

## Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах

В. А. Баженов, О. С. Погорелова, Т. Г. Постникова, С. Н. Гончаренко

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

*Рассматриваются различные способы моделирования удара в виброударных системах: силой контактного взаимодействия, в качестве которой может быть как упругая сила, так и сила, соответствующая закону Герца, и с помощью граничных условий с использованием коэффициента восстановления. Проводится сравнение результатов моделирования этими способами и даны рекомендации по их применению.*

**Ключевые слова:** виброударное движение, ударно-вибрационная площадка, моделирование удара, сила контактного взаимодействия, закон Герца, коэффициент восстановления.

**Введение.** Исследование динамики виброударных процессов в механических системах представляет значительный интерес, что и предопределяет изучение движения и сил взаимодействия между телами в виброударных системах [1, 2]. Основным в таких исследованиях является вопрос моделирования удара [3]. В настоящей работе проанализированы такие способы моделирования удара: силой контактного взаимодействия, рассматриваемой как упругая сила и как сила, описанная законом Герца [3–5], и с помощью граничных условий с использованием коэффициента восстановления  $R$ .

Объектом исследования служила двухмассовая модель с двумя степенями свободы, которая соответствует ударно-вибрационной площадке, широко применяемой в строительном производстве [6–8].

**1. Расчетная схема и уравнения движения.** Для изучения динамики площадки и явления удара между ее формой и столом рассмотрим простейший вариант математической модели двухмассовой ударно-вибрационной системы без закрепления формы (рис. 1).

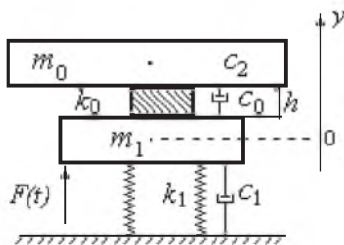


Рис. 1. Расчетная схема площадки.

Стол площадки массой  $m_1$  крепится к фундаменту линейными виброизолирующими пружинами с суммарной жесткостью  $k_1$ . Двигатели, установленные под столом, генерируют возмущающую силу  $F(t)$ . К столу кре-

пится упругая прокладка (ограничитель колебаний) толщиной  $h$  с линейной жесткостью  $k_0$ , на которой лежит форма массой  $m_0$ . Форма к прокладке не крепится и может от нее отрываться.

В состоянии равновесия форма и стол площадки начинают совместное движение до тех пор, пока форма не оторвется от стола. В состоянии отрыва они движутся раздельно, пока форма не упадет на прокладку. Происходит удар, во время которого тела опять движутся совместно до отрыва формы от прокладки и т.д.

Рассмотрим три состояния площадки: совместное начальное движение формы и стола площадки до момента отрыва; раздельное движение тел во время отрыва формы от стола и совместное движение тел в состоянии удара в результате падения формы на стол.

При совместном движении до первого отрыва формы на тела системы действуют такие силы: на форму – ее вес с бетоном  $P_0$  и силы сопротивления в бетоне  $F_{\text{демп}2}$ , упругая сила в прокладке  $F_{k0}$  и сила сопротивления в ней  $F_{\text{демп}0}$ ; на стол площадки – вес стола площадки  $P_1$ , сила упругости и силы сопротивления в виброизолирующих пружинах  $F_{k1}$  и  $F_{\text{демп}1}$ , сила упругости в прокладке  $F_{k0}$  и сила сопротивления в прокладке  $F_{\text{демп}0}$ , возмущающая сила от вибраторов  $F(t)$  – рис. 2.

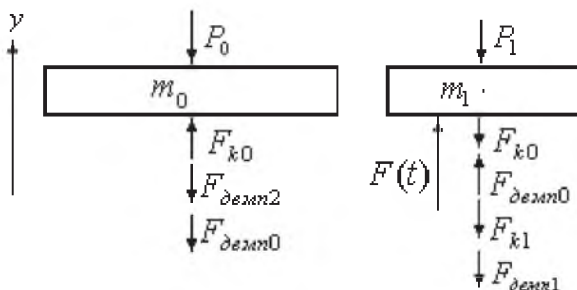


Рис. 2. Силы, действующие на тела площадки.

