УДК 539.37

Построение определяющих соотношений изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа сложности n. Сообщение 1. Конечные деформации

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

С использованием подходов рациональной механики континуума разработана математическая теория строгого построения и специализации общих определяющих соотношений простых по Ноллу изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа сложности n (аналоги твердых тел Ривлина–Эриксена сложности n) как наиболее важных представителей материалов с инфинитезимальной памятью формы траектории (памятью формы траектории на произвольно малом интервале "прошлого"). Деформации – конечные. Построена иерархия определяющих соотношений по уровню сложности реакции материала на деформирование.

Ключевые слова: математическая теория, определяющее соотношение, простой по Ноллу упрочняющийся упругопластический материал дифференциального типа сложности n, конечные деформации, изотропия.

Ранее [1–5] с использованием подходов рациональной механики континуума разработана математическая теория строгого построения и специализации общих определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов (тел, сплошных сред, континуумов) со сколь угодно длительным забыванием (затухающей памятью) формы траектории при активном деформировании. В этих материалах пластические деформации имеют место сразу после приложения нагрузки или по достижении начальной поверхности нагружения и монотонно увеличиваются в процессе деформирования. Деформации и тип симметрии тела – произвольные. Для процессов деформирования, близких к пропорциональным, мало отличающихся от начального предела текучести или от ненапряженной и недеформируемой конфигурации, построены физические уравнения материалов, не обладающих памятью формы траектории, со слабой затухающей памятью, с затухающей памятью n-го порядка. С позиций затухающей памяти формы траектории дано определение упруго-идеально-пластического материала. На основе построенных определяющих соотношений получены зависимости для изотропных тел.

Исходя из физических уравнений линейной теории упругопластичности при конечных деформациях [1–3, 5] в работах [3–5] посредством принятия условия малости мер деформации в течение всего "прошлого" для отмеченных выше процессов деформирования разработана математическая теория строгого построения определяющих соотношений упрочняющихся упругопластических материалов со сколь угодно длительной затухающей памятью формы траектории первого порядка для бесконечно малых деформаций. Тип симметрии тела – произвольный. Особое внимание уделено изотропным

© П. П. ЛЕПИХИН, 2009

сплошным средам. Определены условия приведения построенных соотношений к эндохронной теории пластичности.

Ряд используемых в технике материалов с упругопластическим поведением проявляет память формы траектории на малом интервале прошлого [6, 7]. Вместе с тем теория построения определяющих соотношений таких материалов недостаточно разработана.

В работе с использованием подходов рациональной механики континуума разработана математическая теория строгого построения и специализации общих определяющих соотношений простых по Ноллу изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа сложности n (аналоги твердых тел Ривлина–Эриксена сложности n) как наиболее важных представителей материалов с инфинитезимальной памятью формы траектории (памятью формы траектории на произвольно малом интервале прошлого). Деформации – конечные. Построена иерархия определяющих соотношений по уровню сложности реакции материала на деформирование.

Аналогично работам [8–10] для вязкоупругих материалов изучим класс сплошных сред с упругопластическим поведением, в которых при активном деформировании на напряжения в материальной точке X тела влияет лишь путь (история) деформирования на произвольно малом интервале $[\xi, \xi+\delta]$ прошлого [11], где δ – некоторое положительное число, ξ – длина дуги траектории тензора деформаций Грина второго типа $\mathbf{E}$. Такие материалы назовем упругопластическими с инфинитезимальной памятью формы траектории [11]. История деформирования до любого заданного "момента" в прошлом не имеет значения для определения напряжений в рассматриваемом материале при текущем значении ξ. Будем изучать только те упругопластические материалы с инфинитезимальной памятью формы траектории, в которых напряжения определяются первыми n производными от градиента деформации $\mathbf{F}$ по ξ в точке $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации. Такой материал назовем упругопластическим материалом дифференциального типа, а n – его сложностью [11].

Тогда их определяющее соотношение можно представить так:

$$\sigma = \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{F}}^{(n)}, \widetilde{\mathbf{F}}^{(n-1)}, \ldots, \widetilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \mathbf{F}). \qquad (1)$$

Здесь σ – тензор напряжений Коши; $\mathbf{f}$ – отображение $(n+1)$-го тензорного аргумента на симметричные тензоры; аргумент $\mathbf{X}$ не выписан;

$$\widetilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \frac{d^k \mathbf{F}}{d\xi^k}, \qquad k = \overline{1, n},$$

где $\dfrac{d}{d\xi}$ – производная по ξ при $\mathbf{X}$ постоянных ("материальная" производная).

Из принципа материальной независимости от системы отсчета получим следующую приведенную форму определяющего соотношения упругопластического материала дифференциального типа сложности n [11]:

$$\sigma^{\mathbf{R}} = \mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_1^{\mathbf{R}}, \widetilde{\mathbf{\Lambda}}_2^{\mathbf{R}}, \ldots, \widetilde{\mathbf{\Lambda}}_n^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{g}$ – в общем случае анизотропная функция, переводящая наборы из $(n+1)$-го симметричного тензорного аргумента в симметричные тензоры;

$$\widetilde{\mathbf{A}}_r \equiv \mathbf{C}_\xi^{(r)}(\xi) \equiv \partial_V^r \mathbf{C}_\xi(V)\Big|_{V=\xi};$$

тензор $\widetilde{\mathbf{A}}_i^{\mathbf{R}}$ определяется формулой

$$\widetilde{\mathbf{A}}_i^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \widetilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{R};$$

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ – правый тензор Коши–Грина; $\mathbf{R}$ – ортогональный тензор поворота в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$; положительно определенные симметричные тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ удовлетворяют соотношению $\mathbf{V} = \mathbf{RUR}^{\mathrm{T}}$ и называются соответственно правым и левым тензорами растяжения; $\mathbf{C}_\xi$ – правый относительный тензор Коши–Грина. Здесь и далее верхний индекс “т” обозначает транспонирование.

