ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2004. Том 6 (78), N 4. С. 3–8

УДК 532.536

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА

А. А. АВРАМЕНКО, Б. И. БАСОК

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

Получено 15.02.04

Развит подход к моделированию процессов гидродинамики и теплообмена на основе использования дискретных симметрий (дискретных групп преобразований) дифференциальных уравнений Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа. Показано, каким образом дискретные симметрии можно формально описывать с помощью инфинитезимальной техники. Продемонстрирован метод нахождения новых решений уравнений Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа по известным решениям на основе инфинитезимального подхода. Предложена методика определения автомодельных форм дифференциальных уравнений с помощью инфинитезимального генератора. Приведены примеры приложения дискретных симметрий к конкретным теплофизическим задачам.

Опрацьовано моделювання процесів гідродинаміки і теплообміну на основі використання дискретних симетрій (дискретних груп перетворень) диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса і Фур'є-Кірхгофа. Показано, яким чином дискретні симетрії можна формально описувати за допомогою інфінітезимальної техніки. Продемонстровано метод отримання нових рішень рівнянь Нав'є-Стокса і Фур'є-Кірхгофа по відомим рішенням на основі інфінітезимального підходу. Запропоновано методику визначення автомодельних форм диференціальних рівнянь за допомогою інфінітезимального генератора. Наведено приклади додатка дискретних симетрій до конкретних теплофізичних задач.

The approach to modelling of fluid flow and heat transfer is developed on the basis of discrete symmetries (discrete transformation groups) of Navier-Stokes and Fourier - Kirchhoff differential equations. It was exhibited as the discrete symmetries can formally be featured with the help of infinitesimal technique. The method of a determination of new solutions of Navier-Stokes and Fourier - Kirchhoff equations on the basic of known solutions is shown using the infinitesimal approach. The procedure of definition of the self-similar forms of the differential equations with the help of the infinitesimal generator is offered. The examples of application of discrete symmetries to particular thermophysics problems are demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

В теоретической гидродинамике и теории теплообмена эффективно используются непрерывные группы симметрии (группы Ли) [1, 2], которые позволяют получать новые решения дифференциальных уравнений по уже известным решениям или генерировать автомодельные формы этих уравнений, значительно упрощающие многие задачи. Наряду с непрерывными симметриями существуют дискретные симметрии. Преимущество непрерывных групп симметрий состоит в том, что их можно найти с помощью точных вычислительных методов и для них разработан совершенный инфинитезимальный аппарат. Поэтому основные усилия большинства исследователей направлены именно на анализ этого типа симметрий. Дискретные симметрии также можно использовать для анализа систем дифференциальных уравнений.

Настоящая работа посвящена изучению свойств дискретных симметрий и их приложению к проблемам гидродинамики и теплообмена.

1. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Рассмотрим уравнения движения жидкости и конвективного теплообмена (Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+g\beta T,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

где t – время; x, y, z – декартовы координаты; u, v, w – компоненты скорости, соответствующие координатам x, y, z; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость; a – температуропроводность; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент теплового расширения; T – температура.

Система (1) допускает дискретные симметрии отражения

$$(x \to -x, u \to -u), (y \to -y, v \to -v),$$
$$(z \to -z, w \to -w, T \to -T)$$

при неизменных остальных функциях и аргументах. Эти симметрии можно представить следующим образом:

$$x \to x\exp(\varepsilon), u \to u\exp(\varepsilon),$$
$$y \to y\exp(\varepsilon), v \to v\exp(\varepsilon), \qquad (2)$$
$$z \to z\exp(\varepsilon), w \to w\exp(\varepsilon), T \to T\exp(\varepsilon),$$

где параметр группового преобразования ε имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_d = i(\pi + n\pi), n = 0; 2; 4.... \qquad (3)$$