В сложном процессе вибрационного уплотнения необходимо преодолеть силы трения, сцепления и вязкого сопротивления. Это обуславливает изучение рядом исследователей сил вязкого сопротивления и снижения их значения при вибрационном воздействии [6]. Учитывая большое влияние сил сопротивления на динамику виброударной площадки, введем три силы сопротивления: в бетонной смеси  $F_{\text{демп}2}$ ; в прокладке  $F_{\text{демп}0}$  и в виброизолирующих пружинах  $F_{\text{демп}1}$ . Силы сопротивления принимаем пропорциональными первой степени скорости с некоторыми коэффициентами пропорциональности  $c_2, c_0, c_1$ :

$$F_{\text{демп}2} = c_2 \dot{y}_0, \quad F_{\text{демп}0} = c_0 \dot{y}_0, \quad F_{\text{демп}1} = c_1 \dot{y}_1.$$

Начало координат выберем в центре стола площадки в положении ее статического равновесия. Тогда силы упругости запишем так:

$$F_{k0} = k_0 \Delta l_0 = k_0 [h - (y_0 - y_1)];$$

$$F_{k1} = k_1 \Delta l_1 = k_1 (y_1 - \lambda_{ст}),$$

где  $\lambda_{ст} = (P_0 + P_1)/k_1$  – величина статической деформации прокладки.

Уравнения движения стола площадки с формой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y}_0 &= -P_0 - F_{демп2} + F_{k0} - F_{демп0}; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -P_1 - F_{k1} - F_{демп1} - F_{k0} + F_{демп0} + F(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Внешняя нагрузка от вибраторов принимается гармонической, т.е.  $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Введем стандартные обозначения

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2; \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2; \quad \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0 \omega_0; \quad \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1 \omega_1; \quad \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2 \omega_0; \quad \frac{m_0}{m_1} = \chi \quad (2)$$

и получим уравнения движения стола площадки и формы:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2 [h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2) \omega_0 \dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 \chi [h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_1 + 2\xi_0 \omega_0 \chi \dot{y}_0 + \\ &+ (F_0/m_1)(\cos(\omega t) + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия при  $t=0$  имеют вид  $\varphi=0$ ,  $y_1=0$ ,  $\dot{y}_1=0$ ,  $y_0=h-\lambda_{ст}$ ,  $\dot{y}_0=0$ . При раздельном движении, т.е. в состоянии отрыва, на тела системы действуют такие силы: на форму – ее вес с бетоном  $P_0$  и силы сопротивления в бетоне  $F_{демп2}$ ; на стол площадки – его вес  $P_1$ , сила упругости и силы сопротивления в виброизолирующих пружинах  $F_{k1}$  и  $F_{демп1}$ , а также возмущающая сила от вибраторов  $F(t)$ .

Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2 \omega_0 \dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_1 + (F_0/m_1) \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

При падении формы на прокладку происходит удар, во время которого форма со столом площадки движутся совместно. Моделировать удар можно либо силой контактного взаимодействия, описанной тем или иным образом, либо с помощью граничных условий с использованием коэффициента восстановления  $R$ . При моделировании удара силой контактного взаимодействия уравнения совместного движения формы со столом площадки имеют вид

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y}_0 &= -P_0 - F_{демп2} - F_{демп0} + F_{уд}; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -P_1 - F_{k1} - F_{демп1} + F_{демп0} - F_{уд} + F(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $F_{уд}$  – сила удара.

Если в качестве силы контактного взаимодействия применяется сила упругости  $F_{уд} = F_{k0} = k_0[h - (y_0 - y_1)]$  [9], уравнения совместного движения (5) совпадают с уравнениями (1). Если в качестве этой силы используется сила, описанная законом Герца [3–5], то  $F_{уд} = K\alpha(t)^{3/2}$ . Здесь  $\alpha(t)$  – относительное сближение,  $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$ ;  $K$  – константа Герца,  $K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}$ , где  $q$ ,  $A$  и  $B$  – константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта;

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0\pi}; \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1\pi};$$

$\mu_i$  и  $E_i$  – коэффициенты Пуассона и модули Юнга для обоих тел.