Тензоры $\widetilde{\mathbf{A}}_r$ назовем аналогами тензоров Ривлина–Эриксена, а тензоры-аргументы функции $\mathbf{g}$ в (2) – кинематическими тензорами [11].

Соотношение (2) можно получить из определяющего соотношения простого по Ноллу упругопластического материала в форме [12]

$$\sigma^{\mathbf{R}} = \sigma((\mathbf{C}_\xi^\xi)^{\mathbf{R}}; \mathbf{C}) \tag{3}$$

посредством замены $\mathbf{C}_\xi^\xi$ аналогами тензоров Ривлина–Эриксена $\widetilde{\mathbf{A}}_r$ при $r = \overline{1, n}$, где $\mathbf{C}_\xi^\xi$ – история изменения правого относительного тензора Коши–Грина; $\sigma(\,)$ – отображение $((\mathbf{C}_\xi^\xi)^{\mathbf{R}}; \mathbf{C})$ на симметричные тензоры.

Если упругопластический материал дифференциального типа изотропен, уравнение (2) принимает вид [11]

$$\sigma = \mathbf{k}(\widetilde{\mathbf{A}}_1, \widetilde{\mathbf{A}}_2, \ldots, \widetilde{\mathbf{A}}_n, \mathbf{B}). \tag{4}$$

Соотношение (4) справедливо только при условии, что левый тензор Коши–Грина $\mathbf{B} = \mathbf{FF}^{\mathrm{T}}$ вычислен по отношению к неискаженной конфигурации твердого деформируемого тела.

Функция $\mathbf{k}$ изотропна в том смысле, что

$$\mathbf{k}(\mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{A}}_1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{A}}_2\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{A}}_n\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \mathbf{QBQ}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{Qk}(\widetilde{\mathbf{A}}_1, \widetilde{\mathbf{A}}_2, \ldots, \widetilde{\mathbf{A}}_n, \mathbf{B})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

для всех аргументов функции $\mathbf{k}$ и всех ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$.

Уравнение (4) назовем определяющим соотношением упругопластического аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n [11] (далее – аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n).

Для изучения деформирования аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n отождествим с системой отсчета неподвижную ортогональную декартову систему координат, введение которой устанавливает взаимно однозначное непрерывное соответствие между геометрическими точками трехмерного евклидова пространства и тройками чисел – координатами точек.

Далее под конфигурацией будем понимать заданное соответствие материальных частиц исследуемого объема сплошной среды (далее – частиц) и точек пространства, которые частицы занимают при значении параметра ξ. В процессе деформирования тела его конфигурация непрерывно изменяется. В качестве отсчетной (начальной, основной) конфигурации χ_0 выберем конфигурацию сплошной среды при $\xi = 0$. Предположим, что в начальной конфигурации среда находится в ненапряженном и недеформированном состоянии. Введем в χ_0 независимую от ξ и совпадающую с системой отсчета систему координат, с помощью которой каждой частице ставится в соответствие тройка чисел (X_1, X_2, X_3). Как и в работе [13], эту систему координат будем называть лагранжевой неподвижной системой координат. Конфигурацию деформируемой сплошной среды в момент ξ назовем актуальной деформированной и обозначим χ_ξ. Определим положение тела в χ_ξ координатами x_i $(i=\overline{1,3})$ в системе отсчета так, что для каждой его частицы x_i есть функция от ξ. При $\xi = 0$ координаты x_i равны X_i. Тогда можно пометить каждую частицу тела координатами X_i и рассматривать x_i как функции X_j и ξ. При таких предположениях деформирование упругопластического континуума можно описать соотношением

$$x_i = \chi_\chi^i(X_j, \xi), \qquad i, j = \overline{1,3}. \tag{6}$$

В случае если три функции (6) известны, формоизменение сплошной среды полностью определено. Уравнения (6) дают при текущем значении ξ положение x_i $(i=\overline{1,3})$ материальной частицы, занимавшей при $\xi = 0$ точку (X_1, X_2, X_3). Таким образом, эти зависимости можно трактовать как установление соответствия между точками отсчетной и актуальной деформированной конфигураций. Предположим, что такое соответствие взаимно однозначно и непрерывно с непрерывными частными производными любого порядка, который потребуется.

В момент ξ перемещения u_i частиц тела, занимавших при $\xi = 0$ положение X_i, равны $x_i - X_i$, их "скорости" – $\widetilde{V}_i^{(1)} = \dfrac{dx_i}{d\xi}$, "ускорения" – $\widetilde{V}_i^{(2)} = \dfrac{d\widetilde{V}_i^{(1)}}{d\xi} = \dfrac{\partial \widetilde{V}_i^{(1)}}{\partial \xi} + \widetilde{V}_l^{(1)} \dfrac{\partial \widetilde{V}_i^{(1)}}{\partial x_l}$ и их $(k-1)$ "ускорения" – $\widetilde{V}_i^{(k)} = \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} + \widetilde{V}_l^{(1)} \dfrac{\partial}{\partial x_l}\right)^{(k-1)} \widetilde{V}_i^{(1)}$, где $\dfrac{\partial}{\partial \xi}$ – производная по ξ при x_i постоянных.