Как известно [1, 2], непрерывные симметрии удобно описывать инфинитезимальными генераторами при условии, что данные преобразования симметрии должны осуществляться в окрестности единичного элемента преобразования, т. е. когда $\varepsilon \to 0$. Попытаемся по аналогии с этим описать дискретные симметрии с помощью инфинитезимального генератора, используя стандартные процедуры, развитые для непрерывных симметрий. С этой целью, согласно [1], для получения коэффициентов инфинитезимального генератора необходимо продифференцировать правые части выражений (2) по ε в малой окрестности того значения параметра группового преобразования, около которого данное преобразование выполняется. Для дискретных симметрий (2) такие значения определяются формулой (3). Тогда инфинитезимальный генератор дискретных симметрий с точностью до знака принимает вид

$$q = C_1 x\frac{\partial}{\partial x} + C_2 y\frac{\partial}{\partial y} + C_3 z\frac{\partial}{\partial z} +$$
$$+ C_1 u\frac{\partial}{\partial u} + C_2 v\frac{\partial}{\partial v} + C_3 w\frac{\partial}{\partial w} + C_3 T\frac{\partial}{\partial T}, \qquad (4)$$

где цифровой индекс констант характеризует отделенную симметрию. Таким образом, инфинитезимальный генератор (4) описывает три дискретные симметрии.

На основе уравнения (4) можно восстановить преобразования (2), т. е. провести обратную операцию. Для этого необходимо решить систему обыкновенных автономных дифференциальных уравнений с аргументом ε, составленных из слагаемых (4) при одинаковых константах, т. е. провести операцию экспоненцирования. Продемонстрируем эту процедуру на основе симметрий при C_1. Автономная система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = x, \frac{du}{d\varepsilon} = u. \qquad (5)$$

Она решается (по аналогии с непрерывными симметриями) при начальных условиях

$$x = \bar{x}\big|_{\varepsilon=0}, u = \bar{u}\big|_{\varepsilon=0}, \qquad (6)$$

где черта сверху относится к начальному "старому" значению, которое преобразовывается в "новое". Обычно эта черта не используется, здесь же она поставлена для разъяснения дальнейших вычислений. Для непрерывных симметрий система (5), (6) называется уравнениями Ли.

Итак, решая систему (5) с учетом условий (6), находим

$$x = \bar{x}\exp(\varepsilon) u = \bar{u}\exp(\varepsilon).$$

Это означает, что преобразования симметрии выглядят следующим образом:

$$t = \bar{t}, x = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{x}\exp(\varepsilon), y = \bar{y}, z = \bar{z},$$
$$u = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{u}\exp(\varepsilon), v = \bar{v}, w = \bar{w}, p = \bar{p}, T = \bar{T}. \qquad (7)$$

Используя эти преобразования, можно построить решение системы (1) по известному решению. Если система (1) имеет решения

$$u = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z},), v = \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z},), w = \bar{w}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z},),$$
$$p = \bar{p}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z},), T = \bar{T}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z},),$$

то решением этой же системы будут выражения

$$u = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \exp(\varepsilon)\bar{u}(t, x\exp(-\varepsilon), y, z) = -\bar{u}(t, -x, y, z),$$
$$v = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{v}(t, x\exp(-\varepsilon), y, z) = \bar{v}(t, -x, y, z),$$
$$w = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{w}(t, x\exp(-\varepsilon), y, z) = \bar{w}(t, -x, y, z), \qquad (8)$$
$$p = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{p}(t, x\exp(-\varepsilon), y, z) = \bar{p}(t, -x, y, z),$$
$$T = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{T}(t, x\exp(-\varepsilon), y, z) = \bar{T}(t, -x, y, z),$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой этих выражений в исходную систему (1).