Уравнения совместного движения принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0}[h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1}[h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \\ &+ \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Удар, моделируемый с помощью граничных условий с использованием коэффициента восстановления  $R$ , считается мгновенным, при этом совместное движение в период удара не рассматривается. Поэтому уравнения движения формы и стола площадки в течение всего времени имеют вид (4), а в момент удара скорости этих тел изменяются скачкообразно, т.е. граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} y_0^+ &= y_0^-; & y_1^+ &= y_1^-; \\ \dot{y}_0^+ &= \frac{(1+R)\dot{y}_1^- + (\chi - R)\dot{y}_0^-}{1+\chi}; & \dot{y}_1^+ &= \frac{(1-R\chi)\dot{y}_1^- + \chi(1+R)\dot{y}_0^-}{1+\chi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $y_0^-$ ,  $y_1^-$  и  $\dot{y}_0^-$ ,  $\dot{y}_1^-$  – перемещения и скорости тел до удара;  $y_0^+$ ,  $y_1^+$  и  $\dot{y}_0^+$ ,  $\dot{y}_1^+$  – то же после удара;  $R$  – коэффициент восстановления, который может принимать значения от нуля до единицы. При  $R=1$  происходит абсолютно упругий удар, при  $R=0$  – пластический.

**2. Численные исследования динамики виброударной площадки.** Характеристики площадки использованы из нормативной литературы [6, 8] и приведены ниже:

Масса формы с бетоном $m_0$ , кг .....	15000
Масса стола площадки $m_1$ , кг .....	7400
Суммарная жесткость прокладок $k_0$ , Н/м .....	$3,0 \cdot 10^8$

Суммарная жесткость виброизолирующих пружин $k_1$ , Н/м .....	$1,278 \cdot 10^6$
Толщина прокладки $h$ , м .....	0,0275
Амплитуда внешней нагрузки $F_0$ , Н .....	$2,44 \cdot 10^5$
Частота внешней нагрузки $\omega$ , Гц .....	25,0
Начальная фаза внешней нагрузки $\varphi$ , рад	0
Коэффициенты демпфирования:	
в бетонной смеси $\xi_2$ .....	0,03
в прокладке $\xi_0$ .....	0,02
в виброизолирующих пружинах $\xi_1$ .....	0,02

2.1. **Моделирование удара силой упругости.** Рассмотрим виброударное движение площадки, когда контактное взаимодействие между телами моделируется силой упругости. На рис. 3 представлены графики перемещений формы  $y_0$  и стола площадки  $y_1$  за время от 0 до 3 с и в более крупном масштабе за время от 7,0 до 8,0 с, их фазовых траекторий и контактной силы в период от 7,5 до 7,8 с.

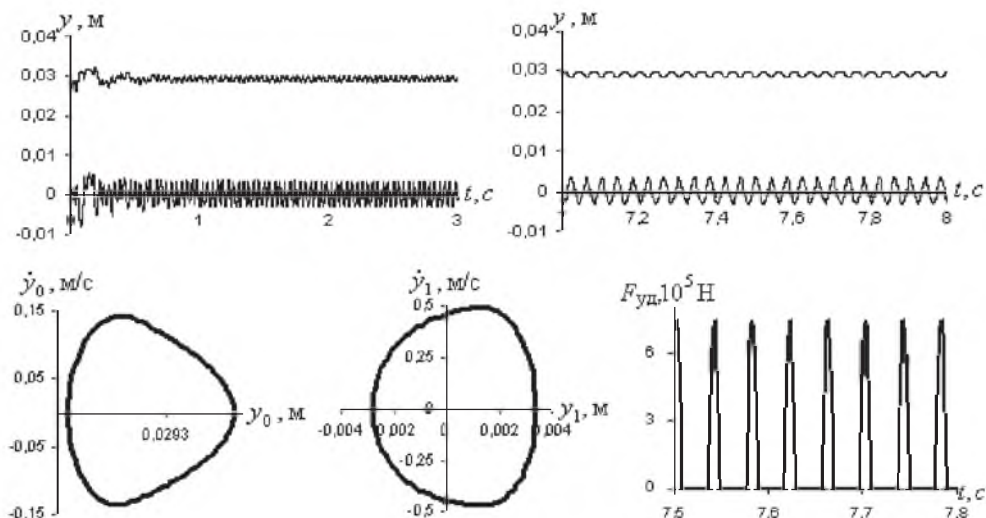


Рис. 3. Характеристики движения площадки при моделировании удара силой упругости.

