражаются через компоненты перемещений следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r\partial\theta} - \frac{w}{r}; & \varepsilon_{x\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \chi_\theta = \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{r^2\partial\theta}; & \chi_{x\theta} = \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\theta}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$  – перемещения в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $w$  – нормальный прогиб;  $\theta = y/r$ .

Деформации ребер определяются по формулам:

$$\varepsilon_{xs} = \varepsilon_x - z_s \chi_x, \quad \chi_{xs} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{x\theta s} = \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\theta}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_\theta - z_r \chi_\theta, \quad \chi_{\theta r} = \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{r^2\partial\theta}, \quad \chi_{x\theta r} = \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\theta} + \frac{\partial u}{r\partial\theta}. \quad (3)$$

Усилия  $N_x$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{x\theta}$  и моменты  $M_x$ ,  $M_\theta$ ,  $M_{x\theta}$  связаны с деформациями и кривизнами соотношениями:

$$\begin{cases} N_x = K(\alpha_x \varepsilon_x + \mu \varepsilon_\theta - \delta_s \chi_x); & M_x = D(\beta_x \chi_x + \mu \chi_\theta); \\ N_\theta = K(\mu \varepsilon_x + \alpha_\theta \varepsilon_\theta - \delta_r \chi_\theta); & M_\theta = D(\mu \chi_x + \beta_\theta \chi_\theta); \\ N_{x\theta} = \frac{1-\mu}{2} K \varepsilon_{x\theta}; & M_{x\theta} = (1-\mu) D \left[ (1 + \beta_{x\theta}) \chi_{x\theta} + \beta_{x\theta r} \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $F_s, I_{\theta s}, I_{kps}, z_s$  – соответственно площадь поперечного сечения, момент инерции, момент инерции при кручении и эксцентриситет  $s$ -го стрингера (расстояние от оси стрингера до срединной поверхности обшивки);  $n_s$  – число стрингеров;  $l_s$  – расстояние между стрингерами,  $l_s = 2\pi r/n_s$ ;  $F_r, I_{xr}, I_{kpr}, z_r, n_r, l_r$  – аналогичные величины для шпангоутов,  $l_r = l/(n_r + 1)$ ;

$$K = Et/(1 - \mu^2); \quad D = Kt^2/12; \quad \alpha_{1s} = F_s/tl_s; \quad \alpha_s = \frac{E_s F_s}{Kl_s}; \quad \alpha_x = 1 + \alpha_s;$$

$$\beta_x = 1 + \beta_s; \quad \beta_s = \frac{E_s I_{xs}}{Dl_s}; \quad \delta_s = z_s \alpha_s; \quad \alpha_1 = 1 + \alpha_{1s}; \quad \alpha_r = \frac{E_r F_r}{Kl_r};$$

$$\alpha_\theta = 1 + \alpha_r; \quad \beta_\theta = 1 + \beta_r; \quad \beta_r = \frac{E_r I_{\theta r}}{Dl_r}; \quad \delta_r = z_r \alpha_r;$$

$$\beta_{x\theta} = \beta_{x\theta s} + \beta_{x\theta r}; \quad \beta_{x\theta s} = 6I_{kps}/t^3 l_s; \quad \beta_{x\theta r} = 6I_{kpr}/t^3 l_r.$$

Оболочка подвержена равномерному продольному сжатию и в ней в безмоментном основном состоянии возникают продольные усилия

$$N_x^F = -\sigma t \alpha_1, \quad N_\theta^F = 0, \quad (5)$$

где  $\sigma$  – докритическое сжимающее нормальное напряжение.

Расчетные формулы получены энергетическим методом. Полную потенциальную энергию рассматриваемой системы  $V$  запишем как сумму потенциальных энергий  $V_2$  и  $A_2$ :

$$V = V_{2b} + V_{2s} + V_{2r} + A_2 = V_2 + A_2; \quad (6)$$

$$A_2 = A_{2cl} \quad \text{или} \quad A_{2rsm} \quad (7)$$

( $A_{2cl}$  – для задач устойчивости,  $A_{2rsm}$  – для задач о несущей способности).

Здесь  $V_{2b}, V_{2s}$  и  $V_{2r}$  – потенциальная энергия соответственно обшивки, стрингеров и шпангоутов,

$$V_{2b} = \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ (\varepsilon_x + \varepsilon_\theta)^2 - 2(1 - \mu) \left( \varepsilon_x \varepsilon_\theta - \frac{\varepsilon_{x\theta}^2}{4} \right) \right] r dx d\theta +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [(\chi_x + \chi_\theta)^2 - 2(1-\mu)(\chi_x \chi_\theta - \chi_{x\theta}^2)] r dx d\theta; \quad (8)$$

$$V_{2s} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ \frac{E_s F_s}{l_s} \varepsilon_{xs}^2 + \frac{E_s I_s}{l_s} \chi_{xs}^2 + \frac{G_s I_{kps}}{l_s} \chi_{x\theta s}^2 \right] r dx d\theta; \quad (9)$$

$$V_{2r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ \frac{E_r F_r}{l_r} \varepsilon_{\theta r}^2 + \frac{E_r I_r}{l_r} \chi_{\theta r}^2 + \frac{G_r I_{kpr}}{l_r} \chi_{x\theta r}^2 \right] r dx d\theta; \quad (10)$$

$$A_{2cl} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [(N_x^F \varepsilon_x'' + n_{x\theta}'' E_x^F) + (N_\theta^F \varepsilon_\theta'' + n_\theta'' E_\theta^F)] r d\theta dx; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A_{2rsm} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [(N_x^F \varepsilon_x'' + n_{x\theta}'' E_x^F) + N_\theta^F \varepsilon_\theta''] r d\theta dx = \\ &= A_{2cl} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l n_\theta'' E_\theta^F r d\theta dx, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} N_x^F = K(\alpha_x E_x^F + \mu E_\theta^F); & N_\theta^F = K(\mu E_x^F + \alpha_\theta E_\theta^F); \\ n_x'' = K(\alpha_x \varepsilon_x'' + \mu \varepsilon_\theta''); & n_\theta'' = K(\mu \varepsilon_x'' + \alpha_\theta \varepsilon_\theta''); \\ \varepsilon_x'' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; & \varepsilon_\theta'' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2; & (E_x^F, E_\theta^F) = -\frac{\sigma}{E} \alpha_1 B_{11}(1-\mu); \\ B_{11} = (1-\mu^2)/(\alpha_x \alpha_\theta - \mu^2). \end{cases} \quad (13)$$

Запишем выражения для потенциальной энергии  $V_2$  в перемещениях. Для этого в уравнения (8)–(10) подставим значения деформаций и кривизн (1)–(3) и получим выражения для составляющих, входящих в (6):

$$\begin{aligned} V_{2b} &= \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} r dx d\theta + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dx d\theta; \end{aligned}$$

$$V_{2s} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ \frac{E_s F_s}{l_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{E_s I_s}{l_s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{G_s I_{kps}}{r^2 l_s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right] r dx d\theta;$$

$$V_{2r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{E_r F_r}{l_r r^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{z_r}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{E_r I_r}{l_r r^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{G_r I_{kpr}}{l_r r^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dx d\theta.$$