Проведя подобные вычисления для симметрий при константах C_2 и C_3, получаем:
- для симметрии при C_2:

$$u = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{u}(t, x, y\exp(-\varepsilon), z) = \bar{u}(t, x, -y, z),$$

$$v = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \exp(\varepsilon)\bar{v}(t, x, y\exp(-\varepsilon), z) = -\bar{v}(t, x, -y, z),$$

$$w = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{w}(t, x, y\exp(-\varepsilon), z) = \bar{w}(t, x, -y, z),$$

$$p = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{p}(t, x, y\exp(-\varepsilon), z) = \bar{p}(t, x, -y, z),$$

$$T = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{T}(t, x, y\exp(-\varepsilon), z) = \bar{T}(t, x, -y, z),$$

- для симметрии при C_3:

$$u = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{u}(t, x, y, z\exp(-\varepsilon)) = \bar{u}(t, x, y, -z),$$

$$v = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{v}(t, x, y, z\exp(-\varepsilon)) = \bar{v}(t, x, y, -z),$$

$$w = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \exp(\varepsilon)\bar{w}(t, x, y, z\exp(-\varepsilon)) = -\bar{w}(t, x, y, -z),$$

$$p = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \bar{p}(t, x, y, z\exp(-\varepsilon)) = \bar{p}(t, x, y, -z),$$

$$T = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_d} \exp(\varepsilon)\bar{T}(t, x, y, z\exp(-\varepsilon)) = -\bar{T}(t, x, y, -z).$$

В частных случаях возможно использование указанных преобразований и без предельного перехода. Так, в случае двухмерного течения в пограничном слое около плоской пластины (течения Блазиуса) преобразования (8) можно представить следующим образом:

$$u = \exp(\varepsilon)\bar{u}(t, x, \exp(-\varepsilon), y, z),$$

$$v = \bar{v}(t, x, \exp(-\varepsilon), y, z),$$

$$T = \bar{T}(t, x, \exp(-\varepsilon), y, z).$$

Приведенные соотношения, генерирующие новые решения, тривиальны и несут мало информации. Однако инфинитезимальная форма записи симметрии (4) позволяет строить автомодельные (инвариантные относительно группы) решения так же, как и для непрерывных симметрий [1], которые довольно часто используются в прикладных расчетах. Для примера рассмотрим симметрию при константе C_3. Чтобы построить автомодельные формы, необходимо найти инварианты группы симметрии, которая описывается следующим инфинитезимальным генератором:

$$q_3 = z\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial w}.$$

Как известно [1], инварианты S находятся как решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка $q_1(S) = 0$, т. е. для определения инварианта необходимо решить следующее уравнение:

$$z\frac{\partial S}{\partial z} + w\frac{\partial S}{\partial w} = 0.$$

Легко видеть, что в данном случае инвариантами будут $t, y, z, v, u, p, T, w = zW(t, x, y)$. Следовательно, автомодельные формы удобно представить в безразмерном виде:

$$\eta(t) = \mathrm{Fo} = \frac{t\nu}{L^2}, \xi(y) = \frac{y}{L}, \zeta(x) = \frac{x}{L},$$

$$u(t, x, y, z) = \frac{U(\eta, \xi, \zeta)}{L}\nu,$$

$$v(t, x, y, z) = \frac{V(\eta, \xi, \zeta)}{L}\nu,$$

$$w(t, x, y, z) = \frac{W(\eta, \xi, \zeta)}{L}z\nu,$$

$$p(t, x, y, z) = \frac{P(\eta, \xi, \zeta)}{L^2}\rho\nu^2,$$

$$T(t, x, y, z) = \Delta T\vartheta(\eta, \xi, \zeta),$$

где L – характерный размер (линейный масштаб); ΔT – характерная разность температур (температурный масштаб). Подставив эти формы в систему (1), получим

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} + V\frac{\partial U}{\partial \xi} + U\frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} + V\frac{\partial V}{\partial \xi} + U\frac{\partial Y}{\partial \zeta} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},$$

$$W^2 + \frac{\partial W}{\partial \eta} + V\frac{\partial W}{\partial \xi} + U\frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + \mathrm{Gr}\vartheta,$$

$$W + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\mathrm{Pr}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + V\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + U\frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} + W\vartheta\right) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \zeta^2},$$

где

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}, \mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

– числа Прандтля и Грасгофа. Заметим, что после проделанных преобразований количество независимых аргументов сократилось на единицу. Очевидно, что в случае двух независимых аргументов задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим некоторые примеры.

