

УДК 532.517

РУХ ЖОРСТКОГО ДИСКА У В'ЯЗКІЙ РІДИНІ ВЗДОВЖ ЖОРСТКОЇ СТІНКИ

Я. Л. КЛИМИК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Одержано 10.06.2004

Розглянуто змішану крайову задачу для течії Стокса у півпросторі, заповненому в'язкою рідиною, внаслідок руху в ньому жорсткого диска в площині, яка паралельна до стінки півпростору. Використовуючи метод власних векторних функцій та деякі допоміжні прийоми теорії парних інтегральних рівнянь, задачу зведено до двох інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та алгебраїчних рівнянь для невідомих сталих. Досліджено поведінку компонент вектора швидкості та напружень у площині диска, головного вектора та головного момента сил опору рухові диска і тиску. Проаналізовано одержані результати.

Рассматривается смешанная краевая задача для течения Стокса в полупространстве, заполненном вязкой жидкостью, вследствие движения в нем жесткого диска в плоскости, которая параллельна стенке полупространства. Используя метод собственных векторных функций и некоторые вспомогательные приемы теории парных интегральных уравнений, задачу сведено к двум интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и алгебраическим уравнениям для неизвестных констант. Исследовано поведение компонент вектора скорости и напряжений в плоскости диска, главного вектора и главного момента сил сопротивления движению диска и давления. Проведено анализ полученных результатов.

This paper is concerned with mixed boundary-value problem for Stokes flow in filled by viscous fluid halfspace induced by rigid disk's motion in it in plane, which is parallel to the halfspace's wall. Based on the method of eigen-vector-functions and using some auxiliary techniques of dual integral equations theory the problem is reduced to two Fredholm equations of second kind and algebraic equations for unknown constants. The behavior of the velocity vector components and stresses in the disk's plane, the main vector and the main torque of the resistance forces to the disk's motion and pressure are investigated. The analysis of obtained results is carried out.

ВСТУП

Розв'язки крайових задач стаціонарного обтікання жорстких елементів в'язкою рідиною у наближенні Стокса мають важливе значення для багатьох областей прикладної науки та техніки. Останнім часом такі розв'язки вкрай потрібні для біології, біохімічної інженерії, механіки електростатичних фільтрів та механіки мастил. Хоча крайові задачі про стаціонарне обтікання жорстких осесиметричних тіл в'язкою рідиною у наближенні Стокса вивчають досить давно, але аналітичні розв'язки отримано тільки для спеціальних випадків геометрії. Серед методів розв'язку таких задач для складніших випадків останнім часом виділяються ті, які зводяться, як правило, до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду та дають можливість аналітичного дослідження одержаних виразів фізичних величин. Більшість такого роду досліджень базуються на представленні фізичних величин через комбінацію гармонічних функцій. Так, Шейлу і Нортону [1] таким чином вдалося в задачі про осесиметричний рух жорсткого диска вздовж осі нескінченного циліндра, заповненого в'язкою рідиною, дослідити силу опору, що діє на диск, та визначити скачок тиску через поверхню диска. Нове

представлення компонент вектора швидкості через гармонічні функції, як загальний розв'язок рівнянь Стокса, було запропоновано Ренжером [2] для дослідження асиметричного руху диска між двома різними фазами в'язкої рідини. Пізніше цей розв'язок Девіс [3] застосував для розв'язку задачі руху диска посередині між двома стінками шару в'язкої рідини в площині його розташування та руху кільця, теж в площині його розташування, в необмеженому середовищі. В обох цих випадках було досліджено лише коефіцієнт опору рухові диска збоку рідини. Інший загальний розв'язок, побудований раніше Імаї [4], Девіс застосував для дослідження осесиметричного руху диска (і навіть низки однакових дисків, розташованих уздовж однієї осі) у в'язкій рідині в напрямі до площини з врахуванням стінок контейнера та вільної поверхні рідини [5], для аналогічного дослідження такого самого руху кільця (або колець) [6], а також для моделювання осесиметричного руху довільного осесиметричного тіла набором коаксіальних дисків [7]. В усіх цих дослідженнях їхнім предметом був лише коефіцієнт опору рухові диска. Новим підходом до класу задач, що розглядається, є метод власних векторних функцій, запропонований Улітко [8]. Як показали попередні дослідження [9], цей метод приводить до більш

простіших виразів фізичних величин і дає можливість їх аналітичного вивчення. Саме його й було покладено в основу цього дослідження.