Исходя из (6) для потенциальной энергии  $V_2$  получаем зависимость

$$V_2 = \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ (1 + \alpha_s) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{1 + \alpha_r}{r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \mu}{2} \left( \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \alpha_s z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha_r \frac{z_r^2}{r^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2z_r}{r^3} \alpha_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right] r dx d\theta + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ (1 + \beta_s) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1 + \beta_r}{r^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1 - \mu}{r^2} (2 + \beta_{x\theta}) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + (1 - \mu) \beta_{x\theta r} \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] r dx d\theta. \quad (14)$$

Преобразуем потенциальную энергию  $A_2$ . При использовании зависимостей (5) и (13) получим

$$A_{2cl} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [N_x^F \varepsilon_x'' + K(\alpha_x \varepsilon_x'' + \mu \varepsilon_\theta'') E_x^F + K(\mu \varepsilon_x'' + \alpha_\theta \varepsilon_\theta'') E_\theta^F] r d\theta dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l [(\underline{N_x^F} \varepsilon_x'' + \underline{K(\alpha_x E_x^F + \mu E_\theta^F)} \varepsilon_x'' + \underline{K(\mu E_x^F + \alpha_\theta E_\theta^F)} \varepsilon_\theta'')] r d\theta dx,$$

где подчеркнутые выражения – это продольные усилия  $N_x^F$  и  $N_\theta^F$ , поэтому

$$A_{2cl} = \int_0^{2\pi} \int_0^l N_x^F \varepsilon_x'' r dx d\theta = -\frac{K}{2} \frac{\sigma}{E} (1 - \mu^2) \alpha_1 \int_0^{2\pi} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 r dx d\theta; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_{2rsm} &= A_{2cl} - \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l E_\theta^F (\mu \varepsilon_x'' + \alpha_\theta \varepsilon_\theta'') r dx d\theta = \\ &= A_{2cl} - \frac{K}{2} \frac{\sigma}{E} B_{11} \alpha_1 \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \alpha_\theta \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \mu r dx d\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для компонент перемещений, удовлетворяющих условия шарнирного опирания, выбираем в виде

$$\begin{cases} u = \cos \lambda x / r (u_{1ij} \cos i_1 \theta + u_{2ij} \sin i_2 \theta); \\ v = \sin \lambda x / r (v_{1ij} \sin i_1 \theta + v_{2ij} \cos i_2 \theta); \\ w = \sin \lambda x / r (w_{1ij} \cos i_1 \theta + w_{2ij} \sin i_2 \theta), \end{cases} \quad (17)$$

где  $u_{1ij}, v_{1ij}, w_{1ij}, u_{2ij}, v_{2ij}, w_{2ij}$  – произвольные постоянные;  $\lambda = j\pi r/l$  ( $j$  – число полуволн по длине,  $i_1, i_2$  – число окружных волн). Функции  $u_{1ij}, v_{1ij}, w_{1ij}$  описывают изгиб ребер,  $u_{2ij}, v_{2ij}, w_{2ij}$  – их кручение, причем используются они раздельно, а не вместе. В последующих формулах индексы 1 и 2 опускаются.

После подстановки выражений (17) в (14)–(16) получим

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{K\pi l}{4r} \left\{ u_{ij}^2 \lambda^2 \alpha_x - 2\mu u_{ij} \lambda (v_{ij} i - w) + \frac{1-\mu}{2} (-u_{ij} i + v_{ij} \lambda)^2 + \right. \\ &+ (1 + \alpha_r)(i v_{ij} - w_{ij})^2 - \alpha_{sz} z_{sr} \lambda^2 w_{ij} (-z_{sr} \lambda^2 w_{ij} + 2\lambda u_{ij}) - \\ &- z_{rr}^2 \alpha_r (-i^2 w_{ij} + i v_{ij})^2 - 2z_{rr} \alpha_r (-i^2 w_{ij} + i v_{ij})(i v_{ij} - w_{ij}) + \\ &+ \frac{1}{a} [\lambda^4 \beta_x w_{ij}^2 + \beta_\theta (v_{ij} i - w_{ij} i^2)^2 + 2\mu \lambda^2 w_{ij} (i^2 w_{ij} - i v_{ij}) + \\ &\left. + (1 - \mu)(2 + \beta_{x\theta}) i^2 \lambda^2 w_{ij}^2 + (1 - \mu) \beta_{x\theta r} i u_{ij} (2i \lambda w_{ij} + i u_{ij}) \right\}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$A_{2cl} = -\frac{K\pi l}{4r} \frac{\sigma}{E} (1 - \mu^2) \alpha_{1x} \lambda^2 w_{ij}^2; \quad (19)$$

$$A_{2rsm} = -\frac{K\pi l}{4r} \frac{\sigma}{E} \alpha_{1x} \lambda^2 [(2 - \mu^2) \lambda^2 + \alpha_\theta \mu i^2] w_{ij}^2. \quad (20)$$

Из условий экстремума полной потенциальной энергии системы имеем систему алгебраических уравнений для определения критических значений нагрузок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_{ij}} = & \alpha_x \lambda^2 u_{ij} - \mu \lambda (iv_{ij} - w_{ij}) - \frac{1-\mu}{2} i(-iu_{ij} + \lambda v_{ij}) - z_{sr} \alpha_s \lambda^3 w_{ij} + \\ & + \frac{1}{a} (u_{ij} + \lambda w_{ij}) (1-\mu) \beta_{x\theta r} i^2 = 0; \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial v_{ij}} = & -\mu \lambda i u_{ij} + \frac{1-\mu}{2} \lambda (-iu_{ij} + \lambda v_{ij}) + \alpha_\theta i (iv_{ij} - w_{ij}) + \\ & + \alpha_r z_{rr}^2 i (iv_{ij} - i^2 w_{ij}) - \alpha_r z_{rr} i (-i^2 w_{ij} + 2iv_{ij} - w_{ij}) + \\ & + \frac{1}{a} [\beta_\theta i^2 (v_{ij} - iw_{ij}) - \mu i \lambda^2 w_{ij} + (1-\mu) \lambda^2 (-iw_{ij} + v_{ij})] = 0; \end{aligned} \quad (21б)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial w_{ij}} = & \mu \lambda u_{ij} - \alpha_\theta (iv_{ij} - w_{ij}) - \alpha_s z_{sr} \lambda^2 (\lambda u_{ij} - z_{sr} \lambda^2 w_{ij}) - \\ & - \alpha_r z_{rr}^2 i^2 (iv_{ij} - i^2 w_{ij}) + \alpha_r z_{rr} i (i^2 v_{ij} - 2iw_{ij} + v_{ij}) + \\ & + \frac{1}{a} [\lambda^4 \beta_x w_{ij} - \beta_\theta i^2 (iv_{ij} - i^2 w_{ij}) + \mu \lambda^2 (2i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + \\ & + (1-\mu)(2 + \beta_{x\theta}) i^2 \lambda^2 w_{ij} + (1-\mu) \beta_{x\theta r} i^2 \lambda u_{ij}] - \frac{\sigma}{E} A_{33}'' w_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (21в)$$