Компоненты тензоров σ, $\widetilde{\mathbf{A}}_1$, $\widetilde{\mathbf{A}}_2, \ldots, \widetilde{\mathbf{A}}_n$, $\mathbf{B}, \ldots$ в системе координат x_i обозначим σ_{ij}, $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{A}_{ij}^{(2)}, \ldots, \widetilde{A}_{ij}^{(n)}$, $B_{ij}, \ldots$.

Запишем выражение (4) в координатной форме в системе координат x_i:

$$\sigma_{mk} = k_{mk}(\widetilde{A}_{ij}^{(1)}, \widetilde{A}_{ij}^{(2)}, \ldots, \widetilde{A}_{ij}^{(n)}, B_{ij}). \tag{7}$$

Здесь σ_{mk} – компонента тензора напряжения Коши при текущем значении ξ; k_{mk} – симметричная изотропная тензорная функция;

$$B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_l}\frac{\partial x_j}{\partial X_l}; \tag{8}$$

$$\widetilde{A}_{ij}^{(r)} = 2\widetilde{d}_{ij}^{(r)} + \sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}\frac{\partial \widetilde{V}_l^{(r-s)}}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{V}_l^{(s)}}{\partial x_j}, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{d}_{ij}^{(r)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{V}_i^{(r)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{V}_j^{(r)}}{\partial x_i}\right), \qquad r = \overline{1, n};$$

$$\binom{r}{s} \equiv C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}, \qquad s \le r.$$

(Здесь и далее повторяющийся индекс в одночленном выражении обозначает суммирование в заданном диапазоне изменения этого индекса.)

Будем рассматривать свойство изотропии относительно группы ортогональных преобразований. При этом ограничимся, как и авторы [14, 15], скалярными и тензорными инвариантами, являющимися полиномиальными функциями. Обоснование этого выбора дано в [14]. Далее скалярные инварианты назовем инвариантами.

Для заданной системы переменных (в нашем случае симметричных тензоров второго ранга) и заданной группы преобразований используем такие же, как и в [14], определения. Полиномиальный инвариант является приводимым, если его можно представить в виде полинома от других инвариантов, в противном случае он называется неприводимым. Совокупность полиномиальных инвариантов такая, что любой полиномиальный инвариант может быть выражен в виде полинома от членов данной совокупности, называется целым рациональным базисом; целый рациональный базис является минимальным, если содержит наименьшее из возможных число членов. Все члены минимального целого рационального базиса являются неприводимыми. Инварианты являются функционально независимыми, если ни один из них не может быть выражен как функция остальных. Система инвариантов образует функциональный базис, если любой инвариант можно представить как функцию этих инвариантов. Можно показать [14], что целый рациональный базис является также функциональным базисом; однако, вообще говоря, он не будет минимальным функциональным базисом. Функциональный базис является минимальным, если входящие в него инварианты будут функционально независимыми. Наиболее общий вид тензорной функции (7), обладающей свойствами [14], назовем форм-инвариантом.

Для матриц компонент тензора напряжения и кинематических тензоров (8), (9) введем обозначения:

$$\sigma = [\sigma_{ij}]; \tag{10}$$

$$B = [B_{ij}]; \qquad \widetilde{A}_k = [\widetilde{A}_{ij}^{(k)}]. \tag{11}$$

Матрицы (11) назовем кинематическими, а проблемы тензорных функций (7) будем формулировать как проблемы функций от матриц [11, 15].

Для краткости иногда, как и в работе [14], будем говорить о тензорах σ_{ij}, σ и т.д., когда, строго говоря, имеем в виду тензоры, компоненты которых принимают эти значения в системе координат x_i, или тензоры, с которыми матрицы σ и другие связаны.

Построим возможные формы специализации уравнения (7) при различных ограничениях на свойства материала и процессы его деформирования. Согласно данным [8], такие два вида специализации являются плодотворными в механике простых материалов.

Далее при построении более простых, чем форм-инвариант, определяющих соотношений будем использовать изложенный в работе [16] подход, согласно которому тензор напряжения σ как изотропную функцию N тензоров можно представить в виде

$$\sigma = \varphi_i M_i, \tag{12}$$

где M_i – произвольные линейно независимые тензоры из набора образующих соответствующий форм-инвариант тензоров; φ_i – коэффициенты, зависящие от функционально независимых инвариантов, выбранных из целого рационального базиса для рассматриваемого форм-инварианта.

Приведенные ниже результаты получены для процессов деформирования, т.е. когда тот или иной вид определяющего соотношения и условия его построения справедливы в течение конечного интервала изменения ξ.

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 0. Для этого тела напряжение в (7) является функцией только тензора B_{ij}:

$$\sigma_{mk} = k_{mk}(B_{ij}). \tag{13}$$

Согласно, например, монографии [14], форм-инвариант в этом случае имеет матричный вид:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 B^2, \tag{14}$$

где I – единичная матрица; φ_i $(i = \overline{1,3})$ зависят от минимального целого рационального базиса, включающего следующие инварианты:

$$tr\,B,\ tr\,B^2,\ tr\,B^3. \qquad (15)$$

Здесь и далее tr – след матрицы.

В работе [15] показано, что в случае простого спектра тензора B (неравенства всех трех его главных значений) матрицы I, B, B^2 – линейно независимые, а инварианты (15) – функционально независимые. Отсюда можно сделать вывод, что если тензор напряжений σ является изотропной функцией только B, то при $\overline{B}_{11} \neq \overline{B}_{22} \neq \overline{B}_{33} \neq \overline{B}_{11}$ образующие форм-инварианта – линейно независимые, а инварианты (15) представляют собой минимальный целый рациональный базис, совпадающий с минимальным функциональным базисом. Здесь и далее $\overline{B}_{11}$, $\overline{B}_{22}$, $\overline{B}_{33}$ – главные значения тензора B, а черточка над тензором или его компонентой обозначает их значения в главных осях тензора B.

