УДК 539.3

Вынужденные колебания балки с существенно нелинейным гасителем

К. В. Аврамов[а], О. В. Гендельман[б]

[а] Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

[б] Израильский технологический институт – Технион, Хайфа, Израиль

Вынужденные колебания балки описываются с помощью дискретной модели с двумя степенями свободы, а ее взаимодействие с существенно нелинейным гасителем – моделью с тремя степенями свободы. Анализируются движения балки, способствующие гашению колебаний, которые представляются нелинейными нормальными формами колебаний в конфигурационном пространстве. Расчет движений проводится по методу Раушера. Исследуется устойчивость таких движений по Ляпунову.

Ключевые слова: нелинейные гасители, метод Раушера, нелинейные нормальные формы колебаний.

Постановка задачи. Конструкции и теория линейных гасителей колебаний хорошо известны и широко представлены в литературных источниках [1]. К сожалению, такие устройства используются для гашения вынужденных колебаний только в узком частотном диапазоне. Нелинейные гасители колебаний являются эффективными в большем частотном диапазоне [2–5]. Работа системы с таким гасителем рассматривается в [6], там же представлены их различные конструкции. Виброударный гаситель с одной степенью свободы предложен в [7] для гашения вынужденных колебаний. В [8] показано, что нелинейный гаситель уменьшает амплитуды колебаний в широком диапазоне частоты возмущающей силы. Процессы перекачки энергии в существенно нелинейный гаситель исследуются в [9, 10].

В настоящей работе исследуется взаимодействие балки, совершающей вынужденные колебания, с существенно нелинейным гасителем. Движения балки описываются разложением по двум формам ее собственных колебаний. Для исследования полученной существенно нелинейной системы с тремя степенями свободы применяются методы Раушера и нелинейных нормальных форм. Исследуется устойчивость движения балки по Ляпунову.

Нелинейные нормальные формы консервативных систем соответствуют синхронным периодическим движениям, при которых все массы достигают максимальных значений и проходят через нуль одновременно. Если дискретная система совершает колебания по нелинейной нормальной форме, то это движение имеет вид кривой в конфигурационном пространстве. Положительным для нелинейных нормальных форм колебаний является возможность описать движение системой с одной степенью свободы. Нелинейные нормальные формы очень важны при анализе вынужденных колебаний. Основные резонансы при вынужденных колебаниях в нелинейных системах в случае отсутствия внутренних резонансов происходят около нелинейных нормальных форм свободных колебаний.

Метод Раушера является эффективным при анализе вынужденных колебаний неавтономных систем с одной степенью свободы q [11]. Согласно подходу предполагается, что периодическая сила, действующая на этот осциллятор, равняется нулю. В такой автономной системе аналитически отыскивается движение $q(t)$. Затем это решение обращается в $t = t(q)$ и вводится в неавтономную часть системы, которая представляет собой периодическую внешнюю силу. В результате получается псевдоавтономная динамическая система, которая может быть решена аналитически. Некоторое обобщение метода Раушера рассмотрено в [12]. В [11] предложено использовать полиномы Чебышева для аппроксимации функции $t = t(q)$. В [13] комбинацию метода Раушера и нелинейных нормальных форм использовали для анализа дискретных систем с произвольным числом степеней свободы.

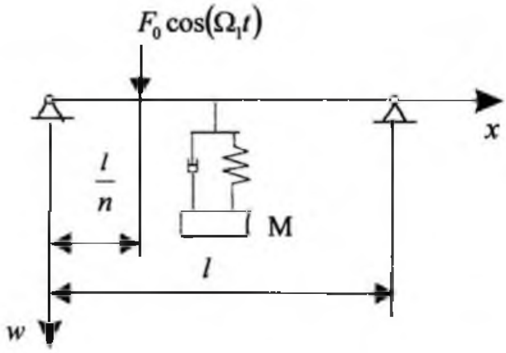

Рис. 1. Механическая система, состоящая из балки и гасителя.