Запишем (21) в виде

$$\begin{cases} A_{11} u_{ij} + A_{12} v_{ij} + A_{13} w_{ij} = 0; \\ A_{21} u_{ij} + A_{22} v_{ij} + A_{23} w_{ij} = 0; \\ A_{31} u_{ij} + A_{32} v_{ij} + (A_{33} - (\sigma/E) A_{33}'') w_{ij} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\begin{cases} A_{11} = \alpha_x \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} i^2 + \frac{1}{a} (1-\mu) \beta_{x\theta r} i^2; \\ A_{12} = -i \lambda \frac{1+\mu}{2}; \\ A_{13} = \lambda (\mu - \alpha_s z_{sr} \lambda^2) + \frac{1}{a} (1-\mu) i^2 \lambda \beta_{x\theta r}; \end{cases} \quad (23a)$$



$$\begin{cases}
 A_{22} = \frac{1-\mu}{2}\lambda^2 + c_\theta i^2 + \frac{1}{a}[i^2\beta_\theta + 2(1-\mu)\lambda^2]; \\
 A_{23} = -i - i\alpha_r(1-z_{rr})(1-i^2z_{rr}) - \frac{i}{a}[\beta_\theta i^2 + (2-\mu)\lambda^2]; \\
 A_{33} = 1 + \frac{1}{a}[\beta_x\lambda^4 + \beta_\theta i^4 + \lambda^2 i^2(2 + (1-\mu)\beta_{x\theta})] + \\
 \quad + \alpha_s z_{sr}^2 \lambda^4 + \alpha_r(1-z_{rr}i^2)^2; \\
 (A_{33}'' )_{cl} = (1-\mu^2)\alpha_1\lambda^2; \\
 (A_{33}'' )_{rsm} = (A_{33}'' )_{cl} + \frac{1}{2}B_{11}\alpha_1(\lambda^2\mu + i^2\alpha_\theta)\mu; \\
 z_{sr} = z_s/r; \quad z_{rr} = z_r/r; \quad c_\theta = 1 + \alpha_r(1-z_{rr})^2; \\
 a = 12r^2/t^2.
 \end{cases} \quad (236)$$

Из условия существования решений полученной системы уравнений (22) находим критические напряжения потери устойчивости:

$$\left(\frac{\sigma}{E}\right)_{cr} = \frac{1}{(A_{33}'' )_{cl}} \left[ A_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right] \quad (24)$$

и величину напряжения для оценки несущей способности оболочек:

$$\left(\frac{\sigma}{E}\right)_{rsm} = \frac{1}{(A_{33}'' )_{rsm}} \left[ A_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right]. \quad (25)$$

**2. Результаты расчетов минимальных параметров верхних критических нагрузок и их сравнение с известными данными.** По предложенной методике были выполнены расчеты оболочек [3, табл. 9.4], имеющих следующие безразмерные параметры:  $l/r = 2,1$ ;  $r/t = 400$ . Оболочки 3 и 4 подкреплены стрингерами уголкового профиля размером  $6 \times 4 \times 0,5$  мм, оболочки 7 и 8 – также стрингерами размером  $12 \times 4 \times 0,5$  мм (нумерация оболочек соответствует табл. 9.4 в [3]). Число стрингеров  $n_s = 32$ , число шпангоутов  $n_r = 4$ . Сечение шпангоутов – уголок размером  $6 \times 6 \times 0,5$  мм. Продольные ребра прикреплялись широкой полкой с внешней стороны оболочки, кольцевые – узкой полкой с внутренней стороны. Толщина стенки оболочки  $t = 0,5$  мм. Все соединения выполнены с помощью точечной электросварки. Модуль упругости материала  $E$  (АМг6М) принимался равным  $6,8 \cdot 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Было рассмотрено 17 вариантов расчета, соответствующих различным формам потери устойчивости оболочки. Для этого введена следующая их классификация. В специально разработанной программе расчета ORT\_GMS для описания основных характеристик использовались признаки  $P_i$ , где  $i$  изменяется от 1 до 6. Первые признаки  $P_1, P_2, P_3$  гарантируют учет

жесткости стрингеров при растяжении–сжатии, изгибе, крутильной жесткости соответственно, вторые признаки  $P_4, P_5, P_6$  – то же для шпангоутов. Если любой из признаков равен нулю, то соответствующая ему величина в расчете не учитывается.

Исследовались следующие случаи потери устойчивости.

Общий: все стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие, изгиб и кручение и восемь частных, каждый из которых имеет свой подслучай.

Первый: стрингеры работают на растяжение–сжатие и изгибаются, шпангоуты работают аналогично общему случаю; первый подслучай отличается от первого случая тем, что в нем не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии.

Второй: стрингеры только закручиваются, шпангоуты учитываются аналогично общему случаю; второй подслучай отличается от второго случая тем, что в нем не учитывается жесткость шпангоутов при растяжении–сжатии.

Третий: стрингеры работают как в общем случае, а в шпангоутах не учитывается жесткость при кручении; третий подслучай отличается от третьего случая тем, что дополнительно не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии.

Четвертый: стрингеры работают как в общем случае, шпангоуты работают только на кручение; четвертый подслучай аналогичен четвертому случаю, но в нем не учитывается жесткость стрингеров при растяжении–сжатии.

Пятый: стрингеры работают на растяжение, сжатие и изгиб, шпангоуты – только на кручение; пятый подслучай аналогичен пятому случаю, но в нем не учитывается жесткость стрингеров при растяжении–сжатии.

Шестой: стрингеры только закручиваются, шпангоуты работают на растяжение–сжатие и изгиб; шестой подслучай аналогичен шестому случаю, но в нем не учитывается жесткость шпангоутов при растяжении–сжатии.

Седьмой: стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие и изгиб; седьмой подслучай аналогичен седьмому случаю, но в нем не учитывается жесткость при растяжении–сжатии как стрингеров, так и шпангоутов.

Восьмой: стрингеры и шпангоуты только закручиваются; в восьмом подслучае учитываются только ограничения на вид деформации.

Далее эти случаи обозначим следующим образом: 0(111-111); 1(110-111); 2(001-111); 3(111-110); 4(111-001); 5(110-001); 6(001-110); 7(110-110); 8(001-001). Аналогично обозначим и подслучаи со своими  $P_i$ .

Для каждого случая потери устойчивости применяются специальные условия, которые накладываются на число волн и полуволн, связанных с числом ребер [2, 3]. Эти условия следующие для каждого случая (для подслучаев они те же, что и для соответствующего случая): общий ( $2i \neq t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$ ); первый ( $2i = t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$ ); второй ( $2i = t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$ ); третий ( $2i \neq t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$ ); четвертый ( $2i \neq t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$ ); пятый ( $2i = t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$ ); шестой ( $2i = t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$ ); седьмой ( $2i = t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$ ); восьмой ( $2i = t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$ ), где  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $t_1 = 1, 2, 3, \dots$ .

Поскольку в [2] не учитывается работа стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии, то и число рассматриваемых частных случаев в два раза меньше. Всего имеем 17 возможных случаев деформации, для которых определяются безразмерные величины  $p = \sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  – параметра верхнего критического напряжения, отнесенного к  $\sigma_{cl} = 0,605 Et/r$ .

Результаты расчетов представлены на рис. 2 для восьми основных случаев.

