УДК 539.3

Анализ напряженного состояния круглого тонкостенного цилиндра при сложном нагружении и нелинейном упрочнении материала

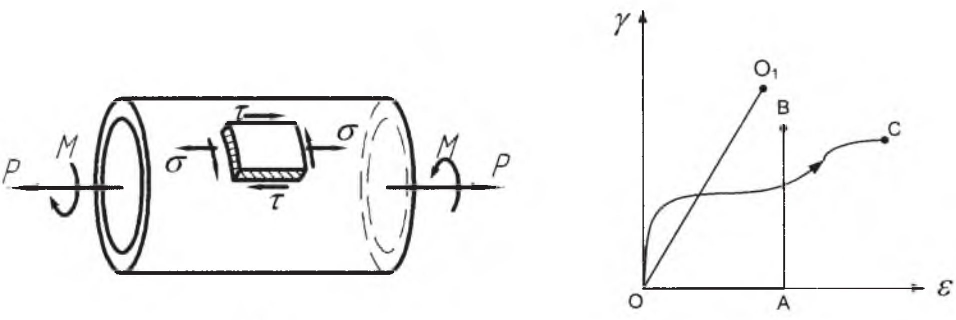
И. В. Хромов

Севастопольский национальный технический университет, Севастополь, Украина

С использованием кинематической модели Прагера получены обобщенные дифференциальные уравнения пластического течения для материала с нелинейным упрочнением. Приведен пример численного анализа изменения напряжений при упругопластическом деформировании тонкостенного цилиндра из конструкционной углеродистой стали для различных моделей упругопластического материала.

Ключевые слова: плоское напряженное состояние, кинематическая модель упругопластических деформаций, уравнения пластического течения, нелинейное упрочнение.

Введение. Задача о сложном нагружении круглого тонкостенного цилиндра является одним из примеров, используемых для сравнения различных вариантов математической модели упругопластического материала. При воздействии продольной силы P и крутящего момента M материал круглого цилиндра находится в условиях однородного плоского напряженного состояния с компонентами напряжений σ, τ и деформаций ε, γ (рис. 1,*а*). Для пластической стадии нагружения различают линейную и нелинейную, в том числе ломаную, траектории деформирования. В первом случае деформации материала возрастают пропорционально одному параметру ($\gamma/\varepsilon = \mathrm{const}$, на рис. 1,*б* луч OO_1). Всякий другой путь является кусочно-нелинейным (на рис. 1,*б* линии OAB, OC).



а *б*

Рис. 1. Растяжение и кручение тонкостенного цилиндра: *а* – схема нагружения; *б* – траектории деформирования материала.

При линейной траектории деформирования, как известно [1–4], достаточно использовать деформационную теорию пластичности. Тогда в рассматриваемой задаче для идеального материала без упрочнения можно получить следующие конечные соотношения (уравнения Генки):

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{3}}}; \qquad \tau = \frac{\sigma_{\text{т}}\dfrac{b}{3}}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{3}}}, \tag{1}$$

где $b=\gamma/\varepsilon=\text{const}$; $\sigma_{\text{т}}$ – предел текучести, причем напряжения удовлетворяют условию текучести Мизеса $\sigma^2+3\tau^2=\sigma_{\text{т}}^2$.

Известно, что для процессов с нелинейной траекторией деформирования применение деформационной теории может приводить к неудовлетворительным результатам. При решении таких задач более эффективно использовать теорию пластического течения [1 4]. Уравнения пластического течения являются дифференциальными зависимостями, которые в общем случае не могут быть приведены к конечным аналитическим формулам, т.е. напряжения в конечном состоянии существенно зависят от всей "истории" деформирования. Применительно к данной задаче в литературных источниках представлены два варианта уравнений пластического течения:

уравнения Прандтля–Рейса [1, 3] для идеального несжимаемого материала без упрочнения (на рис. 2 диаграмма растяжения *1*):

$$d\sigma = E\left(1-\frac{\sigma^2}{\sigma_{\text{т}}^2}\right)d\varepsilon - E\frac{\sigma\tau}{\sigma_{\text{т}}^2}d\gamma, \qquad d\tau = \frac{E}{3}\left(1-\frac{3\tau^2}{\sigma_{\text{т}}^2}\right)d\gamma - E\frac{\sigma\tau}{\sigma_{\text{т}}^2}d\varepsilon, \tag{2}$$