Приведем пример дальнейшей специализации уравнения (13). Согласно данным [15, 16], в случае осесимметричности тензора B (наличие одной и только одной пары равных главных значений) линейно независимыми будут матрицы I и B, функционально независимыми – инварианты $tr\,B$ и $tr\,B^2$. Следовательно, в соответствии с уравнением (12) выражение (13) может быть записано в матричном виде так:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B, \qquad (16)$$

где φ_i $(i = \overline{1, 2})$ зависят от

$$tr\,B \quad \text{и} \quad tr\,B^2. \qquad (17)$$

Из приведенных примеров видно, что если напряжение является изотропной функцией только тензора B, при тех или иных ограничениях на свойства этого тензора можно получить пространства σ различной, не превышающей трех, размерности. При этом, если размерность пространства выше двух, то определяющее соотношение всегда тензорно нелинейное.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим, что в работах [10, 15] для твердых тел Ривлина–Эриксена сложности n, аргументами которых помимо тензора B есть $n+1$ тензор Ривлина–Эриксена, зависящий от параметра времени, доказан ряд теорем и построен набор определяющих соотношений. В рассматриваемом случае аналогов твердых тел Ривлина–Эриксена сложности n при доказательстве аналогичных теорем и построении подобных определяющих соотношений, несмотря на то что параметром деформирования является ξ, ничего не изменится. Поэтому для краткости будем ссылаться на работы [10, 15], учитывая, что их результаты справедливы и для аналогов тел Ривлина–Эриксена той или иной сложности.

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 1. Для рассматриваемого тела напряжение в (7) является функцией B_{ij} и $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$:

$$\sigma_{mk} = k_{mk}(\widetilde{A}_{ij}^{(1)}, B_{ij}). \qquad (18)$$

Согласно, например, работам [14, 17], форм-инвариант в этом случае имеет такой матричный вид:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 \widetilde{A}_1 + \varphi_4 B^2 + \varphi_5 \widetilde{A}_1^2 + \varphi_6 B * \widetilde{A}_1 +$$

$$+\varphi_7 B^2 * \widetilde{A}_1 + \varphi_8 B * \widetilde{A}_1^2 + \varphi_9 B^2 * \widetilde{A}_1^2, \tag{19}$$

где φ_i $(i = \overline{1,9})$ определяются целым рациональным базисом, включающим

$$tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, B^3,\ tr\, \widetilde{A}_1,\ tr\, \widetilde{A}_1^2,\ tr\, \widetilde{A}_1^3,\ tr\, B\widetilde{A}_1,\ tr\, B^2\widetilde{A}_1,\ tr\, B\widetilde{A}_1^2,\ tr\, B^2\widetilde{A}_1^2; \tag{20}$$

здесь и далее звездочка при обозначении произведения тензоров служит символом симметрирования: $B * \widetilde{A}_1 = \frac{1}{2}(B\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_1 B)$.

Приведем примеры дальнейшей специализации уравнения (18).

Если тензор B имеет простой спектр и ни один из недиагональных элементов $\widetilde{\widetilde{A}}_1$ в главных осях B не равен нулю, то, как показано в работе [15], линейно независимыми будут матрицы $I,\ B,\ \widetilde{A}_1,\ B^2,\ B * \widetilde{A}_1,\ B^2 * \widetilde{A}_1$, а функционально независимыми – инварианты

$$tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, B^3,\ tr\, \widetilde{A}_1,\ tr\, \widetilde{A}_1^2,\ tr\, B\widetilde{A}_1,\ tr\, B^2\widetilde{A}_1,\ tr\, B\widetilde{A}_1^2,\ tr\, B^2\widetilde{A}_1^2. \tag{21}$$

Тогда, согласно (12), возможна такая матричная форма записи уравнения (18):

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 \widetilde{A}_1 + \varphi_4 B^2 + \varphi_5 B * \widetilde{A}_1 + \varphi_6 B^2 * \widetilde{A}_1, \tag{22}$$

где коэффициенты φ_i $(i = \overline{1,6})$ зависят от инвариантов (21).

Если тензор B обладает простым спектром, а B и $\widetilde{A}_1$ имеют одно и только одно общее главное направление, то, как установлено в работе [15], матрицы $I,\ B,\ \widetilde{A}_1,\ B^2$ будут линейно независимыми, инварианты

$$tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, B^3,\ tr\, \widetilde{A}_1,\ tr\, \widetilde{A}_1^2,\ tr\, B\widetilde{A}_1,\ tr\, B^2\widetilde{A}_1 \tag{23}$$

– функционально независимыми.

Тогда, согласно (12), соотношение (18) в матричном виде можно записать так:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 \widetilde{A}_1 + \varphi_4 B^2, \tag{24}$$

где коэффициенты φ_i $(i = \overline{1,4})$ зависят от инвариантов (23).

Далее предположим, что тензор B обладает простым спектром, а B и $\widetilde{A}_1$ соосны (имеют три общих главных направления). Как установлено [15], при этом тензор σ как изотропная функция B и $\widetilde{A}_1$ также соосен B и $\widetilde{A}_1$. Причем, согласно данным [18], σ, B, $\widetilde{A}_1$ и любые образованные из двух последних мультипликативные симметричные тензоры второго ранга имеют все три общих главных направления, принадлежат трехмерному тензорному пространству симметричных тензоров второго ранга и, следовательно, каждые четыре из них будут линейно зависимыми.