2. ПРИМЕРЫ

В качестве первого примера продемонстрируем приложение симметрии q_1 к задаче о плоском течении и теплообмене вблизи критической точки (течение Хименца). В этом случае поток набегает из бесконечности на стенку, поставленную поперек течения, и далее течет вдоль нее в противоположные стороны [3]. Координата x направлена вдоль, а координата y – перпендикулярно стенке. Координаты критической точки: $x = 0; y = 0$. Продольная (x-ая) компонента потенциального поля скоростей описывается выражением

$$U_\infty(x) = k_1 x,$$

откуда, на основе уравнения неразрывности, следует формула для нормальной компоненты потенциальной скорости

$$V_\infty(y) = -k_1 y,$$

где k_1 – постоянный градиент скорости.

Используя выписанные выше инварианты, построим автомодельные формы:

$$\eta = y\sqrt{\frac{k_1}{\nu}}, u = k_1 f'(\eta)x, v = -\sqrt{k_1\nu}f(\eta).$$

Теперь необходимо найти выражение для давления. Для этого вычислим, чему равно давление в потенциальном течении. Согласно уравнению Бернулли,

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 + V_\infty^2\right) = \frac{\rho}{2}k_1^2\left(x^2 + y^2\right), \qquad (9)$$

где p_0 – давление в критической точке. Так как давление является инвариантом q_1, то выражение для него строим на основе (9) с учетом того, что и x^2 также инвариантен данной симметрии. Следовательно,

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}k_1^2\left[\frac{\nu}{k_1}P(\eta) + x^2\right].$$

Легко убедиться, что данная функция инвариантна относительно симметрии q_1. Подстановка предложенных автомодельных форм в двухмерный вариант уравнений (1) при отсутствии свободной конвекции дает следующую систему автомодельных уравнений:

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0,$$

$$f'' + ff'^2 = \frac{1}{2}P'.$$

Процедура решения полученной системы подробно изложена в [3].

Так как температура – также инвариант относительно q_1, то для решения тепловой задачи удобно ввести избыточную безразмерную температуру как функцию автомодельной переменной:

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \vartheta(\eta).$$

Подставив Θ в последнее уравнение (1), получим

$$\vartheta'' + \mathrm{Pr} f\vartheta' = 0.$$

Решение этого уравнения с граничными условиями

$$\vartheta|_{\eta=0} = 0,$$

$$\vartheta|_{\eta\to\infty} = 1$$

выглядит следующим образом:

$$\vartheta = \frac{\int\limits_0^\eta \exp\left[-\mathrm{Pr}\int\limits_0^\eta f d\eta\right] d\eta}{\int\limits_0^\infty \exp\left[-\mathrm{Pr}\int\limits_0^\eta f d\eta\right] d\eta}.$$

Отсюда легко определить выражение для числа Нуссельта [4]

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0.57\mathrm{Pr}^{0.4}\mathrm{Re}_x^{0.5},$$

где α – коэффициент теплоотдачи; λ – коэффициент теплопроводности; число Рейнольдса составлено по локальной скорости $U_x(x)$ и продольной координате.

Дискретные симметрии характерны и для других систем координат, например, для цилиндрических. На основе дискретной симметрии рассчитывается пространственное осесимметричное течение в окрестности критической точки. Оно совершенно аналогично плоскому течению, которое было проанализировано выше. При пространственном осесимметричном течении в окрестности критической точки жидкость набегает на стенку, перпендикулярную к направлению течения, и оттекает от критической точки вдоль этой стенки во все стороны по радиусам. Уравнения движения и теплообмена в данном случае имеют вид

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$u\frac{\partial T}{\partial r}+w\frac{\partial T}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \qquad (10)$$

где r, z – цилиндрические координаты; u – радиальная компонента скорости; v – тангенциальная компонента скорости; w – осевая компонента скорости.