где E – модуль упругости материала,

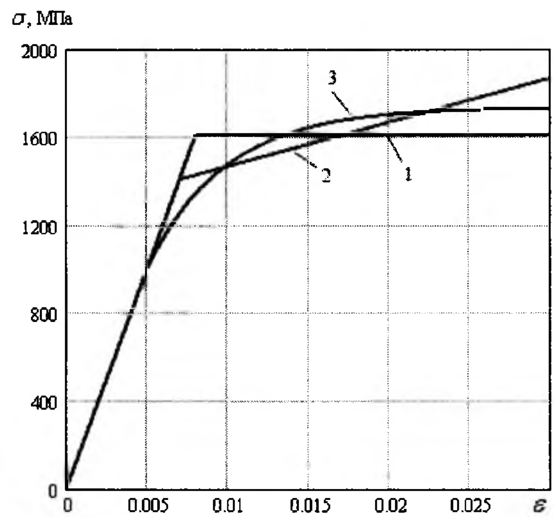


Рис. 2. Расчетные диаграммы растяжения холоднотянутой канатной проволоки (конструкционная углеродистая сталь) для различных вариантов модели упрочнения: *1* – без упрочнения; *2*, *3* соответственно линейное и нелинейное упрочнение.

и для идеального материала с линейным упрочнением [5] (на рис. 2 диаграмма растяжения *2*):

$$d\sigma = E\left(1 - K\frac{\sigma^2}{\sigma_\text{т}^2}\right)d\varepsilon - EK\frac{\sigma\tau}{\sigma_\text{т}^2}d\gamma, \qquad d\tau = \frac{E}{3}\left(1 - K\frac{3\tau^2}{\sigma_\text{т}^2}\right)d\gamma - EK\frac{\sigma\tau}{\sigma_\text{т}^2}d\varepsilon, \qquad (3)$$

где K – функция, зависящая от коэффициента упрочнения материала $\lambda = \mathrm{const}$, $K = \dfrac{1-\lambda}{(1-\lambda q)^2}$; q – параметр, характеризующий предыдущую пластическую деформацию материала.

Действительная диаграмма растяжения пластичных материалов за пределами упругого нагружения, в том числе конструкционной углеродистой стали (на рис. 2 диаграмма *3*), имеет явно выраженный нелинейный характер. Поэтому расчеты напряженного состояния на основе уравнений (2), (3) могут иметь погрешность, недопустимую для определенного класса задач технологической механики.

Цель настоящей работы – теоретический анализ и численное решение задачи о сложном нагружении тонкостенного круглого цилиндра с учетом нелинейного характера упрочнения пластичного материала.

Методика анализа. Для наглядного представления изменения напряжений и вывода обобщенных уравнений используем традиционную геометрическую интерпретацию условия текучести в виде поверхности нагружения (поверхности текучести). Поверхность нагружения в пространстве напряжений σ_{ij} разделяет в данном состоянии материала области упругих и пластических деформаций (рис. 3). Начало координат O соответствует нулевым напряжениям. Догружение приводит либо к упругой деформации, если вектор $d\sigma_{ij}$ направлен внутрь поверхности или по касательной к поверхности, либо к пластической, если вектор $d\sigma_{ij}$ направлен наружу. При наличии упрочнения материала поверхность нагружения может смещаться относительно точки O и изменять свою форму (кинематическая модель Прагера) [1, 5].

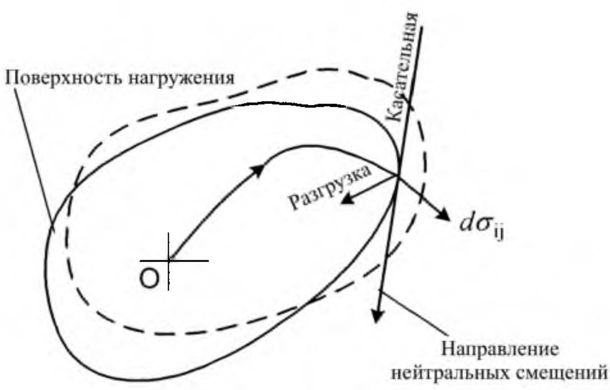


Рис. 3. Поверхность нагружения и кинематическая модель упругопластических деформаций.

Трансформация поверхности нагружения, т.е. связь между напряжениями и деформациями, зависит от принятой модели упругопластического материала. Далее используем гипотезу изотропного упрочнения, когда поверхность нагружения расширяется изотропно.

Уравнения пластического течения для материала с нелинейным упрочнением. Следуя указанной выше методике, рассмотрим вывод уравнений, описывающих связь между напряжениями и деформациями материала в малой окрестности произвольной точки поперечного сечения тонкостенной трубы. Для упрощения дальнейших преобразований используем:

безразмерные нормальное $\tilde{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sigma_{\text{т}}}$ и касательное $\tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{\tau_{\text{т}}}$ напряжения; (4)

приведенные деформации удлинения $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{т}}}$ и сдвига $\tilde{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\gamma_{\text{т}}}$, (5)

где $\varepsilon_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}}/E$, $\gamma_{\text{т}} = \tau_{\text{т}}/G$ – деформации удлинения и сдвига, соответствующие пределам текучести материала.