Рассмотрим два случая. Вначале выберем линейно независимыми тензоры I, B, B^2. Как показано в [15], это справедливо тогда и только тогда, когда B имеет простой спектр. При принятых предположениях простота спектра B [15] является также необходимым и достаточным условием функциональной независимости инвариантов

$$tr\,B,\ \ tr\,B^2,\ \ tr\,B^3,\ \ tr\,\widetilde{A}_1,\ \ tr\,B\widetilde{A}_1,\ \ tr\,B^2\widetilde{A}_1. \tag{25}$$

Тогда, учитывая вышеизложенное и уравнение (12), соотношение (18) может быть записано в матричном виде так:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 B^2, \tag{26}$$

где φ_i $(i = \overline{1,3})$ зависят от инвариантов (25).

Прежде чем перейти к рассмотрению второго случая, сформулируем теорему.

Теорема 1. Если тензор B осесимметричный в течение конечного интервала изменения ξ, то $\widetilde{\widetilde{A}}_1$ имеет равные диагональные элементы с соответствующими паре равных главных значений B индексами.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [10].

Частный случай теоремы. Если тензоры B и $\widetilde{A}_1$ соосны в течение конечного интервала изменения ξ, то доказательство теоремы не изменится. Однако при этом $\widetilde{A}_1$, как и B, будет осесимметричным, а главные плоскости, образованные парами равных главных значений B и $\widetilde{A}_1$, будут совпадать.

Тензоры I, B и $\widetilde{A}_1$ выберем линейно независимыми. При рассматриваемых ограничениях это справедливо только при

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & \overline{B}_{11} & \widetilde{\widetilde{A}}{}_{11}^{(1)} \\ 1 & \overline{B}_{22} & \widetilde{\widetilde{A}}{}_{22}^{(1)} \\ 1 & \overline{B}_{33} & \widetilde{\widetilde{A}}{}_{33}^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{27}$$

Анализ данных [10] свидетельствует, что простота спектра B в течение конечного интервала изменения ξ является необходимым условием выполнения (27).

Аналогично [10] можно показать, что при выполнении условия (27) инварианты

$$tr\,B,\ \ tr\,B^2,\ \ tr\,B^3,\ \ tr\,\widetilde{A}_1,\ \ tr\,\widetilde{A}_1^2,\ \ tr\,B\widetilde{A}_1 \qquad (28)$$

– функционально независимые.

Тогда, как следует из уравнения (12), зависимость (18) можно записать в матричном виде так:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 \widetilde{A}_1, \qquad (29)$$

где φ_i $(i=\overline{1,3})$ определяются инвариантами (28).

В работе [15] приведены также другие допустимые тензорно нелинейные матричные формы специализации соотношения (18).

Заметим, что с математической точки зрения уравнения (26) и (29) равноценны в смысле строгости описания процесса деформирования тела, напряжение в котором является изотропной функцией только тензоров B и $\widetilde{A}_1$, при условии соосности последних и простоты спектра B в течение рассматриваемого интервала изменения ξ. С прикладной точки зрения тензорно линейное уравнение (29) является более предпочтительным, в частности, потому, что в качестве образующих включает члены, содержащие первые степени кинематических тензор-аргументов с ясным физическим смыслом. Последнее облегчает анализ и применение определяющих соотношений в приложениях, чего нельзя сказать об уравнении (26), содержащем тензорно нелинейный член.

Отмеченное выше преимущество тензорно линейного определяющего соотношения (29) относится также к любым другим формам представления функции (7) и ограничениям на деформирование. Подтверждением такого преимущества является применение в подавляющем большинстве прикладных исследований тензорно линейных определяющих уравнений.

Анализ полученных результатов показывает, что тензорно линейные определяющие соотношения не всегда могут быть построены. Это может быть выполнено, если число тензор-аргументов функции (7) больше или равно уменьшенной на единицу размерности пространства напряжений. В противном случае допустимы только тензорно нелинейные зависимости.

В связи с преимуществом тензорно линейных определяющих соотношений с прикладной точки зрения, отсутствием в известных литературных источниках систематически построенных и имеющих строго заданную область применимости тензорно линейных форм специализации уравнения аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n при конечных деформациях и различных ограничениях на его свойства и деформирование, а также учитывая, что наиболее широко используемыми в приложениях являются тензорно линейные определяющие зависимости неупругих тел, основное внимание уделим продолжению построения и анализа таких уравнений.

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 2. Для рассматриваемого тела напряжение в (7) является функцией тензоров B_{ij}, $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$ и $\widetilde{A}_{ij}^{(2)}$:

$$\sigma_{mk} = k_{mk}(\widetilde{A}_{ij}^{(1)}, \widetilde{A}_{ij}^{(2)}, B_{ij}). \qquad (30)$$

Форм-инвариант и целый рациональный базис в случае тензора напряжений σ, зависящего от трех тензор-аргументов, построены в [14]. Как следует из [14], образующими форм-инварианта будут тензоры I, B, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ и другие, которые в силу громоздкости не приведены, а коэффициенты форм-инварианта определяются инвариантами

$$tr\,B,\ tr\,B^2,\ tr\,B^3,\ tr\,\widetilde{A}_r,\ tr\,\widetilde{A}_r^2,\ tr\,\widetilde{A}_r^3,\ tr\,B\widetilde{A}_r,\ tr\,B^2\widetilde{A}_1,\ tr\,A_1\widetilde{A}_2,\ \sum\nolimits_1 \quad (r=\overline{1,2}), \tag{31}$$

где $\sum_1$ – ряд смешанных образованных из элементов B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ инвариантов, дополняющих первые 13 инвариантов (31) до целого рационального базиса.