Рассматриваемая механическая система представлена на рис. 1. Гаситель системы связан с балкой существенно нелинейной пружиной, которая описывается силой $R = \hat{K}\Delta^3$, где Δ – перемещения пружины. Колебания балки возбуждаются с помощью периодической нагрузки, которая приложена в точке $x = l/n$, где l – длина балки; n – произвольное число. Гаситель крепится в точке $l/2$. В таком случае наблюдается наиболее эффективное гашение собственных колебаний первой формы. Данная механическая система описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением [14]:

$$\rho A \hat{w}_{\hat{t}\hat{t}} + \hat{\beta}\hat{w}_{\hat{t}} + EJ\hat{w}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = \frac{EA}{2l}\hat{w}_{\hat{x}\hat{x}}\int_0^l \hat{w}_{\hat{x}}^2 d\hat{x} + \hat{F}_0\hat{\delta}\left(\hat{x} - \frac{l}{n}\right)\cos(\hat{\Omega}\hat{t}) +$$

$$+\hat{\delta}\left(\hat{x} - \frac{l}{2}\right)\left\{\hat{K}\left[\hat{q} - \hat{w}\left(\frac{l}{2}, \hat{t}\right)\right]^3 + \hat{\gamma}\left[\dot{\hat{q}} - \dot{\hat{w}}\left(\frac{l}{2}, \hat{t}\right)\right]\right\}; \qquad (1)$$

$$\hat{M}\ddot{\hat{q}} = -\hat{K}\left[\hat{q} - \hat{w}\left(\frac{l}{2}, \hat{t}\right)\right]^3 - \hat{\gamma}\left[\dot{\hat{q}} - \dot{\hat{w}}\left(\frac{l}{2}, \hat{t}\right)\right], \qquad (2)$$

где $\hat{w}_{\hat{t}} = \dot{\hat{w}} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}}$; $\hat{w}_{\hat{x}} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}$; $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$ – динамический прогиб балки; $\dfrac{EA}{2l}\int\limits_0^l \hat{w}_{\hat{x}}^2 d\hat{x}$ – продольная сила, возникающая вследствие умеренных перемещений; ρ, E – плотность материала стержня и модуль Юнга; J, A – момент инерции и площадь поперечного сечения; $\hat{q}$ – обобщенная координата, описывающая динамику гасителя; $\hat{M}$– масса гасителя; $\hat{\gamma}$ – коэффициент вязкого сопротивления.

Рассматриваемая балка может моделировать, например, лопасть вертолета или руку манипулятора.

Введем безразмерные переменные и параметры [15]:

$$x = \frac{\hat{x}}{l}; \qquad t = \frac{\hat{r}}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\hat{t}; \qquad w = \frac{\hat{w}}{l}; \qquad q = \frac{\hat{q}}{l}; \qquad \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) = l\hat{\delta}\left(\hat{x} - \frac{l}{2}\right);$$

$$r = \frac{\hat{r}}{l}; \qquad \Omega = \hat{\Omega}\frac{l^2}{r}\sqrt{\frac{\rho}{E}}; \qquad \beta = \frac{\hat{\beta} l}{Ar\sqrt{\rho E}}; \qquad F_0 = \frac{\hat{F}_0}{AE}; \tag{3}$$

$$K = \frac{\hat{K} l^3}{AE}; \qquad \gamma = \frac{\hat{\gamma} r}{Al\sqrt{\rho E}}; \qquad \overline{M} = \frac{\hat{M}}{\rho A l},$$

где $\hat{r}$ – радиус инерции поперечного сечения, $\hat{r} = \sqrt{J/A}$.

Динамическую систему (1), (2) запишем относительно безразмерных переменных и параметров:

$$r^2(w_{tt} + \beta w_t + w_{xxxx}) = \frac{w_{xx}}{2}\int\limits_0^1 w_x^2 dx + F_0\delta\left(x - \frac{1}{n}\right)\cos(\Omega t) +$$

$$+ \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)\left\{K\left[q - w\left(\frac{1}{2}, t\right)\right]^3 + \gamma\left[\dot{q} - \dot{w}\left(\frac{1}{2}, t\right)\right]\right\}; \tag{4}$$

$$\overline{M} r^2 \ddot{q} + K\left[q - w\left(\frac{1}{2}, t\right)\right]^3 + \gamma\left[\dot{q} - \dot{w}\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] = 0. \tag{5}$$