Как видно, после короткого переходного процесса виброударный режим колебаний площадки с формой становится установившимся. Значения максимума контактной силы, полуразмахов колебаний формы и стола соответственно составляют  $7,5 \cdot 10^5$  Н; 0,760 мм и 3,087 мм.

2.2. **Моделирование удара силой Герца.** При моделировании удара силой, описываемой законом Герца, механические характеристики соударяющихся тел учитываются более подробно: в расчете используются модули упругости и коэффициенты Пуассона обоих тел, а также коэффициенты, характеризующие местную геометрию контактирующих поверхностей. Во всех исследованиях полагаем, что форма стальная с модулем упругости  $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ , значения констант таковы:  $A = 0,1$  м<sup>-2</sup>;

$B = 0,1 \text{ м}^{-2}$ ;  $q = 0,318$ . Отметим, что динамика движения стола площадки и формы значительно зависит от значения модуля упругости резиновой прокладки  $E_1$ . Как известно, модуль упругости для разной резины на четыре порядка меньше модуля упругости стали. Однако если значение модуля упругости прокладки  $E_1$  меньше  $2,8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ , то силы удара, моделируемой законом Герца, недостаточно, чтобы оторвать форму от прокладки.

На рис. 4 представлены графики перемещений тел виброударной системы и контактной силы, описанной законом Герца, при модуле упругости прокладки  $E_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ , коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,4$ . Там же показан график сближения тел системы в процессе колебаний  $[h - (y_0 - y_1)]$ . Величина сближения в ходе всего движения принимает только положительные значения. Это говорит о том, что прокладка находится в сжатом состоянии, т.е. форма не отрывается от прокладки.

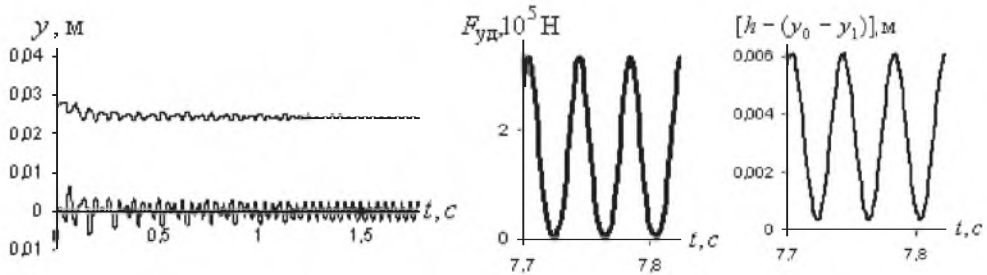


Рис. 4. Характеристики движения площадки при моделировании удара силой Герца,  $E_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 0,4$ .

С увеличением значения  $E_1$  картина изменяется: контактная сила возрастает, что позволяет форме отрываться от прокладки. На рис. 5 приведены перемещения тел системы, контактная сила Герца и график сближения тел в установившемся режиме колебаний при  $E_1 = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 0,4$ .

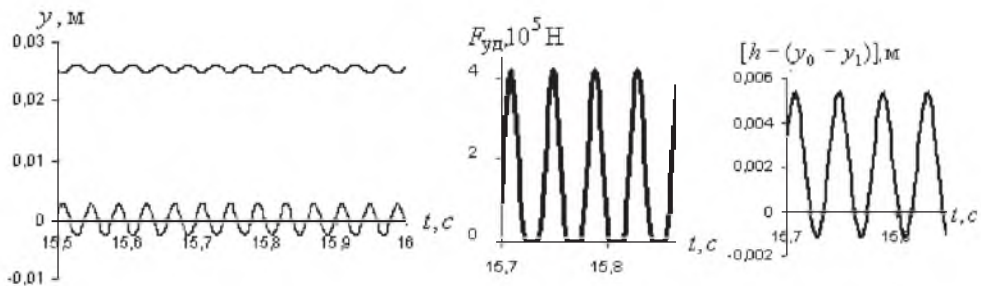


Рис. 5. Характеристики движения площадки при моделировании удара силой Герца,  $E_1 = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 0,4$ .