Приведем пример построения более простой, чем форм-инвариант, специализации уравнения (30). Предположим, что в течение конечного интервала изменения длины дуги ξ тензор B обладает простым спектром, а B и $\widetilde{A}_1$ имеют одно и только одно общее главное направление. Тогда, согласно данным [15, 18], σ, $\widetilde{A}_2$ и все образованные из B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ мультипликативные симметричные тензоры второго ранга будут иметь это же главное направление и принадлежать четырехмерному пространству симметричных тензоров второго ранга.

Далее пусть матрицы I, B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ – линейно независимые. Необходимым и достаточным условием выполнения последнего предположения в системе координат, совпадающей с главными осями B, будет

$$B_2=\begin{vmatrix} 1 & \bar{B}_{11} & \overset{\simeq}{A}{}_{11}^{(1)} & \overset{\simeq}{A}{}_{11}^{(2)} \\ 1 & \bar{B}_{22} & \overset{\simeq}{A}{}_{22}^{(1)} & \overset{\simeq}{A}{}_{22}^{(2)} \\ 1 & \bar{B}_{33} & \overset{\simeq}{A}{}_{33}^{(1)} & \overset{\simeq}{A}{}_{33}^{(2)} \\ 0 & 0 & \overset{\simeq}{A}{}_{12}^{(1)} & \overset{\simeq}{A}{}_{12}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{32}$$

При записи (32) принято, что без ограничения общности ось x_3 является общей главной осью B и $\widetilde{A}_1$, а следовательно, и $\widetilde{A}_2$. Отметим, что необходимое условие выполнения (32), как следует из вышеизложенного, – простота спектра B.

Аналогично работе [10] можно показать, что в случае линейной независимости I, B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ инварианты

$$tr\,B,\ tr\,B^2,\ tr\,B^3,\ tr\,\widetilde{A}_1,\ tr\,\widetilde{A}_1^2,\ tr\,B\widetilde{A}_1,\ tr\,B\widetilde{A}_2,\ tr\,B^2\widetilde{A}_1,\ tr\,A_1\widetilde{A}_2,\ tr\,\widetilde{A}_2,\ tr\,\widetilde{A}_2^2 \tag{33}$$

будут функционально независимыми.

Тогда в случае выполнения (32), согласно (12), уравнение (30) может быть записано в матричном виде так:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 \widetilde{A}_1 + \varphi_4 \widetilde{A}_2, \tag{34}$$

где φ_i $(i = \overline{1, 4})$ зависят от инвариантов (33).

Рассмотренные выше примеры зависимости тензора напряжений от B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ относятся, как следует из [19], к наиболее практически важным.

Для полноты анализа рассмотрим специализацию функции (7), которая включает в общем случае $n+1$ кинематический тензор-аргумент.

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности *n*. Для такого тела напряжение в (7) является функцией тензоров B_{ij}, $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{A}_{ij}^{(2)}, \ldots, \widetilde{A}_{ij}^{(n)}$.

Как установлено в [14], форм-инвариант для σ, зависящего от $(n+1)$-го кинематического тензора, включает I, B, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n$ и другие тензоры, которые в силу громоздкости не приводятся, а коэффициенты форм-инварианта определяются следующими инвариантами:

$$\begin{gathered}
tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, B^3,\ tr\, \widetilde{A}_r,\ tr\, B\widetilde{A}_r,\ tr\, B^2\widetilde{A}_r,\ tr\, \widetilde{A}_1\widetilde{A}_r,\ tr\, B\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r,\ tr\, B^2\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r,\\
tr\, \widetilde{A}_n,\ tr\, B\widetilde{A}_n,\ tr\, \widetilde{A}_1\widetilde{A}_n,\ tr\, \widetilde{A}_2\widetilde{A}_n,\ tr\, \widetilde{A}_3\widetilde{A}_n,\ tr\, \widetilde{A}_4\widetilde{A}_n,\ \sum\nolimits_2 \quad (r = \overline{1, n-1}),
\end{gathered} \tag{35}$$

где $\sum_2$ – набор образованных из элементов $(n+1)$-й кинематической матрицы инвариантов, дополняющих совокупность из $(6n+3)$-х элементов (35) до минимального целого рационального базиса.

Рассмотрим следующие случаи. Пусть B обладает простым спектром и ни один из недиагональных элементов $\overset{\approx}{A}_1$ не равен нулю. Тогда кинематические тензоры принадлежат шестимерному пространству симметричных тензоров второго ранга. Выберем линейно независимыми I, B, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_4$. Необходимым и достаточным условием выполнения линейной независимости в системе координат $\bar{x}_i$, совпадающей с главными осями B, будет

$$B_3 = \begin{vmatrix}
1 & \bar{B}_{11} & \overset{\approx}{A}{}_{11}^{(1)} & \overset{\approx}{A}{}_{11}^{(2)} & \overset{\approx}{A}{}_{11}^{(3)} & \overset{\approx}{A}{}_{11}^{(4)}\\
1 & \bar{B}_{22} & \overset{\approx}{A}{}_{22}^{(1)} & \overset{\approx}{A}{}_{22}^{(2)} & \overset{\approx}{A}{}_{22}^{(3)} & \overset{\approx}{A}{}_{22}^{(4)}\\
1 & \bar{B}_{33} & \overset{\approx}{A}{}_{33}^{(1)} & \overset{\approx}{A}{}_{33}^{(2)} & \overset{\approx}{A}{}_{33}^{(3)} & \overset{\approx}{A}{}_{33}^{(4)}\\
0 & 0 & \overset{\approx}{A}{}_{23}^{(1)} & \overset{\approx}{A}{}_{23}^{(2)} & \overset{\approx}{A}{}_{23}^{(3)} & \overset{\approx}{A}{}_{23}^{(4)}\\
0 & 0 & \overset{\approx}{A}{}_{13}^{(1)} & \overset{\approx}{A}{}_{13}^{(2)} & \overset{\approx}{A}{}_{13}^{(3)} & \overset{\approx}{A}{}_{13}^{(4)}\\
0 & 0 & \overset{\approx}{A}{}_{12}^{(1)} & \overset{\approx}{A}{}_{12}^{(2)} & \overset{\approx}{A}{}_{12}^{(3)} & \overset{\approx}{A}{}_{12}^{(4)}
\end{vmatrix} \neq 0. \tag{36}$$