План цієї роботи такий. У п. 1 сформульовано вихідні рівняння та граничні умови векторної крайової задачі. У п. 2 подано співвідношення методу власних векторних функцій та загальний розв'язок вихідних рівнянь. У п. 3 задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь, яку певним прийомом, запропонованим у статті [10], у п. 4 вдається звести до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та алгебраїчних співвідношень для невідомих сталих, через розв'язки яких представлено поведінку основних фізичних величин. У п. 5 виконано аналіз результатів, зокрема чисельних, після чого подано підсумки дослідження.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо півпростір $(-h \leq z < +\infty)$, заповнений в'язкою рідиною, в якому в площині $z = 0$ рухається жорсткий диск радіуса a вздовж осі $0x$

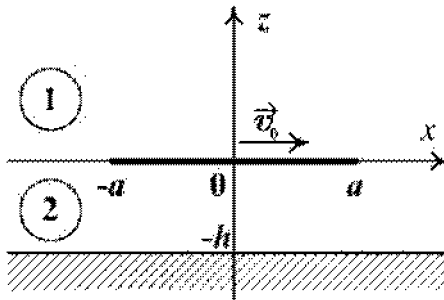


Рис. 1. Геометрія задачі. Диск радіуса a розташовано на відстані h над стінкою півпростору

зі швидкістю v_0 (рис. 1). При цьому приймається наближення Стокса, і тому швидкість \vec{v} та тиск p у півпросторі будуть задовольняти рівняння Стокса:

$$\nabla^2 \vec{v} = \frac{1}{\mu} \text{grad } p, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості. Задачу розглянуто в циліндричних координатах (r, φ, z) , площина $0r\varphi$ яких збігається з площиною $0xy$, а кут φ відраховується від осі $0x$. Для запису граничних умов розіб'ємо умовно півпростір на дві однозв'язні області, як показано на рис. 1. Граничні умови будуть виражати умову прилипання частинок в'язкої рідини півпростору до нерухомої

жорсткої стінки:

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = 0 \quad (2)$$

при $z = -h, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi,$

та умову неперервності швидкості на всій площині $z = 0$ і напружень зовні диска:

$$v_r^{(1)} = v_r^{(2)}, \quad v_\varphi^{(1)} = v_\varphi^{(2)}, \quad v_z^{(1)} = v_z^{(2)} \quad (3)$$

при $z = 0, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi,$

$$\tau_{zr}^{(1)} = \tau_{zr}^{(2)}, \quad \tau_{z\varphi}^{(1)} = \tau_{z\varphi}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} \quad (4)$$

при $z = 0, a < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi,$

що виражають собою умову спряження двох областей, на які розбито півпростір (тут і далі верхній індекс у дужках у функції вказує на частину півпростору, до якої вона належить; будемо позначати його літерою j). За умовою задачі також:

$$v_r(r, \varphi, z) = v_0 \cos \varphi, \quad v_\varphi(r, \varphi, z) = -v_0 \sin \varphi, \quad (5)$$

$$v_z(r, \varphi, z) = 0$$

при $z = 0, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi.$

2. МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Загальний розв'язок рівнянь (1) згідно з методом власних векторних функцій [8] можна записати як узагальнене перетворення Фур'є-Ханкеля:

$$\vec{v}(r, \varphi, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\vec{w}_k(\lambda, z) \vec{L}_\lambda^{(k)}(r, \varphi) + \vec{u}_k(\lambda, z) \vec{M}_\lambda^{(k)}(r, \varphi) + \vec{v}_k(\lambda, z) \vec{N}_\lambda^{(k)}(r, \varphi) \right) \lambda d\lambda, \quad (6)$$