Величина сближения тел системы имеет как положительные, так и отрицательные значения, что свидетельствует об отрыве формы от прокладки. С дальнейшим увеличением модуля упругости  $E_1$  контактная сила Герца возрастает. Необходимо отметить, что величины полуразмахов колебаний формы и стола площадки изменяются не так значительно, как контактная сила (таблица).



**Значения полуразмахов колебаний формы и стола площадки  
при различных модулях упругости прокладки  $E_1$**

Модуль упругости прокладки $E_1, 10^8 \text{ Н/м}^2$	Максимум контактной силы Герца, $10^5 \text{ Н}$	Полуразмах колебаний формы, мм	Полуразмах колебаний стола площадки, мм
3	4,15	0,563	2,668
4	4,72	0,616	2,781
7	5,95	0,693	2,949
8	6,28	0,709	2,982
10	6,86	0,732	3,032
11	7,13	0,741	3,052
12	7,38	0,754	3,084

Сравнение результатов, полученных при моделировании удара упругой силой и силой Герца, показывает, что максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний формы и стола площадки одинаковы при достаточно большой величине модуля упругости прокладки, а именно:  $E_1 = 12 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ . В то же время величины, полученные при как можно меньших значениях  $E_1$ , находятся ближе к реальным значениям полуразмахов стола площадки (2...2,5 мм) [6, 8]. Следовательно, в рассматриваемой модели сила Герца лучше моделирует удар, чем сила упругости. Рассмотрим детальнее эти силы. На рис. 6 представлены зависимости контактной силы от времени и сближения тел за период одного удара. Контактная сила приведена в трех случаях: упругая сила (на рис. 6 кривые 1) и сила Герца при  $E_1 = 12 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (кривые 2) и при  $E_1 = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (кривые 3).

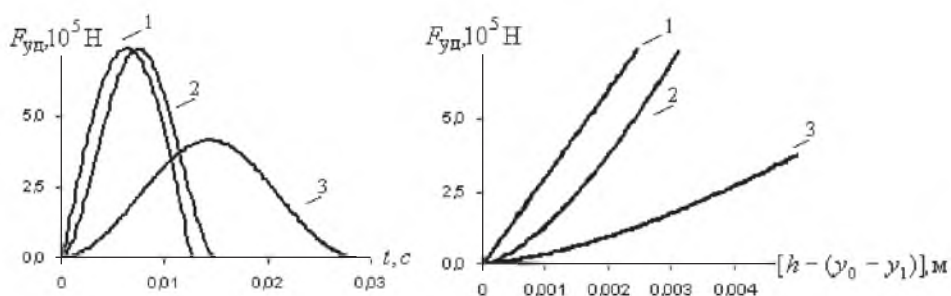


Рис. 6. Изменение контактной силы за период удара.

**2.3. Моделирование удара граничными условиями с применением коэффициента восстановления  $R$ .** Моделируем удар с использованием формулы (7). На рис. 7,а представлены перемещения формы и стола площадки при  $R = 1$ . После переходного периода режим колебаний неустановившийся, хотя близок к таковому, о чем свидетельствуют фазовые траектории, построенные для процесса без переходного периода (рис. 7,б,в).