Согласно модели Прагера, введем неподвижную $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\gamma}$ и подвижную $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$ системы координат (рис. 4). Поверхность нагружения (окружность) соединена в точке O (рис. 4) с подвижной системой и описывается уравнением (условие текучести)

$$\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\tau}^2 = \varphi^2, \tag{6}$$

где $\varphi = \varphi(\eta_n)$ – переменный радиус окружности, зависящий от нормальной составляющей полной деформации η_n.

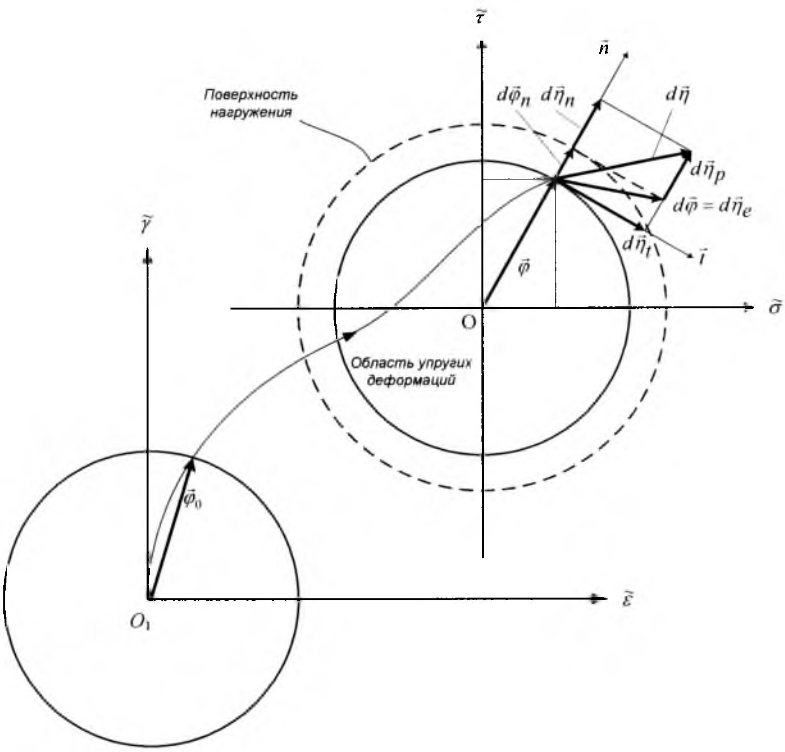


Рис. 4. Кинематическая модель пластического течения материала при совместном растяжении и сдвиге.

Пусть в некоторый момент времени напряженное состояние определяется вектором $\vec{\varphi}$ с компонентами $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\tau}$, которые удовлетворяют условию пластичности (6). Зададим бесконечно малый вектор приведенной деформации $d\vec{\eta}$ с компонентами $d\widetilde{\varepsilon}$, $d\widetilde{\gamma}$. Вектор можно представить в виде суммы $d\vec{\eta} = d\vec{\eta}_e + d\vec{\eta}_p$. Из рис. 4 видно, что пластическая составляющая вектора деформации $d\vec{\eta}_p$ вызывает перемещение подвижной системы координат и поверхности текучести в пространстве деформаций $\widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{\gamma}$, а упругая составляющая $d\vec{\eta}_e$ – изменение вектора напряжений согласно закону Гука:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\eta}_e = d\vec{\eta} - d\vec{\eta}_p. \tag{7}$$

При этом изменение вектора напряжений происходит вследствие нейтрального смещения по касательной к поверхности нагружения (поворот вектора напряжений $\vec{\varphi}$) и расширения поверхности (изменение модуля вектора напряжений $d\varphi = d\varphi_n$). Для учета нелинейного характера упрочнения (расширения поверхности) введем понятие мгновенного коэффициента упрочнения

$$\lambda(\eta_n) = \frac{d\varphi_n}{d\eta_n} = \frac{d\varphi}{d\eta_n}, \tag{8}$$

характеризующего интенсивность изменения радиуса поверхности текучести $\varphi(\eta_n)$.