де

$$\vec{L}_\lambda^{(k)}(r, \varphi) = \vec{k} S_\lambda^{(k)}(r, \varphi),$$

$$\vec{M}_\lambda^{(k)}(r, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial \varphi},$$

$$\vec{N}_\lambda^{(k)}(r, \varphi) = \frac{\vec{e}_r}{r} \frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial \varphi} - \vec{e}_\varphi \frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial r},$$

– власні вектор-функції, $S_\lambda^{(k)}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_k(x) e^{ik\varphi}$, а $J_k(x)$ – функція Беселя першого роду k -го порядку. Вираз для тиску p можна записати таким чином:

$$\frac{1}{2\mu} p(r, \varphi, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \vec{p}_k(\lambda, z) S_\lambda^{(k)}(r, \varphi) \lambda d\lambda. \quad (7)$$

Тоді загальний вигляд густин \bar{u}_k , \bar{v}_k , \bar{w}_k та \bar{p}_k для рівняння (1) можна подати так:

$$\begin{aligned} \bar{w}_k^{(1)}(\lambda, z) &= B_k^{(1)}(\lambda)e^{\lambda z} + D_k^{(1)}(\lambda)ze^{\lambda z}, \\ \lambda^2\bar{u}_k^{(1)}(\lambda, z) &= -\lambda B_k^{(1)}(\lambda)e^{\lambda z} + \\ &\quad + D_k^{(1)}(\lambda)(1 - \lambda z)e^{\lambda z}, \\ \lambda^2\bar{v}_k^{(1)}(\lambda, z) &= N_k^{(1)}(\lambda)e^{\lambda z}, \\ \bar{p}_k^{(1)}(\lambda, z) &= D_k^{(1)}(\lambda)e^{\lambda z}, \\ &\quad 0 \leq z < +\infty, \\ \bar{w}_k^{(2)}(\lambda, z) &= A_k^{(2)}(\lambda)\text{sh } \lambda z + B_k^{(2)}(\lambda)\text{ch } \lambda z + \\ &\quad + z \left(C_k^{(2)}(\lambda)\text{sh } \lambda z + D_k^{(2)}(\lambda)\text{ch } \lambda z \right), \\ \lambda^2\bar{u}_k^{(2)}(\lambda, z) &= \lambda A_k^{(2)}(\lambda)\text{ch } \lambda z + \\ &\quad + \lambda B_k^{(2)}(\lambda)\text{sh } \lambda z + \\ &\quad + C_k^{(2)}(\lambda)(\text{sh } \lambda z + \lambda z\text{ch } \lambda z) + \\ &\quad + D_k^{(2)}(\lambda)(\text{ch } \lambda z + \lambda z\text{sh } \lambda z), \\ \lambda^2\bar{v}_k^{(2)}(\lambda, z) &= M_k^{(2)}(\lambda)\text{sh } \lambda z + N_k^{(2)}(\lambda)\text{ch } \lambda z, \\ \bar{p}_k^{(2)}(\lambda, z) &= C_k^{(2)}(\lambda)\text{sh } \lambda z + D_k^{(2)}(\lambda)\text{ch } \lambda z, \\ &\quad -h \leq z \leq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

де $A_k^{(2)}$, $B_k^{(j)}$, $C_k^{(2)}$, $D_k^{(j)}$, $M_k^{(2)}$ і $N_k^{(j)}$ – довільні функції ($j = 1, 2$). Напруження, що діє по площадці з нормаллю $\vec{n} = \vec{k}$, буде виражатись таким чином [8]:

$$\begin{aligned} \vec{F}_n &= \vec{e}_r \tau_{zr} + \vec{e}_\varphi \tau_{z\varphi} + \vec{k} \sigma_z = \\ &= 2\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial z} - \bar{p}_k \right) \vec{L}_\lambda^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial z} + \bar{w}_k \right) \vec{M}_\lambda^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial z} \vec{N}_\lambda^{(k)} \right) \lambda d\lambda. \end{aligned} \tag{10}$$