Колебания балки $w(x, t)$ представим в виде разложения по двум формам собственных колебаний:

$$w(x, t) = r^k[u_1(t)\sin\pi x + u_2(t)\sin 2\pi x], \qquad k > 1. \tag{6}$$

Координата гасителя удовлетворяет следующей замене переменных: $q = r^k\theta$. В дальнейшем используем малый параметр $\varepsilon = r^{2k-2} << 1$. Предположим, что масса гасителя значительно меньше массы балки:

$$\overline{M} = \varepsilon M. \tag{7}$$

Анализ нелинейных нормальных форм колебаний производится без учета диссипации [13]. Поэтому полагаем, что $\gamma = 0$. Уравнение (6) введем в (4), (5) и будем решать его с помощью метода Бубнова–Галеркина. В результате получим следующую дискретную динамическую систему:

$$\ddot{u}_1 + \pi^4 u_1 + \varepsilon \frac{\pi^4}{4}(u_1^2 + 4u_2^2)u_1 = \varepsilon f_0 \cos\Omega t + \varepsilon 2K(\theta - u_1)^3; \tag{8а}$$

$$\ddot{u}_2 + 16\pi^4 u_2 + \varepsilon\pi^4(u_1^2 + 4u_2^2)u_2 = \varepsilon f_0 \cos\Omega t; \tag{8б}$$

$$M\ddot{\theta} + K(\theta - u_1)^3 = 0; \tag{8в}$$

$$\varepsilon f_0 = \sqrt{3} F_0 r^{-2-k}. \tag{8г}$$

Из уравнения (8г) следует, что внешняя сила имеет тот же порядок малости по ε, что и нелинейные члены дискретной модели балки (8а), (8б). Более того, значения линейных упругих и инерционных сил дискретной модели балки (8а), (8б) больше, чем периодической сосредоточенной силы.

Нелинейная нормальная форма режима гашения колебаний. Рассматриваются вынужденные колебания системы (8), соответствующие режиму гашения. Предположим, что амплитуды колебаний балки (u_1, u_2) являются малыми, а гаситель совершает колебания с большими размахами. Тогда величины обобщенных координат можно оценить так:

$$u_1 = O(\varepsilon); \qquad u_2 = O(\varepsilon); \qquad \theta = O(1). \tag{9}$$

Рассмотрим использование методов Раушера и нелинейных нормальных форм для анализа движений (9). Исследуем режим гашения в невозмущенной системе (8), $\varepsilon = 0$. Движения (9) представим в виде

$$u_1 = u_2 = 0; \qquad M\ddot{\theta} + K\theta^3 = 0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) можно записать так:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\,\theta_{\max}\chi} F(\varphi, k_1); \qquad k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tag{11а}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\theta}{\theta_{\max}}\right), \tag{11б}$$

где $\chi = \sqrt{K/(2M)}$; $\theta_{\max}$ – амплитуда колебаний; $F(\varphi, k_1)$ – эллиптический интеграл; k_1 – модуль эллиптического интеграла.

Уравнение (11а) может быть представлено в следующем виде:

$$\theta = \theta_{\max} cn\,(\sqrt{2}\,\theta_{\max}\chi t,\, k_1), \tag{12}$$

где $cn(\sqrt{2}\,\theta_{\max}\chi t,\, k_1)$ – функция Якоби.

Уравнение (12) запишем так:

$$\theta = \theta_{\max} \cos\varphi. \tag{13}$$

Следуя методу Раушера, нулевое приближение режима гашения колебаний (11а) введем в динамическую систему (8). В результате получим псевдоавтономную систему [3], которая приближенно описывает вынужденные колебания. Решение (11а) введем в слагаемое $\varepsilon f_0 \cos\Omega t$ уравнения (8):

$$\varepsilon f_0 \cos\Omega t = \varepsilon f_0 g(\varphi) = \varepsilon f_0 \cos\left[\frac{\Omega}{\sqrt{2}\theta_{\max}\chi} F(\varphi,\, k_1)\right]. \tag{14}$$

Функция $g(\varphi)$ является периодической: $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$. Из этого условия получим значения частот возмущающей силы Ω:

$$\Omega = \frac{\theta_{\max}\chi\pi}{\sqrt{2}K(k_1)}. \tag{15}$$

Тогда функцию $g(\varphi)$ запишем так:

$$g(\varphi) = \cos\left[\frac{\pi}{2K(k_1)} F(\varphi,\, k_1)\right]. \tag{16}$$

Для дальнейшего анализа функцию $g(\varphi)$ представим в виде ряда Фурье:

$$g(\varphi) = A_1 \cos\varphi + A_3 \cos 3\varphi + \ldots\,. \tag{17}$$

Гармоники ряда (17) получены аналитически [3] и имеют следующий вид:

$$A_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}; \qquad A_3 = \frac{\pi\sqrt{2}\left[\pi^2 - 3K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}{3\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)K^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{18}$$