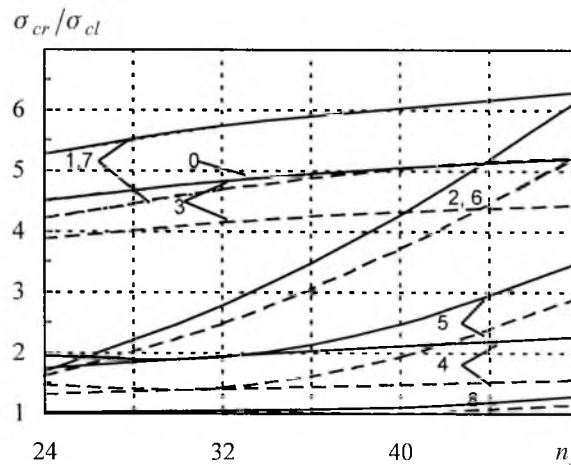


Рис. 2. Зависимость  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  от числа стрингеров  $n_s$ . (Сплошные линии – частные случаи, пунктирные – подслучай.)

Общий случай (0) соответствует общепринятой конструктивно-ортогипной схеме для ребристых оболочек. Кривые для 1-, 7-го и 2-, 6-го частных случаев совпали с кривыми как для основных случаев, так и для подслучаев. Кривые для частных случаев обычно расположены выше кривых для соответствующих им подслучаев, когда не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии и жесткость шпангоутов при растяжении–сжатии и т. д.

Минимальные параметры критических напряжений из возможных 17 случаев в основном соответствуют панельной форме потери устойчивости (8-й частный случай) для всех рассмотренных оболочек. Наибольшее отличие при этом составляет 13% для 8-го случая и соответствующего ему подслучая при 48 стрингерах. Однако оно значительно меньше, чем между общим случаем (обычно рассматриваемым по конструктивно-ортогипной теории) и принятым здесь 8-м случаем. Соответствующие им величины  $p$  отличаются более чем в четыре раза (рис. 2). Минимальные параметры критических напряжений для 8-го случая медленно увеличиваются с ростом числа стрингеров. Основным случаям соответствуют большие значения параметров критических напряжений. Учет дискретности ребер [3] по сравнению с конструктивно-ортогипной схемой позволил повысить параметры критических напряжений в 1-, 5-м и немного в 8-м случаях. В последнем случае разница между ними составила 11% по отношению к классическому параметру  $p = 1$ . Однако для 8-го случая потери устойчивости параметр критических напряжений по-прежнему минимальный.

Чтобы оценить, как результаты, полученные по принятому подходу для аналогичных оболочек, отличаются от результатов, полученных по теории ребристых оболочек [3], рассмотрим рис. 3. Исследовались те же основные случаи, что и в работе [3], т.е. 0, 1, 2, 4, 5, 8. Как видно, наибольшее отличие результатов получено для следующих случаев: 1, 5, 8. Для 0-, 2- и 4-го случаев данные совпали.

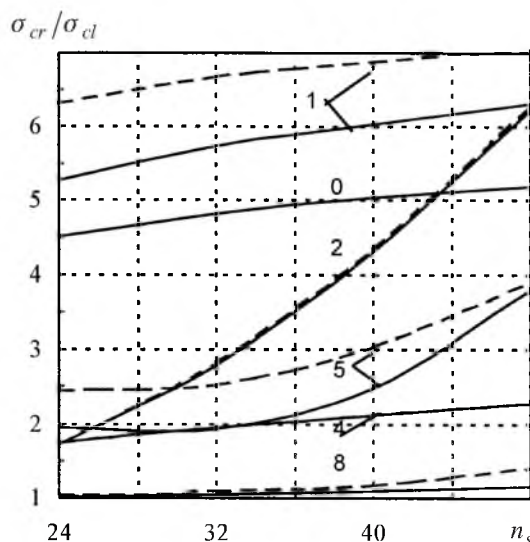


Рис. 3. Зависимость  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  от числа стрингеров  $n_s$ . (Сплошные линии – по предлагаемому подходу, штриховые – по подходу [3], где учитывалась дискретность ребер.)

Анализ показал, что главным и определяющим для оценки  $p$  является задаваемая форма потери устойчивости, а не схема учета расстановки ребер (дискретная или конструктивно-ортотропная).

**3. Роль эксцентриситета ребер.** Первая работа по устойчивости эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек выполнена более 50 лет назад и не сразу привлекла к себе внимание [24]. В ней показано, что критическая нагрузка при осевом сжатии оболочек с внешним подкреплением больше, чем оболочек с внутренним подкреплением. Эта же закономерность соблюдается для рассмотренных оболочек (п. 2), если проанализировать влияние знака эксцентриситета ребер. На рис. 4 представлена зависимость  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  от числа стрингеров для стрингерной оболочки, где две верхние кривые соответствуют общему случаю потери устойчивости, причем (0) для  $z_s = 0$ , (1) для  $z_s < 0$ , (2) для  $z_s > 0$ , а 4 – частный случай; при получении данных использовали  $d_s/t_s = 16$ , остальные параметры прежние. На рис. 5 приведена та же зависимость для стрингерно-шпангоутной оболочки, причем (1) для  $z_s < 0$ ,  $z_r > 0$ , (2) для  $z_s > 0$ ,  $z_r < 0$ , а 8 – частный случай. Влияние знака эксцентриситета ребер сравнительно мало, так как использовались оболочки со слабыми (низкими) ребрами. Однако для 8-го случая параметр минимальной критической нагрузки значительно меньше, чем для общего, и не зависит от знака эксцентриситета. Поэтому оценивать влияние эксцентриситета также необходимо с учетом анализа всех случаев потери устойчивости.

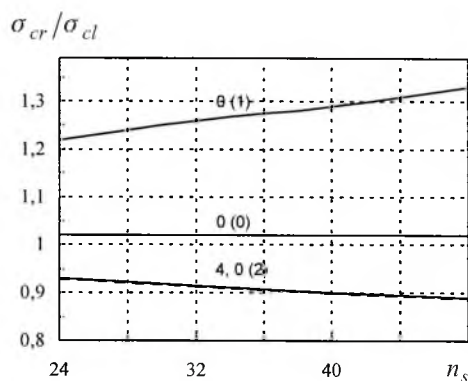


Рис. 4

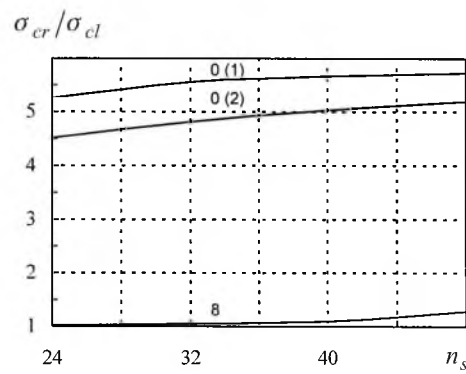


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  от числа стрингеров  $n_s$  для общего случая потери устойчивости: 0(1) – внешние стрингеры; 0(2) – внутренние стрингеры; 0(0) – без учета эксцентриситета.  
 Рис. 5. Зависимость  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  от числа стрингеров  $n_s$  для стрингерно-шпангоутной оболочки.