Для нашого розгляду важливо те, що для розкладу (6) існує досить проста формула обернення:

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\vec{e}_r \bar{u}_k(\lambda, z) + \vec{e}_\varphi \bar{v}_k(\lambda, z) + \vec{k} \bar{w}_k(\lambda z)) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \left(v_z(r, \varphi, z) \vec{L}_\lambda^{(k)*}(r, \varphi) + \right. \\ &\quad + v_r(r, \varphi, z) \vec{M}_\lambda^{(k)*}(r, \varphi) + \\ &\quad \left. + v_\varphi(r, \varphi, z) \vec{N}_\lambda^{(k)*}(r, \varphi) \right) r dr, \end{aligned} \tag{11}$$

яка дає змогу відшукати розв'язок основних крайових задач для рівнянь (1) у замкненому вигляді (* – операція комплексного спряження).

3. ЗВЕДЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДО СИСТЕМ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Якщо задовольнити граничні умови (2) та умову неперервності (3) і використати (6), (8) і (9), отримуємо, що $B_k(\lambda) = B_k^{(1)}(\lambda) = B_k^{(2)}(\lambda)$, $N_k(\lambda) = N_k^{(1)}(\lambda) = N_k^{(2)}(\lambda)$ і всі інші довільні функції можна записати через функції $B_k(\lambda)$, $D_k^{(1)}(\lambda)$ та $N_k(\lambda)$ таким чином:

$$\begin{aligned} \lambda A_k^{(2)}(\lambda) &= \lambda B_k(\lambda) \left(R_1(\lambda) + \frac{2R_2(\lambda)}{\lambda h} - 1 \right) - \\ &\quad - D_k^{(1)}(\lambda) R_2(\lambda), \\ C_k^{(2)}(\lambda) &= -\lambda B_k(\lambda) R_1(\lambda) + \\ &\quad + D_k^{(1)}(\lambda) (1 + R_1(\lambda) + R_2(\lambda)), \\ D_k^{(2)}(\lambda) &= -B_k(\lambda) (\lambda R_1(\lambda) + \frac{2}{h} R_2(\lambda)) + \\ &\quad + D_k^{(1)}(\lambda) (1 + R_2(\lambda)), \\ M_k^{(2)}(\lambda) &= N_k(\lambda) \text{cth } \lambda h, \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= \frac{e^{\lambda h} \text{sh } \lambda h - \lambda h}{\text{sh}^2 \lambda h - (\lambda h)^2}, \\ R_2(\lambda) &= \frac{(\lambda h)^2}{\text{sh}^2 \lambda h - (\lambda h)^2}. \end{aligned}$$

Тому задача зводиться до знаходження функцій $B_k(\lambda)$, $D_k^{(1)}(\lambda)$ та $N_k(\lambda)$ ($k \in Z$). Після їх визначення та підстановки в рівності (8) і (9) співвідношення (6) та (10) дадуть шукані розподіли переміщень і напружень у півпросторі $-h \leq z < +\infty$. Для знаходження цих трьох функцій розкладемо в ряди Фур'є компоненти вектора переміщень і тензора напружень при $z = 0$:

$$\begin{aligned} v_r|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{1k}(r) e^{ik\varphi}, \\ v_\varphi|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{2k}(r) e^{ik\varphi}, \\ v_z|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{3k}(r) e^{ik\varphi}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \tau_{zr}^{(j)} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{1k}^{(j)}(r) e^{ik\varphi}, \\ \frac{1}{\mu} \tau_{z\varphi}^{(j)} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{2k}^{(j)}(r) e^{ik\varphi}, \\ \frac{1}{\mu} \sigma_z^{(j)} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{3k}^{(j)}(r) e^{ik\varphi}, \end{aligned} \tag{14}$$