Можно показать [10, 15], что отсутствие совпадающих главных осей B и $\widetilde{A}_1$ в течение конечного интервала изменения ξ является необходимым условием выполнения неравенства (36).

Из данных [10] следует, что в случае простоты спектра B, справедливости (36) и отсутствии нулевых недиагональных элементов $\overset{\approx}{A}{}_{ij}^{(1)}$ инварианты

$$\begin{aligned} & tr\,B,\ tr\,B^2,\ tr\,B^3,\ tr\,\widetilde{A}_r,\ tr\,B\widetilde{A}_r,\ tr\,B^2\widetilde{A}_r,\ tr\,\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r,\ tr\,B\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r,\ tr\,B^2\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r, \\ & tr\,\widetilde{A}_n,\ tr\,B\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_1\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_2\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_3\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_4\widetilde{A}_n, \qquad r=\overline{1,n-1} \end{aligned} \tag{37}$$

будут функционально независимыми.

Тогда, как установлено в [10], уравнение (7) в матричном виде может быть записано так:

$$\sigma = \varphi_1 I + \varphi_2 B + \varphi_3 \widetilde{A}_1 + \varphi_4 \widetilde{A}_2 + \varphi_5 \widetilde{A}_3 + \varphi_6 \widetilde{A}_4, \tag{38}$$

где φ_i $(i=\overline{1,6})$ зависят от инвариантов (37).

Рассмотрим случай, когда в течение конечного интервала изменения ξ тензор B имеет простой спектр и один из недиагональных элементов $\widetilde{\widetilde{A}}_1$ равен нулю.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Если в течение конечного интервала изменения ξ тензор B имеет простой спектр и один из недиагональных элементов $\widetilde{\widetilde{A}}_1$ равен нулю, то не существует конечного подынтервала изменения ξ, в течение которого соответствующие последнему недиагональные элементы $\widetilde{\widetilde{A}}_2$, $\widetilde{\widetilde{A}}_3$, ..., $\widetilde{\widetilde{A}}_n$ равны нулю.

Доказательство теоремы приведено в [10].

При условии выполнения теоремы невозможно построить справедливое в течение конечного интервала изменения ξ пятичленное тензорно линейное определяющее соотношение для зависящего от $(n+1)$-го кинематического тензора $(n \geq 3)$ тензора напряжений σ, включающее в качестве образующих I, B, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_3$, т.е. в этом случае отсутствие нулевых недиагональных элементов $\widetilde{\widetilde{A}}{}_{ij}^{(1)}$ не является необходимым условием справедливости неравенства (36). При этом тензоры I, B, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, ..., $\widetilde{A}_4$ образуют базис шестимерного пространства напряжений.

Можно показать [10], что в случае простоты спектра B, выполнения условия (36) и равенства нулю одного из недиагональных элементов $\widetilde{\widetilde{A}}{}_{ij}^{(1)}$ инварианты

$$\begin{aligned} & tr\,B,\ tr\,B^2,\ tr\,B^3,\ tr\,\widetilde{A}_r,\ tr\,B\widetilde{A}_r,\ tr\,B^2\widetilde{A}_r,\ tr\,\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r,\ tr\,B\widetilde{A}_1\widetilde{A}_r, \\ & tr\,\widetilde{A}_n,\ tr\,B\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_1\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_2\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_3\widetilde{A}_n,\ tr\,\widetilde{A}_4\widetilde{A}_n, \qquad r=\overline{1,n-1} \end{aligned} \tag{39}$$

будут функционально независимыми, а уравнение (7) принимает форму (38) с коэффициентами, зависящими от инвариантов (39).

Предположим, что в течение конечного интервала изменения ξ тензор B обладает простым спектром, а B и $\widetilde{A}_1$ имеют одно и только одно общее главное направление. Тогда, согласно данным [10, 18], σ, все кинематические и любые образованные из последних мультипликативные симметричные тензоры второго ранга имеют это же общее главное направление, принадлежат четырехмерному тензорному пространству, а любые пять таких тензоров – линейно зависимы. Выбрав линейно независимыми I, B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$, т.е. удовлетворив условию (32), согласно (12) соотношение (7) можем записать в виде (34).

Как установлено в [10], при условии справедливости уравнения (34) в случае σ, зависящего от $(n+1)$-го кинематического тензора (8), (9), функционально независимыми будут $4n+3$ таких инварианта:

$$\begin{gathered} tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, B^3,\ tr\, \widetilde{A}_r,\ tr\, B\widetilde{A}_r,\ tr\, B^2\widetilde{A}_r,\ tr\, \widetilde{A}_1\widetilde{A}_r, \\ tr\, \widetilde{A}_n,\ tr\, B\widetilde{A}_n,\ tr\, \widetilde{A}_1\widetilde{A}_n,\ tr\, \widetilde{A}_2\widetilde{A}_n, \qquad r=\overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{40}$$

Следовательно, при принятых предположениях коэффициенты уравнения (34) определяются инвариантами (40). Отметим, что при $n=2$ (σ зависит только от B, $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$) инварианты (33) и (40) совпадают.