**4. Результаты расчета стрингерно-шпангоутных оболочек и сравнение их с экспериментальными данными.** Рассматривались оболочки, приведенные в работе [3, табл. 9.4]. Было исследовано 17 возможных случаев потери устойчивости, для которых определялись безразмерные величины  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  – параметр верхней критической нагрузки, отнесенной к  $\sigma_{cl} = 0,605 Et/r$ , и  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$  – нижний предел критической нагрузки, определенный по методу уменьшенной жесткости.

В соответствии с этим исследовались следующие случаи потери устойчивости: общий (все стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие, изгиб и кручение); восемь частных, каждый из которых имеет свой подслучай.

Минимальные параметры критических нагрузок из возможных 17 случаев соответствуют панельной форме потери устойчивости (8-й частный случай) для всех рассмотренных оболочек.

В табл. 1 для оболочки № 3 приведены данные сопоставления параметров верхних критических напряжений ( $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$ ), полученные по настоящей методике и по предложенной в [3]. Там же представлены сведения о формах потери устойчивости. Полученные результаты близки, за исключением для 5-го случая деформации.

На рис. 6,а показана зависимость параметров верхних критических нагрузок  $\sigma_{cr}/\sigma_{cl}$  от номера оболочки  $n$ . Из трех теоретических значений ближе всего к экспериментальным данные для 8-го случая. Остальные значения значительно отличаются (выше на 50...80%) от экспериментальных, что не позволяет использовать их для оценки критических нагрузок реальных оболочек.

Рис. 6,б иллюстрирует зависимость полученных по настоящей методике параметров  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$  для рассмотренных выше оболочек, которые определяют нижний предел критических нагрузок для несовершенных оболочек при ограниченных амплитудах начальных несовершенств, от номера оболочки.

Т а б л и ц а 1

Случай потери устойчивости и безразмерные параметры напряжений

Случай деформации	$j$	$i$	$\frac{\sigma_{rsm}}{\sigma_{cl}}$	$j$	$i$	$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cl}}$	$j$	$i$	$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cl}}$ [3]
0(111-111)	1	5	2,64	3	7	5,14	3	7	5,14
1(110-111)	7	0	10,50	7	0	10,90	6	0	12,70
1(010-011)	8	0	7,39	8	0	7,75			
2(001-111)	33	16	2,09	33	16	2,29	33	16	2,25
2(001-011)	29	16	1,69	29	16	1,81			
3(111-110)	1	5	2,64	3	7	5,14			
3(011-010)	1	5	1,78	3	7	4,38			
4(111-001)	5	19	1,74	5	14	2,85	5	14	2,86
4(011-001)	5	19	1,29	5	14	2,40			
5(110-001)	5	16	1,76	5	16	2,91	5	16	4,09
5(010-001)	5	16	1,33	5	16	2,41			
6(001-110)	33	16	2,08	33	16	2,20			
6(001-010)	29	16	1,67	29	16	1,79			
7(110-110)	7	0	10,50	7	0	10,90			
7(010-010)	8	0	7,39	8	0	7,75			
8(001-001)	5	16	0,60	20	16	1,06	20	16	1,10
8(000-000)	5	16	0,57	20	16	1,01			

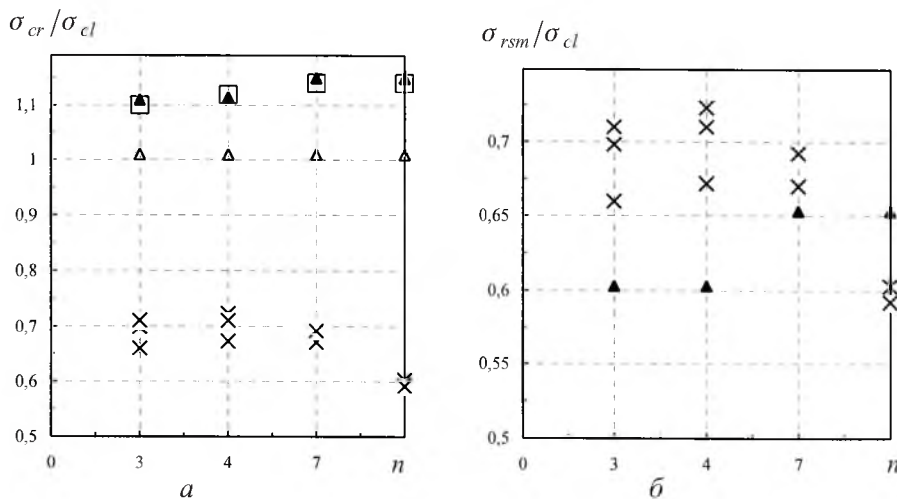


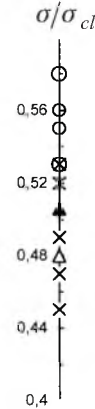
Рис. 6. Зависимость теоретических и экспериментальных параметров критических нагрузок от номера оболочки  $n$  для верхних (а) и нижних (б) пределов критических нагрузок: ▲ – по предложенной методике; △ – для 8-го подслучая; □ – по методике [3]; × – эксперимент [3].

Все теоретические величины  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$  лежат ниже экспериментальных, кроме данных для оболочки № 8, где расхождение составляет примерно 8%.

На рис. 7 приведено аналогичное сравнение с данными работы [2]. Исследовалась ребристая оболочка из сплава АМгбМ при  $r/t = 400$ ,  $l/r = 2,25$ . Величины параметров  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$ , найденные по предложенной методике, близки к экспериментальным значениям.

При выполнении расчета по методике, описанной в [2], была создана экспериментальная установка, изготовлены оболочки, обмеряны их поверхности в сотнях точек, аппроксимированы определенным образом закон распределения начальных несовершенств, а затем выполнен расчет с учетом начальных прогибов. В данном случае всего этого удалось избежать.

Рис. 7. Сопоставление минимальных параметров критических нагрузок:  $\blacktriangle$ ,  $\triangle$  – по предложенной методике;  $\circ$  – данные работы [2];  $\times$  – эксперимент [2].



Полученный результат приемлем для предварительных оценок критических нагрузок реальных оболочек и может быть использован на стадии концептуального проектирования ребристых конструкций.

### 5. Результаты расчета стрингерных оболочек и сравнение с экспериментальными данными.

5.1. Оболочки, испытанные в Институте механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины. Рассмотрим стрингерные оболочки [2, табл. 29] из сплава АМгбМ с переменным числом наружных стрингеров  $n_s = 16, 32, 48, 64$ . Геометрические параметры оболочек следующие:  $l/r = 2,25$ ;  $r/t = 400$ ;  $d_s/t_s = 7$ ;  $t_s/t = 1$ ;  $d_{sl}/t_{sl} = 8$ ;  $t_{sl}/t = 1$ , где  $d_s$ ,  $t_s$  – высота и толщина стойки уголка уголкового профиля;  $d_{sl}$ ,  $t_{sl}$  – соответственно ширина и толщина полки уголка.

На рис. 8 представлена зависимость  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl} = f(n_s)$ . При обработке результатов расчетов для стрингерных оболочек необходимо, в отличие от оболочек с перекрестными ребрами, проанализировать всего шесть случаев потери устойчивости: общий 0(111) и частные: 1(110), 1(010), 4(011), 8(001), 8(000). Полученные величины параметров нижних пределов критических напряжений  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$  сравниваются с экспериментальными данными. Значения верхних критических нагрузок [2] значительно выше экспериментальных величин. Полученные для  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$  результаты расчета существенно ближе к экспериментальным, как и в случае стрингерно-шпангоутных оболочек, рассмотренных в п. 4.