Если функция (8) известна, то приращение пластической составляющей вектора деформаций, как следует из рис. 4, определяется по формуле

$$d\vec{\eta}_p = d\vec{\eta}_n - d\vec{\varphi}_n = d\vec{\eta}_n - \lambda(\eta_n) d\vec{\eta}_n = (1 - \lambda(\eta_n))\, d\vec{\eta}_n. \tag{9}$$

Нормальную составляющую вектора приращения деформаций выразим через нормальный единичный вектор и скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $d\vec{\eta}$ (рис. 4):

$$d\vec{\eta}_n = (\vec{n} \cdot d\vec{\eta})\vec{n} = \left(\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} d\vec{\eta}\right)\frac{\vec{\varphi}}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}(\vec{\varphi} \cdot d\vec{\eta})\vec{\varphi}.$$

Тогда равенство (9) с учетом (8) преобразуется к виду

$$d\vec{\eta}_p = \left(1 - \frac{d\varphi}{d\eta_n}\right)\frac{1}{\varphi^2}(\vec{\varphi} \cdot d\vec{\eta})\vec{\varphi} = K(\eta_n)(\vec{\varphi} \cdot d\vec{\eta})\vec{\varphi}, \tag{10}$$

где $K(\eta_n)$ – функция, учитывающая нелинейный характер упрочнения материала,

$$K(\eta_n) = \left(1 - \frac{d\varphi}{d\eta_n}\right)\frac{1}{\varphi(\eta_n)^2}. \tag{11}$$

Подставив (10) в (7), получим искомое соотношение между приращениями напряжений и деформаций в векторном виде:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\eta} - K(\eta_n)(\vec{\varphi} \cdot d\vec{\eta})\vec{\varphi}. \tag{12}$$

Спроектировав обе части этого равенства на оси координат (рис. 4), получим безразмерные скалярные уравнения:

$$\begin{aligned} d\widetilde{\sigma} &= (1 - K(\eta_n)\widetilde{\sigma}^2)\, d\widetilde{\varepsilon} - K(\eta_n)\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}\, d\widetilde{\gamma}; \\ d\widetilde{\tau} &= -\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}\, d\widetilde{\varepsilon} + (1 - K(\eta_n)\,\widetilde{\tau}^2)\, d\widetilde{\gamma}. \end{aligned} \tag{13}$$

С учетом обозначений (4), (5) последние уравнения окончательно запишем в размерном виде:

$$d\sigma = E\left(1 - K(\eta_n)\frac{\sigma^2}{\sigma_{\text{т}}^2}\right)d\varepsilon - EK(\eta_n)\frac{\sigma\tau}{\sigma_{\text{т}}^2}\, d\gamma; \tag{14}$$

$$d\tau = -EK(\eta_n)\frac{\sigma\tau}{\sigma_{\text{т}}^2}\, d\varepsilon + \frac{E}{3}\left(1 - K(\eta_n)\frac{3\tau^2}{\sigma_{\text{т}}^2}\right)d\gamma. \tag{15}$$

Рассмотрим отмеченные выше два примера. Если в (11) принять $\lambda = \frac{d\varphi}{d\eta_n} = 0$ и $\varphi(\eta_n) = 1$ (упрочнение отсутствует), то (13) преобразуются в уравнения (2). При линейном упрочнении имеем $\lambda = \frac{d\varphi}{d\eta_n} = \text{const}$, $\varphi(\eta_n) = 1 + \lambda\eta_n$. Тогда из (13) следуют уравнения (3). Таким образом, уравнения пластического течения (13) с учетом (11) являются естественным обобщением известных уравнений для материала с произвольной функцией изотропного упрочнения.

Численный пример анализа напряженного состояния стального цилиндра. Рассмотрим тонкостенный цилиндр из конструкционной углеродистой стали. Предположим, что свойства стали моделируются с помощью диаграмм растяжения, приведенных на рис. 2. Для аналитического описания этих диаграмм использовали три варианта аппроксимирующих функций [6]:

для диаграммы *1*: $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{\text{т}1}, E\varepsilon, \sigma_{\text{т}1})$, где $\sigma_{\text{т}1} = 1608$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\lambda = 0$;

для диаграммы *2*: $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{\text{т}2}, E\varepsilon, \sigma_{\text{т}2} + \lambda E(\varepsilon - \varepsilon_{\text{т}2}))$, где $\sigma_{\text{т}2} = 1406$ МПа, $\lambda = 0{,}1$;

для диаграммы *3*: $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{\text{т}3}, E\varepsilon, \sigma_{\text{т}3} + \sigma_0(1 - a^{\gamma(\varepsilon - \varepsilon_{\text{т}3})}))$, где $\sigma_{\text{т}3} = 1009$ МПа, $\sigma_0 = 723$ МПа, $a = 0{,}376$, $\gamma = 213$.