Для рассматриваемой задачи тангенциальная компонента скорости равна нулю. Следовательно, все члены в уравнениях (10), содержащие v, вырождаются, как и третье уравнение данной системы. Уравнения (10) допускают дискретную симметрию

$$q=r\partial_r+u\partial_u+v\partial_v. \qquad (11)$$

Для невязкого осесимметричного течения в критической точке имеем решение

$$U_\infty(r)=k_1 r, W_\infty(z)=-2k_1 z.$$

Отсюда, согласно уравнению Бернулли, получаем формулу для давления в потенциальном течении:

$$p_0-p=\frac{\rho}{2}(U_\infty^2+W_\infty^2)=\frac{\rho}{2}k_1^2(r^2+4z^2),$$

где p_0 есть по-прежнему давление в критической точке.

На основе уравнения (11) с учетом выражений для компонент потенциальной скорости и давления строим автомодельные формы:

$$u=k_1 r f(\eta), w=-2\sqrt{k_1\nu}f(\eta),$$

$$\Theta=\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}=\vartheta(\eta),$$

$$p=p_0-\frac{\rho}{2}k_1^2\left[\frac{\nu}{k_1}P(\eta)+r^2\right], \eta=z\sqrt{\frac{k_1}{\nu}},$$

подставив которые в систему (10), получим

$$f'''+2ff''-f'^2+1=0,$$

$$\vartheta'''+2\mathrm{Pr}f\vartheta'=0. \qquad (12)$$

Решение представленной автомодельной системы ищется при граничных условиях

$$f|_{\eta=0}=f'|_{\eta=0}=0, \vartheta|_{\eta=0}=0,$$

$$f'|_{\eta\to\infty}=1, \vartheta|_{\eta\to\infty}=1.$$

Первое уравнение (12) впервые решено Ф. Хоманом путем разложения в ряд. Результаты решения приведены в [3].

Решение второго уравнения (12) имеет вид

$$\vartheta=\frac{\int\limits_0^\eta \exp\left[-2\mathrm{Pr}\int\limits_0^\eta f d\eta\right]d\eta}{\int\limits_0^\infty \exp\left[-2\mathrm{Pr}\int\limits_0^\eta f d\eta\right]d\eta}.$$

Отсюда легко можно определить выражение для числа Нуссельта.

Следующий пример приложения дискретных симметрий – это течение вблизи плоского диска, равномерно вращающегося с угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска. Жидкость вдали от диска покоится. Вследствие трения слой жидкости, непосредственно прилегающий к диску, увлекается последним и под действием центробежной силы отбрасывается наружу от диска. Взамен отброшенной жидкости к диску притекает в осевом направлении новая жидкость, которая также увлекается диском и опять отбрасывается наружу. Следовательно, в данном случае имеется трехмерное течение и необходимо анализировать полную систему (10) с граничными условиями

$$u|_{z=0}=0, v|_{z=0}=r\Omega, w|_{z=0}=0, T|_{z=0}=T_w,$$

$$u|_{z\to\infty}=0, v|_{z\to\infty}=0, T|_{z\to\infty}=T_\infty,$$

где Ω – угловая скорость вращения диска.

На основе симметрии (11) вводятся следующие автомодельные переменные:

$$u=r\Omega U(\eta), v=r\Omega V(\eta), w=\sqrt{\nu\Omega}W(\eta),$$

$$p=\rho\nu\Omega P(\eta), \Theta=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}=\vartheta(\eta), \eta=z\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}},$$

подстановка которых в систему (10) дает

$$2U+W'=0,$$

$$U^2+U'W-V^2-U''=0,$$

$$2UV+WV'-V''=0,$$

$$P'+WW'-W''=0,$$

$$\vartheta''-\mathrm{Pr}W\vartheta'=0. \qquad (13)$$

Гидродинамическая часть системы уравнений (13) впервые была исследована Т. Карманом приближенным способом.