5.2. Алюминиевые оболочки, испытанные в Калифорнийском технологическом институте. Сведения об алюминиевых оболочках приведены в работе [25] и в табл. 2. Начальные несовершенства представляли собой формы низшего порядка (одна полуволна в осевом направлении и три-четыре волны в окружном). Амплитуда прогибов составляла порядка толщины оболочки.

На рис. 9 приведена зависимость  $N/N_{cl} = f(n)$ , где  $N$  – погонные усилия;  $N_{cl} = 0,605 Et^2/r$ . Результаты, полученные по предложенной мето-

дике, показаны штриховой линией. Расчетные данные для случая шарнирного опирания [25] и величина  $(N_{cr}/N_{cl})_{\min}$  близки между собой. Однако нижний предел критических нагрузок  $N_{rsm}/N_{cl}$  ближе к экспериментальным результатам.

Т а б л и ц а 2

Сведения об алюминиевых оболочках и параметрах подкреплений

$n$	Оболочка	$n_s$	$r/t$	$l/r$	$d_s/t_s$	$t_s/t$	$z_s/t$
1	AS-3	80	362	1,38	0,265	5,94	1,29
2	AS-4	80	392	1,38	0,180	6,37	1,07
3	AS-2	80	517	1,38	0,291	8,37	1,72

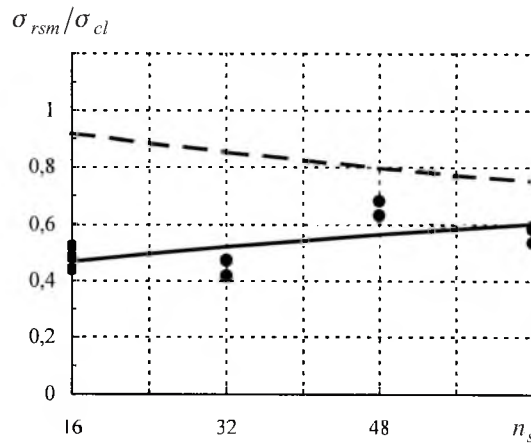


Рис. 8. Зависимость нижних пределов критических нагрузок  $\sigma_{rsm}/\sigma_{cl}$ , полученных по предложенной методике (сплошная линия), от числа стрингеров  $n_s$ . (Точки – экспериментальные данные; штриховая линия – результаты работы [2].)

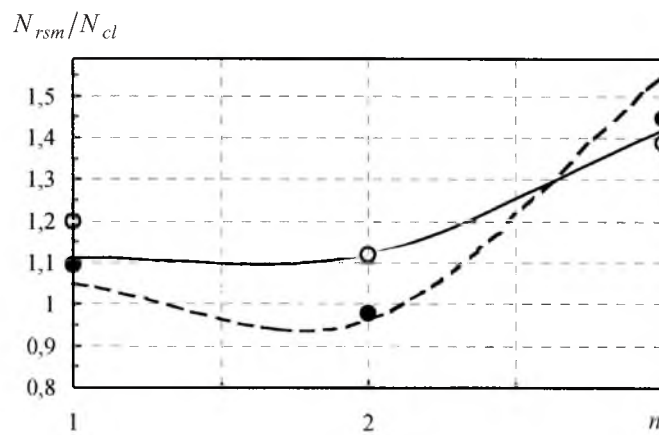


Рис. 9. Зависимость нижних пределов критических нагрузок  $N_{rsm}/N_{cl}$  (штриховая линия) от номера оболочки  $n$ : ● – экспериментальные данные [25]; ○ – линейное решение [25]; сплошная линия – безразмерная величина  $(N_{cr}/N_{cl})_{\min}$ , полученная по предложенной методике.



**6. Расчет шпангоутных оболочек и сравнение полученных данных с экспериментальными.** Сведения о шпангоутных оболочках приведены в работе [25] и в табл. 3, 4. Начальные несовершенства представляли собой формы низшего порядка (одна полуволна в осевом направлении и три-пять волн в окружном). Амплитуда прогибов значительно меньше, чем стрингерных оболочек (порядка 1/5 толщины оболочки).

Т а б л и ц а 3

**Оболочки и безразмерные параметры нагрузок**

$n$	Оболочка	$n_r$	$N_{rsm}/N_{cl}$	$N_{cr}/N_{cl}$	$N_{ex}/N_{cl}$	$N_l/N_{cl}$
1	AR-1	20	0,657	1,10	0,914	1,111
2	AR-2	20	0,642	1,10	1,023	1,114
3	AR-3	20	0,952	1,15	0,974	1,159
4	AR-4	20	0,953	1,14	0,991	1,155
5	AR-5	20	0,952	1,15	1,03	1,160
6	AR-6	20	0,952	1,15	1,03	1,166
7	AR-7	17	0,770	1,10	0,839	1,128
8	AR-9	21	0,954	1,31	1,230	1,317
9	AR-10	21	0,953	1,28	1,250	1,413
10	AR-12	26	0,953	1,36	1,361	1,275
11	AR-11	30	0,953	1,41	1,536	1,348

Т а б л и ц а 4

**Геометрия и параметры шпангоутов**

$n$	Оболочка	$t$ , мм	$r/t$	$l/r$	$n_r$	$l_r/t$	$d_r/t_r$	$t_r/t$
1	AR-1	0,236	431	1,31	20	27,04	0,286	4,40
2	AR-2	0,240	421	1,31	20	26,59	0,282	4,32
3	AR-3	0,255	398	1,31	20	26,02	0,556	3,78
4	AR-4	0,265	384	1,31	20	24,08	0,590	3,46
5	AR-5	0,213	477	1,31	20	29,96	0,458	4,54
6	AR-6	0,215	473	1,31	20	29,68	0,448	4,51
7	AR-7	0,210	484	1,44	17	33,11	0,442	4,41
8	AR-9	0,211	481	1,38	21	31,60	1,060	4,50
9	AR-10	0,223	455	1,38	21	29,25	1,130	4,04
10	AR-12	0,265	384	1,40	30	25,52	0,864	4,12
11	AR-11	0,207	492	1,35	26	31,52	0,741	5,75

На рис. 10 представлены зависимости  $N/N_{cl} = f(n)$  для различных номеров оболочек.

При анализе результатов для шпангоутных оболочек необходимо анализировать шесть случаев потери устойчивости: 0(111), 1(011), 6(110), 6(010), 8(001), 8(000). Как видно, величины  $N_l/N_{cl}$ , соответствующие решениям по линейной теории [25], и  $N_{cr}/N_{cl}$ , полученные по изложенной методике

для общего случая потери устойчивости, близки между собой. Однако теоретические результаты выше экспериментальных для оболочек № 1–7 и близки к ним для оболочек № 8–11.