Введем (13) в (17) и получим степенной ряд:

$$g(\theta) = (A_1 - 3A_3)\frac{\theta}{\theta_{\max}} + 4A_3\,\frac{\theta^3}{\theta_{\max}^3} + \ldots\,. \tag{19}$$

Систему уравнений (8) заменим следующей псевдоавтономной системой:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i + \varepsilon\pi^4\alpha_i(u_1^2 + 4u_2^2)u_i = \varepsilon f_0 g(\theta) + \varepsilon 2K\beta_i(\theta - u_1)^3, \qquad i = 1, 2; \quad (20а)$$

$$M\ddot{\theta} + K(\theta - u_1)^3 = 0, \quad (20б)$$

где $\omega_1^2 = \pi^4$; $\omega_2^2 = 16\pi^4$; $\alpha_1 = \frac{1}{4}$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 0$.

Нелинейная нормальная форма динамической системы (20) имеет вид [13]

$$u_i = u_i(\theta), \qquad i = 1, 2. \quad (21)$$

Теперь уравнения (20) представим в конфигурационном пространстве. Для этого воспользуемся следующими формулами:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = u_i''(\theta)\dot{\theta}^2 + u_i'(\theta)\ddot{\theta}. \quad (22)$$

С использованием (22) уравнение (20б) запишем так:

$$\dot{\theta}^2 = -4\chi^2 \int_{\theta_{\max}}^{\theta} [\theta - u_1(\theta)]^3 d\theta. \quad (23)$$

Формулы (20б), (22) и (23) введем в (20а). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в конфигурационном пространстве:

$$-4\chi^2 u_i''(\theta) \int_{\theta_{\max}}^{\theta} [\theta - u_1(\theta)]^3 d\theta - 2\chi^2(\theta - u_1)^3 u_i'(\theta) + \omega_i^2 u_i +$$

$$+ \varepsilon\pi^4\alpha_i(u_1^2 + 4u_2^2)u_i = \varepsilon f_0 g(\theta) + \varepsilon 2K\beta_i(\theta - u_1)^3, \qquad i = 1, 2. \quad (24)$$

Согласно оценкам (9), режим гашения колебаний представим так:

$$u_i = \varepsilon\bar{u}_i(\theta). \quad (25)$$

Уравнение (25) введем в (24) и проведем асимптотический анализ, в результате чего получим:

$$-\chi^2\bar{u}_i''(\theta)[\theta^4 - \theta_{\max}^4] - 2\chi^2\theta^3\bar{u}_i'(\theta) + \omega_i^2\bar{u}_i =$$

$$= f_0 g(\theta) + 2K\beta_i\theta^3 + O(\varepsilon), \qquad i = 1, 2. \quad (26)$$

Для определения граничных условий уравнение $\theta = \pm\theta_{\max}$ введем в (26). Оба граничных условия тождественны вследствие симметрии решений $u_i(\theta)$, $i = 1, 2$ и принимают следующий вид:

$$-2\chi^2\theta_{\max}^3\bar{u}_i'(\theta_{\max}) + \omega_i^2\bar{u}_i(\theta_{\max}) =$$

$$= f_0 g(\theta_{\max}) + 2K\beta_i\theta_{\max}^3 + O(\varepsilon), \qquad i = 1, 2. \tag{27}$$

Решение системы (26), (27) представим так:

$$\bar{u}_i = B_1^{(i)}\theta + B_3^{(i)}\theta^3 + B_5^{(i)}\theta^5 + \ldots, \qquad i = 1, 2, \tag{28}$$

где параметры $B_1^{(i)}$, $B_3^{(i)}$, ... подлежат определению.

Ряд (28) введем в систему дифференциальных уравнений (26) и граничные условия (27). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях θ, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров $B_1^{(i)}$, $B_3^{(i)}$, $B_5^{(i)}$, ... В данном анализе система ограничена четырьмя линейными алгебраическими уравнениями. Для краткости изложения система не приводится. В результате ее решения получим коэффициенты $B_1^{(i)}$, $B_3^{(i)}$, $B_5^{(i)}$, ... Подставив их в (28) и (25), находим аналитически режим гашения. С целью краткости изложения он также не приводится.