і запишемо, використовуючи (6), (8), (9) і (12), вирази коефіцієнтів Фур'є через невідомі функції:

$$\begin{aligned} v_{1k}(r) &= \int_0^{+\infty} \left((-\lambda B_k(\lambda) + D_k^{(1)}(\lambda)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial J_k(\lambda r)}{\partial r} + i N_k(\lambda) \frac{k J_k(\lambda r)}{r} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ v_{2k}(r) &= i \int_0^{+\infty} \left((-\lambda B_k(\lambda) + D_k^{(1)}(\lambda)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{k J_k(\lambda r)}{r} + i N_k(\lambda) \frac{\partial J_k(\lambda r)}{\partial r} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ v_{3k}(r) &= \int_0^{+\infty} \lambda B_k(\lambda) J_k(\lambda r) d\lambda, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} f_{1k}^{(1)}(r) &= \int_0^{+\infty} \left(2(\lambda B_k(\lambda) - D_k^{(1)}(\lambda)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial J_k(\lambda r)}{\partial r} - i N_k(\lambda) \frac{k J_k(\lambda r)}{r} \right) d\lambda, \\ f_{2k}^{(1)}(r) &= i \int_0^{+\infty} \left(2(\lambda B_k(\lambda) - D_k^{(1)}(\lambda)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{k J_k(\lambda r)}{r} - i N_k(\lambda) \frac{\partial J_k(\lambda r)}{\partial r} \right) d\lambda, \\ f_{3k}^{(1)}(r) &= -2 \int_0^{+\infty} \lambda B_k(\lambda) J_k(\lambda r) \lambda d\lambda, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} f_{1k}^{(2)}(r) &= \int_0^{+\infty} \left(2(\lambda B_k(\lambda) + C_k^{(2)}(\lambda)) \frac{\partial J_k(\lambda r)}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{cth} \lambda h) i N_k(\lambda) \frac{k J_k(\lambda r)}{r} \right) d\lambda, \\ f_{2k}^{(2)}(r) &= i \int_0^{+\infty} \left(2(\lambda B_k(\lambda) + C_k^{(2)}(\lambda)) \frac{k J_k(\lambda r)}{r} + \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{cth} \lambda h) i N_k(\lambda) \frac{\partial J_k(\lambda r)}{\partial r} \right) d\lambda, \\ f_{3k}^{(2)}(r) &= 2 \int_0^{+\infty} \lambda A_k^{(2)}(\lambda) J_k(\lambda r) \lambda d\lambda. \end{aligned} \tag{17}$$

Згідно граничної умови (5):

$$\begin{aligned} v_{jk}(r) &= 0 \quad (j = \overline{1, 3}; k \in Z \setminus \{-1, 1\}), \\ v_{1,1}(r) &= v_{1,-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_0, \\ v_{2,1}(r) &= v_{2,-1}(r) = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_0, \\ v_{3,1}(r) &= v_{3,-1}(r) = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \tag{18}$$

Отже, не обмежуючи загальності, можна покласти, що

$$B_k(\lambda) = D_k^{(1)}(\lambda) = N_k(\lambda) \equiv 0 \quad (k \in Z \setminus \{-1, 1\}).$$

Оскільки компоненти векторів \vec{v} та \vec{F}_n є дійсними функціями, то $v_{1,-k}(r) = v_{1,k}^*(r)$, $v_{2,-k}(r) = v_{2,k}^*(r)$, $v_{3,-k}(r) = v_{3,k}^*(r)$, $f_{1,-k}^{(j)}(r) = f_{1,k}^{(j)*}(r)$, $f_{2,-k}^{(j)}(r) = f_{2,k}^{(j)*}(r)$, $f_{3,-k}^{(j)}(r) = f_{3,k}^{(j)*}(r)$, звідки одержимо, що: $B_{-1}(\lambda) = -B_1^*(\lambda)$, $D_{-1}^{(1)}(\lambda) = -D_1^{(1)*}(\lambda)$, $N_{-1}(\lambda) = -N_1^*(\lambda)$. Далі, з умов (4) і (5), використовуючи розклади (13) і (14) та вирази (8), (9), (12), (15) – (17), одержимо такі парні інтегральні рівняння для визначення функцій $B_1(\lambda)$, $D_1^{(1)}(\lambda)$ і $N_1(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left((-\lambda B_1(\lambda) + D_1^{(1)}(\lambda)) + i N_1(\lambda) \right) \times \\ &\quad \times J_0(\lambda r) d\lambda = v_{11}(r) - i v_{21}(r), \\ &\int_0^{+\infty} \left((-\lambda B_1(\lambda) + D_1^{(1)}(\lambda)) - i N_1(\lambda) \right) \times \\ &\quad \times J_2(\lambda r) d\lambda = -(v_{11}(r) + i v_{21}(r)), \\ &\int_0^{+\infty} \lambda B_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