Величины  $N_{rsm}/N_{cl}$  лежат ниже экспериментальных результатов (рис. 10). Причем есть три диапазона, когда они приближаются или отличаются от экспериментальных данных. Во-первых, нижний предел для оболочек № 1 и 2 на 20...30% ниже, чем для экспериментальных оболочек, так как у них низкие ( $d_r/t_r < 0,3$ ) и широкие ( $t_r/t > 4$ ) ребра и они более всего подвержены влиянию начальных несовершенств.

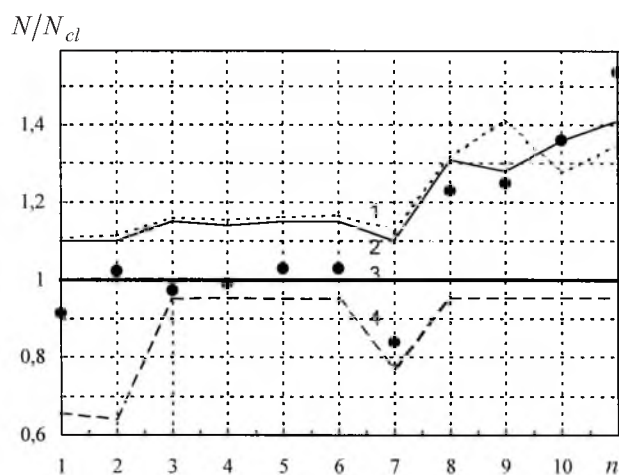


Рис. 10. Зависимость  $N/N_{cl}$  от номера оболочки: 1 –  $N_1/N_{cl}$ , решение по [25]; 2 –  $N_{cr}/N_{cl}$ ; 3 –  $(N_{cr}/N_{cl})_{\min}$ , верхний параметр критической нагрузки, определенный для общего случая потери устойчивости и для минимальной нагрузки соответственно; 4 –  $N_{rsm}/N_{cl}$ , нижний параметр критической нагрузки; ● –  $N_{ex}/N_{cl}$ , экспериментальные величины безразмерных критических нагрузок.

При изменении высоты ребер, т.е. если рассматривать оболочки № 3–7, где  $0,44 < d_r/t_r < 0,56$ , нижний предел приблизился к экспериментальным данным. Оболочки № 8–11 являются оболочками особого типа. Если принять, что предел пропорциональности материала  $\sigma_{II} = 125$  МПа, то оказывается, что  $\sigma_{cr}$  для этих оболочек выше предела пропорциональности и предела текучести  $\sigma_T = 150$  МПа. Следовательно, оболочки испытывают упруго-пластические деформации. Влияние несовершенств в них значительно ослаблено (проверено для осесимметричных прогибов), и кривые 3, 4 (рис. 10) характеризуют начало развития процесса в упругой стадии и последующий переход в пластическую зону деформирования. Этот вопрос не является предметом рассмотрения. Предложенные нижние пределы для оболочек № 8–11 дают оценку критических нагрузок с большим запасом прочности.

**7. Расчет крупномасштабной модели стрингерно-шпангоутной оболочки и сопоставление полученных данных с экспериментальными.** Алюминиевая оболочка диаметром  $D = 3$  м описана в работе [26]. Оболочка имела 126 стрингеров и 17 шпангоутов. Геометрические параметры обшивки и подкреплений следующие:  $r/t = 604$ , причем  $t = 2,54$  мм;  $l/r = 1,35$ ;  $d_s/t_s = 2,28$ ;  $t_s/t = 3,5$ ;  $d_r/t_r = 0,64$ ;  $t_r/t = 3,5$ , где  $d_s$ ,  $t_s$  и  $d_r$ ,  $t_r$  – высота и ширина стрингеров и шпангоутов соответственно.

Авторы работы [26] поставили задачу приблизиться к определению реальной несущей способности конструкций различных типов, когда известны критические составляющие начальных несовершенств. Для этого необходимо было проанализировать, какие несовершенства наиболее характерны для аэрокосмических конструкций. Описанная выше оболочка была выбрана в качестве первого шага к получению некоторой информации относительно фактических несовершенств. В [26] детально описаны оборудование и методика эксперимента.

Проведено измерение отклонений наружной поверхности от воображаемой цилиндрической поверхности отсчета. Точность измерения смещений находилась в пределах  $\pm 0,05$  мм. Измерения проводили в точках вдоль направляющей. Сделано 72 прохода. Для проверки повторяемости результатов некоторые проходы выполняли более одного раза. Оказалось, что повторяемость результатов была в пределах допустимых отклонений измерительной аппаратуры. На каждом проходе осуществляли измерения в 443 точках. Результаты измерений подвергали специальной обработке с целью определения “идеальной” оболочки, относительно которой затем пересчитывали все замеры и вычисляли гармонические составляющие двух различных вариантов разложения несовершенств в двойные ряды Фурье.

Все предыдущее описание приведено для того, чтобы показать, насколько тщательно проводился обмер оболочки. Получен трехмерный график начальных несовершенств вдоль развертки оболочки. Поскольку оболочка изготовлена из трех совместно обработанных пластин, которые сварены продольным швом, на поверхности обшивки образовались несовершенства характерной формы, а именно: с одной полуволной в осевом направлении и девятью волнами в окружном. Максимальные амплитуды несовершенств отмечались в месте расположения сварного шва, причем их величина от подошвы до вершины вмятины примерно равна толщине обшивки (2,54 мм). Такие же амплитуды несовершенств наблюдались на лабораторных моделях стрингерных оболочек [25], которые рассмотрены в п. 5.2.

В [26] предлагается использовать для теоретического анализа программу STAGS [27] или метод расчета, учитывающий выпучивание по нескольким формам [28]. Использование последнего подхода показало [26], что с ростом числа форм параметр критической нагрузки снижается. Для идеальной оболочки такого класса при условиях свободного опирания в [26] получили  $p = N_x / N_{cl} = 2,875$  при  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа. В результате расчета по предложенной нами методике для идеальной оболочки для общего случая потери устойчивости 0(111-111) получено  $p = 2,93$ , что близко к результатам [26], минимальный параметр  $N_{cr} / N_{cl} = 1,56$  и соответствует случаю 3(011-010). Для реальной оболочки с двумя формами выпучивания имеем  $p = 0,887$ , с семью формами –  $p = 0,778$ . Снижение нагрузки составляет 11%. Рассмотрение решения для оболочки с 14 формами показало, что параметр критической нагрузки уменьшается еще на 10% и  $p = 0,682$  [28]. Таким образом, окончательно полученная в [26] минимальная величина  $p = 0,62$  хорошо согласуется с определенной в испытаниях на выпучивание крупномасштабных моделей аналогичных подкрепленных оболочек ( $p = 0,63 \dots 0,73$  [29]).

Минимальный параметр  $N_{rsm}/N_{cl}$  для случая 3(011-010) соответствует  $p = 0,507$ , если не учитывать жесткость стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии, и  $p = 0,688$  для случая 3(011-110), если не учитывать жесткость стрингеров при растяжении–сжатии. Порядок чисел соответствует диапазону, полученному в испытаниях [29].

**Заключение.** Предложенная и реализованная методика оценки верхних критических нагрузок позволяет проанализировать 17 возможных случаев потери устойчивости и на основании этого определить параметр минимального критического напряжения.