Теперь исследуем нелинейную нормальную форму (28) при квазистатическом изменении частоты возбуждения Ω. Нелинейную моду введем в уравнение (20б), в результате чего получим следующую динамическую систему:

$$\ddot{\theta} + 2\chi^2\left[\theta^3 - 3\varepsilon\sum_{i=0} B_{2i+1}^{(1)}\theta^{2i+3}\right] + O(\varepsilon^2) = 0. \tag{29}$$

Период колебаний системы (29) определяется так:

$$T(\theta_{\max}) = 4\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{C + \chi^2\left[12\varepsilon\sum_{i=0}(2i+4)^{-1}B_{2i+1}^{(1)}\theta^{2i+4} - \theta^4\right]}}, \tag{30}$$

$$C = \chi^2\left[\theta_{\max}^4 - 12\varepsilon\sum_{i=0}(2i+4)^{-1}B_{2i+1}^{(1)}\theta_{\max}^{2i+4}\right].$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (15) и (30) совпадают.

Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний рассчитывается так. Задается значение $\theta_{\max}$ с некоторым шагом. Для каждого значения θ_{max} определяется нелинейная нормальная форма режима гашения (28) и частота колебаний из (30). При расчетах использовались следующие значения параметров: $\varepsilon = 0{,}1$; $f_0 = 1$; $K = 2$; $M = 1$. Амплитудно-частотная характеристика нелинейной нормальной формы (28) показана на рис. 2.

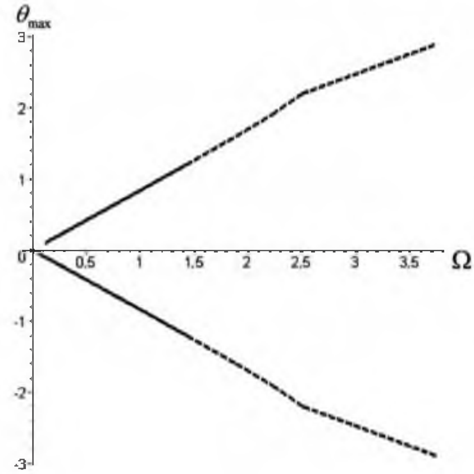

Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика механической системы (28).

При $\Omega = 0{,}59641$ и $\theta_{max} = 0{,}5$ проводилось прямое численное интегрирование нелинейной нормальной формы с использованием таких начальных условий:

$$\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = \dot{\theta}(0) = 0; \quad u_1(0) = \varepsilon \bar{u}_1(\theta_{max}); \quad u_2(0) = \varepsilon \bar{u}_2(\theta_{max}); \quad \theta(0) = \theta_{max}.$$

Результаты расчета (рис. 3) представлены в конфигурационном пространстве (u_1, θ). На рис. 3 приведена нелинейная нормальная форма режима гашения, полученная аналитически. Видно, что аналитические и численные результаты очень близки.

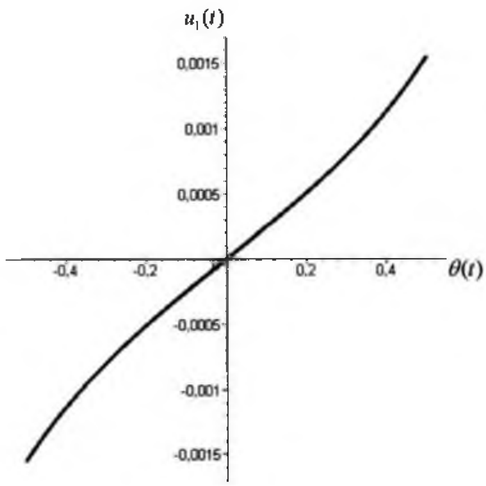

Рис. 3. Результаты прямого численного моделирования нелинейной нормальной формы в конфигурационном пространстве, где по осям откладываются обобщенные координаты.

Анализ устойчивости колебаний. Рассматривается устойчивость по Ляпунову нелинейной нормальной формы (25), (28). Введем малые отклонения $\Delta u_1(t)$, $\Delta u_2(t)$, $\Delta\theta(t)$ от периодических траекторий $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\theta(t)$, которые удовлетворяют системе уравнений в вариациях:

$$\Delta\ddot{u}_1 + \pi^4 \Delta u_1 + 6\varepsilon K\theta^2(t)(\Delta u_1 - \Delta\theta) + O(\varepsilon^2) = 0; \tag{31а}$$

$$\Delta\ddot{u}_2 + 16\pi^4 \Delta u_2 + O(\varepsilon^3) = 0; \tag{31б}$$

$$\Delta\ddot{\theta} + 6\chi^2[(2\varepsilon B_1^{(1)} - 1)\theta^2 + 2\varepsilon B_3^{(1)}\theta^4 + 2\varepsilon B_5^{(1)}\theta^6](\Delta u_1 - \Delta\theta) = 0, \tag{31в}$$

где функция $\theta(t)$ имеет вид (13).