$$0 \leq r \leq a,$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(2(-\lambda B_1(\lambda) R_1(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + D_1^{(1)}(\lambda) (R_1(\lambda) - R_2(\lambda))) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \operatorname{cth} \lambda h) i N_1(\lambda) \right) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \\ &\int_0^{+\infty} \left(2(-\lambda B_1(\lambda) R_1(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + D_1^{(1)}(\lambda) (R_1(\lambda) - R_2(\lambda))) - \right. \\ &\quad \left. - (1 + \operatorname{cth} \lambda h) i N_1(\lambda) \right) J_2(\lambda r) d\lambda = 0, \\ &\int_0^{+\infty} \left(\lambda B_1(\lambda) \left(\lambda R_1(\lambda) + \frac{2}{h} R_2(\lambda) \right) - \right. \\ &\quad \left. - D_1^{(1)}(\lambda) R_2(\lambda) \right) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$a < r < +\infty.$$

Тобто вихідну крайову задачу зведено до розв'язку складної системи парних інтегральних рівнянь (19), (20), для якої немає змоги застосувати звичайну методи розв'язку парних рівнянь [11].

4. РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язку системи парних інтегральних рівнянь (19), (20) використовуємо ту саму методику, яку було запропоновано в статті [10]. Її ідея полягає в утворенні певних диференціальних комбінацій перших двох рівнянь системи (19) та перших двох рівнянь системи (20) з подальшим перетворенням (через інтегрування) одержаних інтегральних рівнянь. Такий прийом приводить до наступної системи:

$$\int_0^{+\infty} \left(-\lambda B_1(\lambda) + D_1^{(1)}(\lambda) \right) J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$= (C_1 - v_{11}(a)) + v_{11}(r) -$$

$$- \int_r^a (v_{11}(x) + iv_{21}(x)) \frac{dx}{x},$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda B_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \tag{21}$$

$$\int_0^{+\infty} iN_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$= (C_2 + v_{21}(a)) - iv_{21}(r) +$$

$$+ \int_r^a (v_{11}(x) + iv_{21}(x)) \frac{dx}{x},$$

$$0 \leq r \leq a$$

$$\int_0^{+\infty} \left(-\lambda B_1(\lambda) R_1(\lambda) + D_1^{(1)}(\lambda) \times \right.$$

$$\left. \times (R_1(\lambda) - R_2(\lambda)) \right) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 0,$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\lambda B_1(\lambda) \left(\lambda R_1(\lambda) + \frac{2}{h} R_2(\lambda) \right) - \right.$$

$$\left. - D_1^{(1)}(\lambda) R_2(\lambda) \right) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = 0, \tag{22}$$

$$\int_0^{+\infty} (1 + \text{cth } \lambda h) iN_1(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 0,$$

$$a < r < +\infty,$$

де C_1 , та C_2 – константи інтегрування, що визначаються з рівнянь (19) та (20).

Згідно з відомою вже методикою [11] для розв'язку системи (21),(22) введемо нові невідомі функції $\varphi_j(t)$ ($j = \overline{1,3}$) через представлення:

$$-\lambda B_1(\lambda) R_1(\lambda) + D_1^{(1)}(\lambda) (R_1(\lambda) - R_2(\lambda)) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1 \int_0^a \varphi_1(t) \cos \lambda t dt,$$

$$\left(\lambda R_1(\lambda) + \frac{2}{h} R_2(\lambda) \right) B_1(\lambda) - D_1^{(1)}(\lambda) R_2(\lambda) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1 \int_0^a \varphi_2(t) \sin \lambda t dt,$$

$$(1 + \text{cth } \lambda h) iN_1(\lambda) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} C_2 \int_0^a \varphi_3(t) \cos \lambda t dt.$$