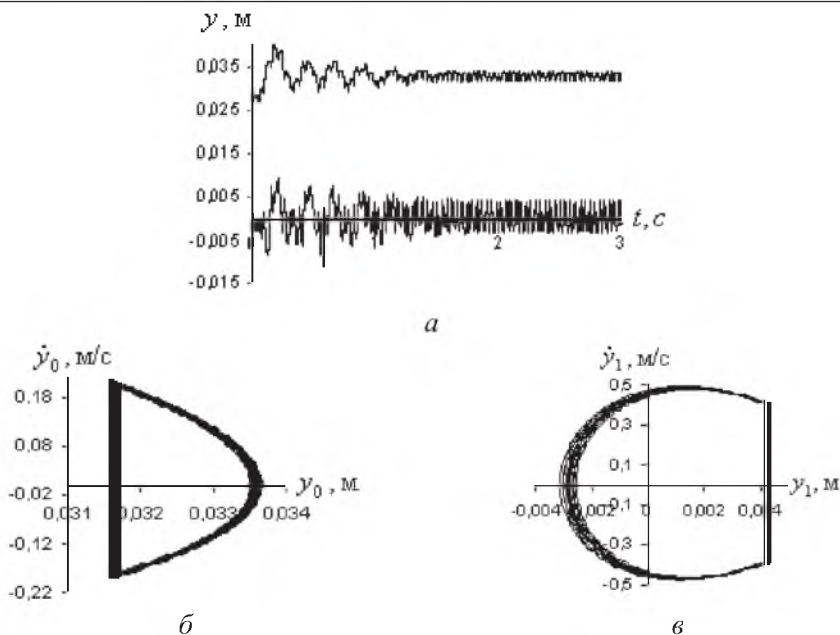


Рис. 7. Характеристики движения площадки при моделировании удара с использованием коэффициента восстановления  $R$ .

Значения максимальных полуразмахов колебаний формы и стола площадки без переходного периода соответственно составляют 1,057 и 3,733 мм, что больше реальных величин (2...2,5 мм) [6, 8]. Использование коэффициента восстановления  $R$ , меньшего единицы ( $R = 0,9$  и меньше), не позволяет получить правильную картину движения стола площадки и формы.

Таким образом, моделирование удара с помощью граничных условий с использованием коэффициента восстановления  $R$  в рассматриваемой модели не является удачным.

## Выводы

1. Для рассматриваемой модели двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы характерны большая масса падающего тела, податливость одной из контактирующих поверхностей и отрыв одного тела от другого.

2. Моделирование удара с помощью граничных условий с использованием коэффициента восстановления хуже других способов воспроизводит реальную картину движения виброударной системы в первую очередь потому, что согласно такому подходу удар предполагается мгновенным, совместным движением тел в период удара пренебрегаем. В то же время при большой податливости прокладки период удара велик, его время сравнимо со временем раздельного движения тел и пренебречь их совместным движением в период удара нельзя.

3. При моделировании удара силой контактного взаимодействия допустимо использование в качестве этой силы как силы Герца, так и силы упругости. Сила Герца позволяет точнее и подробнее учитывать механи-



ческие характеристики соударяющихся тел, благодаря чему получаемый результат лучше отвечает реальному движению виброударной площадки.

## Резюме

Розглядаються різні способи моделювання удару у віброударних системах: силою контактної взаємодії, яка розглядається як пружна сила і як сила, що відповідає закону Герца; за допомогою граничних умов із використанням коефіцієнта відновлення. Проводиться порівняння результатів моделювання цими способами і даються рекомендації щодо їх застосування.

1. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Иванов А. П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997. – 336 с.
3. *Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Лукьянченко О. А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 82 – 90.
4. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
5. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
6. *Гусев Б. В., Зазимко В. Г.* Вибрационная технология бетона. – Киев: Будівельник, 1991. – 160 с.
7. *Назаренко І. І.* Машины для виробництва будівельних матеріалів: Підручник. – Київ: КНУБА, 1999. – 488 с.
8. *Рекомендации по вибрационному формованию железобетонных изделий.* – М.: НИИЖБ, 1986. – 78 с.
9. *Дукарт А. В.* Развитие теории ударных гасителей колебаний и устройств, содержащих ударные звенья, и их приложение для виброзащиты строительных конструкций и сооружений: Автореф. дис... д-ра техн. наук. – М., 1993. – 32 с.

Поступила 24. 06. 2008