Пусть деформирование цилиндра происходит в два этапа (по аналогии с нелинейной траекторией *OAB* на рис. 1,*б*): чистое растяжение до величины относительного удлинения $\varepsilon_1 = 0{,}005$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{т}3}$ для диаграммы *3*, рис. 2) и чистый сдвиг до деформации $\gamma_2 = 0{,}035$. На первом этапе деформирования материал цилиндра находится в упругом состоянии, и напряжения определяются согласно закону Гука. На втором этапе, в зависимости от принятой расчетной модели, материал может переходить из упругого состояния в пластическое. Поэтому для расчета напряжений использовали дифференциальные уравнения пластического течения (2), (3) и (14). Численное интегрирование и графическую обработку результатов выполняли с помощью компьютерных технологий. Расчетные зависимости нормальных и касательных напряжений от деформации сдвига на втором этапе нагружения цилиндра приведены на рис. 5.

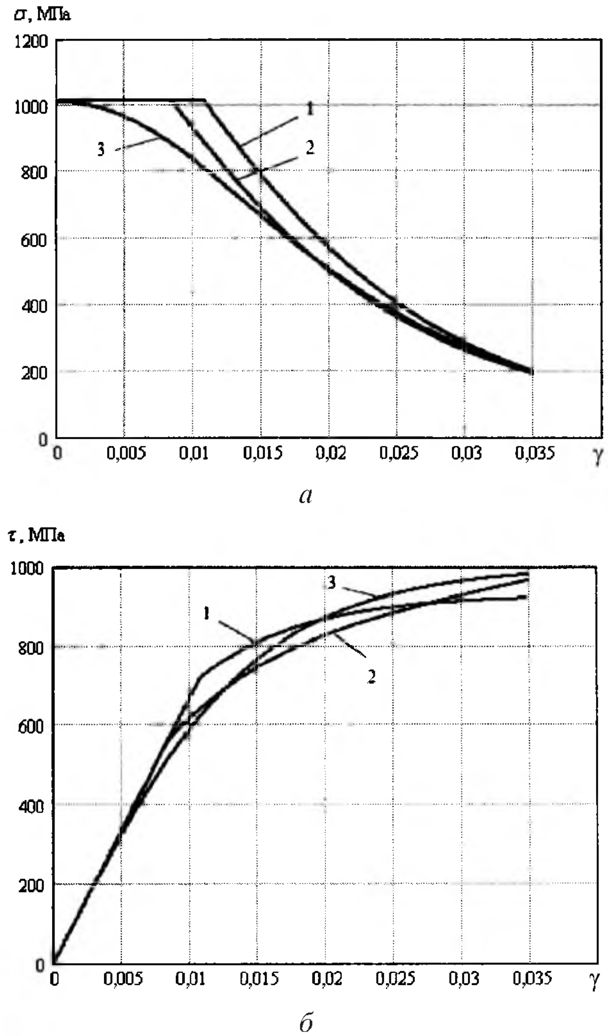


Рис. 5. Расчетные зависимости изменения нормальных (*а*) и касательных (*б*) напряжений в процессе упругопластической деформации сдвига при различных вариантах модели упрочнения: *1* – без упрочнения; *2*, *3* – соответственно линейное и нелинейное упрочнение.

Заключение. Результаты расчетов в переходной упругопластической области, полученные на основе нелинейной модели упрочнения и обобщенных уравнений пластического течения, могут на 5...20% отличаться от данных аналогичных расчетов с использованием упрощенных кусочно-линейных диаграмм растяжения и соответствующих им уравнений течения. Таким образом, применение нелинейной модели упрочнения при моделировании сложного нагружения позволяет существенно уточнить результаты численного анализа напряженного состояния материала в упругопластической области.

Резюме

Із використанням кінематичної моделі Прагера отримано узагальнені диференціальні рівняння пластичної течії для матеріалу з нелінійним зміцненням. Наведено приклад числового аналізу зміни напруг за пружно-пластичного деформування тонкостінного циліндра з конструкційної вуглецевої сталі для різних моделей пружно-пластичного матеріалу.

1. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
3. *Филин А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.
4. *Reckling K. A.* Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 361 s.
5. *Хромов В. Г.* Механика процесса холодной упругопластической деформации стержня: Учеб. пособие. – Киев: УМК ВО, 1990. – 50 с.
6. *Хромов В. Г.*, *Хромов И. В.* Выбор аппроксимирующей функции для диаграммы растяжения материала в задачах технологической механики стержня // Вестн. СевГТУ. Механика, энергетика, экология. – 2007. – Вып. 80. – С. 20 – 22.

Поступила 08. 01. 2008