Если предположить, что тензор B в течение конечного интервала изменения ξ обладает простым спектром, а B и $\widetilde{A}_1$ соосны, то, в соответствии с данными [10, 18], σ, все кинематические и любые образованные из последних мультипликативные симметричные тензоры второго ранга тоже соосны, принадлежат трехмерному тензорному пространству, а любые четыре таких тензора – линейно зависимы. Выбрав линейно независимыми I, B, $\widetilde{A}_1$, т.е. удовлетворив условию (27), согласно (12) соотношение (7) может быть записано в виде (29). При этом, как и ранее, можно показать, что при выполнении условия (27) функционально независимыми в случае зависимости σ от $(n+1)$-го кинематического тензора (8), (9) будут $3n+3$ инварианта

$$tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, B^3,\ tr\, \widetilde{A}_r,\ tr\, B\widetilde{A}_r,\ tr\, \widetilde{A}_1\widetilde{A}_r, \qquad r=\overline{1, n}. \tag{41}$$

При принятых предположениях коэффициенты уравнения (29) зависят от инвариантов (41). Отметим, что при $n=1$ (σ определяется только B и $\widetilde{A}_1$) инварианты (28) и (41) совпадают.

Далее примем, что в течение конечного интервала изменения ξ, тензоры B и $\widetilde{A}_1$ осесимметричны. Тогда, согласно данным [10, 18], σ, все кинематические и любые образованные из последних мультипликативные симметричные тензоры второго ранга тоже осесимметричны, принадлежат двухмерному тензорному пространству, а при выборе линейно независимыми I и B в соответствии с (12) уравнение (7) может быть записано в виде (16).

Подобно тому, как это сделано ранее, можно показать, что если справедливо уравнение (16), а σ зависит от $(n+1)$-го кинематического тензора (8), (9), то инварианты

$$tr\, B,\ tr\, B^2,\ tr\, \widetilde{A}_r,\ tr\, B\widetilde{A}_r, \qquad r=\overline{1, n} \tag{42}$$

будут функционально независимыми. Следовательно, при принятых предположениях коэффициенты уравнения (16) зависят от инвариантов (42). При $n=0$ (σ зависит только от B) ряд (42) приводится к инвариантам (17).

Отметим, что приведенные в работе определяющие соотношения, как следует из данных [15], справедливы в течение всего процесса деформирования, за исключением, возможно, отдельных изолированных значений ξ.

Резюме

Із використанням підходів раціональної механіки континуума розроблено математичну теорію строгої побудови і спеціалізації загальних визначальних співвідношень простих по Ноллу ізотропних зміцнюваних пружно-пластичних матеріалів диференційного типу складності n (аналоги твердих тіл Рівліна–Еріксена складності n) як найбільш важливих представників матеріалів з інфінітезимальною пам’яттю форми траєкторії (пам’яттю форми траєкторії на довільно малому интервалі “минулого”). Деформації – скінченні. Побудовано ієрархію визначальних співвідношень за рівнем складності реакції матеріалу на деформування.

1. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Конечные деформации // Пробл. прочности. – 2004. – № 5. – С. 63 – 77.
2. *Lepikhin P. P.* Simulation of Fading Path Shape Memory in Theory of Simple Elastoplastically Deforming Materials // Abstracts Euromech (European Mechanics Society) Colloquium 458. “Advanced Methods in Validation and Identification of Nonlinear Constitutive Equations in Solid Mechanics”. – Russian Foundation for Basic Research, Lomonosov Moskow State University. – Institute of Mechanics. – Moskow: Moskow University Press, 2004. – 115 p.
3. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти в теории простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением // Прогрессивная техника и технология машиностроения, приборостроения и сварочного производства: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию механико-машиностроительного и 50-летию сварочного факультетов Нац. техн. ун-та Украины (25–28 мая 1998 г.). – Киев: Национальный технический университет Украины (КПИ), 1998. – Т. III. – С. 105 – 109.
4. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Бесконечно малые деформации // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 87 – 98.
5. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением и начальной поверхностью нагружения // Там же. – 2007. – № 4. – С. 5 – 18.
6. *Трощенко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка. – 1993. – Т. 1. – 286 с.
7. *Трощенко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. Киев: Наук. думка. – 1994. – Т. 2. – 701 с.

8. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 1972.
9. *Truesdell C. and Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – Springer, 1992.
10. *Лепихин П. П.* Теоретическое построение определяющих соотношений простых начально изотропных неупругих твердых материалов. Конечные деформации / АН Украины. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1993. – 37 с.
11. *Лепихин П. П.* Структура определяющих соотношений вязкоупруговязкопластического состояния материалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 32 с.
12. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
13. *Поздеев А. А.*, *Трусов П. В.*, *Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
14. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. – М.: Мир, 1974. – 156 с.
15. *Rivlin R. S. and Ericksen J. L.* Stress–deformation relations for isotropic materials // J. Rat. Mech. Analysis. – 1955. – **4**, No. 2. – P. 323 – 425.
16. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу: Учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 264 с.
17. *Rivlin R. S.* Further remarks of the stress-deformation reations for isotropic materials // J. Rat. Mech. Analysis. – 1955. – **4**, No. 5. – P. 681 – 702.
18. *Новожилов В. В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 5. – С. 794 – 812.
19. *Фрейденталь А.*, *Гейрингер Х.* Математическая теория неупругой сплошной среды. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 432 с.

Поступила 01. 02. 2008