Сравнение двух схем расчета (при безмоментном докритическом состоянии) для конструктивно-ортотропных и ребристых оболочек показало, что они практически равноценны при определении параметров критических нагрузок. Влияние эксцентриситета ребер на эти параметры может оказаться существенно меньшим для некоторых случаев потери устойчивости, чем в обычных подходах.

Предложенный подход позволяет учитывать влияние жесткостных характеристик ребер как отдельно, так и совместно, а также форм потери устойчивости на критические нагрузки оболочек.

С помощью метода расчета можно уточнить верхние значения параметров критических нагрузок, определяемые по известному классическому подходу для идеальных безмоментных оболочек. Из их числа выделяется минимальное значение параметра и соответствующая форма потери устойчивости (с известными  $i$  и  $j$  и соответствующей ей формой потери устойчивости). Верхние значения параметров критических нагрузок, как известно, всегда существенно завышены по сравнению с экспериментальными результатами и, строго говоря, их следует с большой осторожностью сравнивать лишь с максимальными величинами, полученными в эксперименте для соответствующей оболочки, а не со всеми экспериментальными данными. При таком подходе снижается процент отличия теории от эксперимента, но положение существенно не улучшается. Это вызвано тем, что в реальных оболочках всегда имеют место начальные несовершенства, которые не учитываются в обычной безмоментной схеме расчета.

Рассмотренный подход также существенно улучшает соответствие теории с экспериментом и связан с использованием метода уменьшенной жесткости, который позволяет априори дать приближенную оценку нижних пределов критических нагрузок для реальных оболочек. Для обоснования достоверности аналитических результатов проведены многочисленные сравнения с экспериментальными данными отечественных и зарубежных авторов. Исследованы стрингерно-шпангоутные, стрингерные и шпангоутные оболочки. Оценена погрешность полученных решений и показано, что использование нижних пределов параметров критических нагрузок по сравнению с верхними параметрами критических нагрузок существенно улучшает соответствие теории с экспериментом.

## Резюме

Розроблено й описано метод оцінки верхніх і нижніх границь параметрів критичних навантажень. Експериментально обґрунтовано критичні пара-

метри для цилиндрических оболочек із трьома типами підкріплення: перехресними ребрами; стрингерами і шпангоутами. Показано, що нижні границі критичних навантажень значно краще узгоджуються з мінімальними експериментальними параметрами, ніж верхні границі критичних навантажень, що визначаються за лінійною безмоментною теорією.

1. *Гавриленко Г., Мацнер В.* Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами // *Theor. Found. Civil Eng.* – 2004. – **2**. – Р. 629 – 636.
2. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С.* Ребристые цилиндрические оболочки. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
3. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А.* Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 368 с.
4. *Александровский С. В.* Об устойчивости цилиндрических оболочек при больших прогибах // *Расчет пространственных конструкций.* – М.: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1955. – С. 453 – 492.
5. *Кан С. Н., Бырсан О. А., Алифанова О. А. и др.* Устойчивость оболочек. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1970. – 154 с.
6. *Dschou D. D.* Die Druckfestigkeit versteifter zylindrischer Schalen // *Luftfahrt-Forschung.* – 1935. – **11**, No. 8.
7. *Гавриленко Г. Д.* Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.
8. *Гавриленко Г. Д.* Устойчивость ребристых оболочек несовершенной формы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 190 с.
9. *Gavrilenko G. D.* Stability of cylindrical shells with local imperfections // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, No. 12. – Р. 1496 – 1500.
10. *Gavrilenko G. D.* Numerical and analytical approaches to the stability analysis of imperfect shells // *Ibid.* – 2003. – **39**, No. 9. – Р. 1029 – 1045.
11. *Gavrilenko G. D.* On a fast method for buckling load calculations of incomplete ribbed shells // *Theories of Plates and Shells.* – Springer, 2004. – Р. 45 – 52.
12. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. – 276 с.
13. *Гузь А. Н., Зеленский В. С., Коханенко Ю. В.* О решении пространственных задач трехмерной теории упругой устойчивости пластин и стержней при неоднородном докритическом состоянии // *Механика композитных материалов.* – 1980. – № 1. – С. 49 – 52.
14. *Гузь А. Н., Коханенко Ю. В.* Решение плоских задач трехмерной теории упругой устойчивости пластин при неоднородном докритическом состоянии // *Прикл. механика.* – 1977. – **13**, № 12. – С. 63 – 72.
15. *Kokhanenko Yu. V. and Zelenskii V. S.* Influence of geometrical parameters on the critical load in three-dimensional stability problems for rectangular plates and beams // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, No. 9. – Р. 1073 – 1080.

16. *Croll J. G. A. and Batista R. C.* Explicit lower bound for the buckling of axially loaded cylinders // *Int. J. Mech. Sci.* – 1981. – **23**, No. 6. – P. 331 – 343.
17. *Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д.* Обоснование метода уменьшенной жесткости // *Пробл. прочности.* – 1998. – № 5. – С. 39 – 58.
18. *Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д.* Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания гладких оболочек и классический анализ устойчивости // *Там же.* – 1999. – № 2. – С. 45 – 66.
19. *Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д.* Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания подкрепленных оболочек // *Там же.* – 2000. – № 2. – С. 90 – 104.
20. *Гавриленко Г. Д., Кролл Дж. Г. А.* Применение метода уменьшенной жесткости в теории оболочек // *Прикл. механика.* – 2004. – **40**, № 7. – С. 3 – 40.
21. *Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Ситник А. С.* Устойчивость оболочек по форме близких к цилиндрическим // *Пробл. прочности.* – 2003. – № 3. – С. 30 – 44.
22. *Gavrilenko G. D. and Matsner V. I.* The stability and load-carrying capacity of cylindrical shells with axisymmetrical dents // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, No. 7. – P. 861 – 870.
23. *Donnell L. H.* A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending // *Trans ASME. Ser. E.* – 1934. – **56**. – P. 795 – 806.
24. *Van der Neut A.* The general instability of stiffened cylindrical shells under axial compression // *National Aeronautical Research Institute.* – Amsterdam, 1947. – Rept. S314.
25. *Singer J., Arbocz J., and Babcock C. D., Jr.* Buckling of imperfect stiffened cylindrical shells under axial compression // *AIAA J.* – 1971. – **9**, No. 1. – P. 68 – 75.
26. *Arbocz J. and Williams J. G.* Imperfection surveys on a 10-ft – diameter shell structure // *Ibid.* – 1977. – **15**, No. 7. – P. 949 – 956.
27. *Almroth B. O., Brogan F. A., Miller E., et al.* Collapse analysis for shell of general shape. II. User's manual for the STAGS-A computer code // *Air Force Flight Dynamics Lab., Wright Patterson AFB, AFFDL-TR-71-8*, March 1973.
28. *Arbocz J. and Babcock C. D., Jr.* Prediction of buckling load based on experimentally measured initial imperfections // *Proc. IUTAM Symp. on Buckling of Structures.* – Heidelberg: Springer-Verlag, 1976. – P. 291 – 311.
29. *Babel H. W., Christensen R. H., and Dixon H. H.* Design, fracture control, fabrication, and testing of pressurized space-vehicle structures // *Thin Shell Structures, Theory, Experiment, and Design* (Y. C. Fung and E. E. Sechler, Eds.). – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

Поступила 26. 11. 2004