Из уравнения (31б) следует, что переменная $\Delta u_2(t)$ является независимой. Более того, уравнения (31а), (31в) не зависят от Δu_2. Поэтому для дальнейшего анализа устойчивости система (31а), (31в) рассматривается отдельно от (31б). Для упрощения уравнений (31а), (31в) функцию $\theta(t)$ представим так:

$$\theta(t) = \frac{2\Omega}{\chi}\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{ch}^{-1}[\pi(j - 0{,}5)]\cos[(2j-1)\Omega t]. \tag{32}$$

Систему (31а), (31в) запишем в виде

$$\Delta\ddot{u}_1 + \pi^4 \Delta u_1 + 48\varepsilon\Omega^2 M[G_1 + G_2\cos(2\Omega t)](\Delta u_1 - \Delta\theta) = 0; \tag{33а}$$

$$\Delta\ddot{\theta} + 6\chi^2[G_3 + G_4\cos(2\Omega t)](\Delta u_1 - \Delta\theta) = 0. \tag{33б}$$

Параметры G_1, G_2, G_3, G_4 не приведены с целью краткости изложения.

Для исследования устойчивости тривиальных решений фундаментальная матрица определяется прямым численным интегрированием при $t = 2\pi\Omega^{-1}$ [12]. Численно исследуем устойчивость периодических движений, которые представлены на рис. 2. Устойчивые и неустойчивые движения показаны на рис. 2 сплошными и штриховыми линиями соответственно. Заметим, что нормальная форма (рис. 3) соответствует области устойчивых колебаний, бифуркация типа "вилка" периодических движений [16] наблюдается при $\theta_{\max} \approx 1{,}2$ и $-1{,}2$.

Резюме

Вимушені коливання стрижня описуються за допомогою моделі з двома степенями вільності, а його взаємодія із суттєво нелінійним гасником – моделлю з трьома степенями вільності. Аналізуються рухи балки з точки зору гасіння коливань, які представляються нелінійними нормальними формами у конфігураційному просторі. Для їх дослідження використовується метод Раушера. Аналізується стійкість рухів по Ляпунову.

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 735 с.
2. *Avramov K. V. and Mikhlin Yu. V.* Damping of free elastic vibrations in linear systems // Int. Appl. Mech. – 2005. – No. 2. – P. 203 – 209.
3. *Avramov K. V. and Mikhlin Yu. V.* Snap-through truss as an absorber of forced oscillations // J. Sound Vibration. – 2006. – No. 29. – P. 705 – 722.
4. *Михлин Ю. В., Решетникова С. Н.* Анализ динамического поведения двухмассовой системы при существенно нелинейном виброгашении // Прикл. механика. – 2005. – № 1. – С. 102 – 111.
5. *Mikhlin Yu. V. and Reshetnikova S. N.* Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber // J. Sound Vibration. – 2005. – No. 283. – C. 91 –120.
6. *Nissen J. C., Popp K., and Schmalhorst R.* Optimization of a non-linear vibration absorber // Ibid. – 1985. – No. 99. – P. 149 – 154.
7. *Semecigil S. E., Lammers D., and Ying Z.* A new tuned vibration absorber for wide-band excitations // Ibid. – 1992. – No. 156. – P. 445 – 459.
8. *Natsiavas S.* Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers // Ibid. – P. 227 – 245.
9. *Gendelman O. V.* Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment // Nonlinear Dynamics. – 2004. – No. 37. – P. 115 – 128.
10. *Gendelman O. V., Gourdon E., and Lamarque C. H.* Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing // J. Sound Vibrations. – 2006. – No. 294. – P. 651 – 662.
11. *Rauscher M.* Steady oscillations of system with nonlinear and unsymmetrical elasticity // J. Appl. Mech. – 1938. – **5**, A-169.
12. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 259 с.
13. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. – 280 с.
14. *Avramov K. V.* Bifurcations at combination resonance and quasiperiodic vibration of flexible beams // Int. Appl. Mech. – 2003. – No. 8. – P. 976 – 982.
15. *Nayfeh A. H. and Mook D. T.* Nonlinear Oscillations. – New York: John Wiley and Sons, 1979. – 880 p.
16. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 450 с.

Поступила 10. 04. 2007