В работе [5] рассмотрена задача, когда жидкость на бесконечности вращается с угловой скоростью $s\Omega$. В этом случае второе уравнение системы (13) заменяется на

$$U^2+U'W-V^2-U''+s^2=0.$$

Численные решения для задачи вращения жидкости и диска в одну и ту же сторону ($s > 0$) даны в работе [5]. В случае вращения жидкости и диска в противоположные стороны ($s < -0.2$) решения, имеющие физический смысл, возможны только при применении равномерно распределенного отсасывания в направлении, перпендикулярном плоскости диска.

В работе [6] были использованы дискретные группы симметрии для расчета теплообмена при условии, когда разность температур потока и стенки изменяется по степенному закону

$$\Delta T \sim r^n.$$

При этом последнее уравнение системы (13) принимает вид

$$\vartheta'' - \mathrm{Pr}(W\vartheta' + nU\vartheta) = 0.$$

Результаты численных расчетов этого уравнения позволили получить критериальную зависимость для числа Нуссельта.

Еще один пример использования дискретных симметрий – это анализ стационарного течения во вращающейся пористой трубе. Система уравнений (10) также допускает симметрию

$$q = z\partial_z + w\partial_w + T\partial_T,$$

которая генерирует следующие автомодельные формы

$$u = U(\bar{r}),\ v = V(\bar{r}),\ w = \bar{z}W(\bar{r}), \tag{14}$$

где координаты нормализованы по радиусу трубы R.

Граничные условия имеют вид:

$$U(1) = U_R, V(1) = V_R, W(1) = 0,$$

$$U(0) = 0, V(0) = 0, W'(0) = 0.$$

Подставляя выражения (14) в систему (10) и затем исключая две компоненты скорости и давление, получаем [7]:

$$\mathrm{Re}_w^{-1}\frac{d}{d\bar{r}}\left\{\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}\left[\bar{r}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{d(\bar{r}V)}{d\bar{r}}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{d}{d\bar{r}}\left\{V\frac{d}{d\bar{r}}\left[\frac{1}{\bar{r}}\frac{d(\bar{r}V)}{d\bar{r}}\right] - \left[\frac{1}{\bar{r}}\frac{d(\bar{r}V)}{d\bar{r}}\right]^2\right\},$$

где $\mathrm{Re}_w = U_R R/\nu$. Решив это уравнение, легко найти осевую компоненту скорости из уравнения неразрывности. В предельных случаях справедливы следующие выражения:

– при $\mathrm{Re}_w \to -\infty$ (вдув)

$$U = 2\bar{r} - \bar{r}^3, W = -4(1 - \bar{r}^2),$$

– при $\mathrm{Re}_w \to \infty$ (отсос)

$$U = \frac{1}{\bar{r}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{r}^2\right), W = -4\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\bar{r}^2\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что дискретные симметрии в отличие от непрерывных не согласуются между собой при построении автомодельных форм. Поясним сказанное. При построении автомодельных форм на основе непрерывных симметрий можно комбинировать любые подгруппы Ли данной группы. При этом получаемые автомодельные формы будут редуцировать исходную систему уравнений. В случае же дискретных симметрий подобное комбинирование невозможно. Другие примеры использования дискретных симметрий можно найти в монографиях [8, 9].

1. *Олвер П.* Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1989.– 639 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1978.– 400 с.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
4. *Юдаев Б.Н.* Теплопередача.– М.: Высшая школа, 1973.– 360 с.
5. *Rogers M. G., Lauce G. N.* The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk // Journal of Fluid Mechanics.– 1960.– 7.– P. 617–631.
6. *Шевчук И. В., Авраменко А.А.* Ламинарный теплообмен вращающегося диска: уточнение и расширение базы данных точного численного решения // Пром. теплотехника.– 2001.– 23 N 1-2.– С. 11–14.
7. *Yuan S. W., Finkelstein A.* Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Trans. ASME. Basic Engineering.– 1956.– 78.– P. 719–724.
8. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Соловьев Е.Н.* Симметрии уравнений конвективного теплообмена и гидродинамики.– Киев: Наукова думка, 2001.– 96 с.
9. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В.* Групповые методы в теплофизике.– Киев: Наукова думка, 2003.– 484 с.