Звідки

$$\lambda B_1(\lambda) = C_1 \left(g_2(\lambda) \int_0^a \varphi_1(t) \cos \lambda t dt + \right.$$

$$\left. + (1 - g_3(\lambda)) \int_0^a \varphi_2(t) \sin \lambda t dt \right),$$

$$D_1^{(1)}(\lambda) = C_1 \left((1 - g_1(\lambda) + g_2(\lambda)) \int_0^a \varphi_1(t) \cos \lambda t dt + \right.$$

$$\left. + (1 - g_3(\lambda) + g_2(\lambda)) \int_0^a \varphi_2(t) \sin \lambda t dt \right),$$

$$iN_1(\lambda) = C_2 (1 - g_4(\lambda)) \int_0^a \varphi_3(t) \cos \lambda t dt, \tag{23}$$

де

$$g_1(\lambda) = (2(\lambda h)^2 - 2\lambda h + 1) e^{-2\lambda h},$$

$$g_2(\lambda) = 2(\lambda h)^2 e^{-2\lambda h}, \quad g_4(\lambda) = e^{-2\lambda h},$$

$$g_3(\lambda) = (2(\lambda h)^2 + 2\lambda h + 1) e^{-2\lambda h}.$$

Тоді вільні сталі, що з'явилися внаслідок інтегрування інтегральних рівнянь, будуть задоволені (згідно з методикою, викладеною в статті [10]) такою простою алгебраїчною системою:

$$C_1 + C_2 = v_0 \sqrt{2\pi},$$

$$2C_1 \int_0^a \varphi_1(t) dt = C_2 \int_0^a \varphi_3(t) dt. \tag{24}$$

З парної системи (19), (20), використовуючи представлення (23) невідомих функцій, представлення Соніна для функції Бесселя першого роду [12, стор. 56], після заміни порядку інтегрування та розв'язку одержаного інтегрального рівняння Шльоміляха [11, стор. 186], аналогічно як і в статтях [9–10], прийдемо до такої системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \int_0^a \varphi_1(x) K_{11}(x, t) dx + \\ + \int_0^a \varphi_2(x) K_{12}(x, t) dx = \frac{2}{\pi}, \\ \varphi_2(t) + \int_0^a \varphi_1(x) K_{21}(x, t) dx - \\ - \int_0^a \varphi_2(x) K_{22}(x, t) dx = 0, \\ \varphi_3(t) - \int_0^a \varphi_3(x) K_3(x, t) dx = \frac{2}{\pi}, \end{aligned} \quad (25)$$

де ядра

$$\begin{aligned} K_{11}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_1(\lambda) \cos \lambda x \cos \lambda t d\lambda, \\ K_{12}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_2(\lambda) \sin \lambda x \cos \lambda t d\lambda, \\ K_{21}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_2(\lambda) \cos \lambda x \sin \lambda t d\lambda, \\ K_{22}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_3(\lambda) \sin \lambda x \sin \lambda t d\lambda, \\ K_3(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_4(\lambda) \cos \lambda x \cos \lambda t d\lambda. \end{aligned}$$

виражаються через елементарні функції.

Отже, вихідну крайову задачу для рівняння (1) з граничними умовами (2) – (4), (5) зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (25) і системи алгебраїчних рівнянь (24) для визначення невідомих сталих. Після послідовного розв'язку цих двох систем усі фізичні величини, що описують це механічне явище, можна виразити через знайдені функції $\varphi_j(t)$ ($j = \overline{1, 3}$) та константи C_j ($j = \overline{1, 2}$). Для цього слід скористатися співвідношеннями (23), (12), (8), (9) і потім (6) і (10).

величин через функції $\varphi_j(t)$ ($j = \overline{1, 3}$) та константи C_j ($j = \overline{1, 2}$) в залежності від r , φ і z не наводимо через їх громіздкість. Для прикладу дамо лише деякі з них для випадку $z = 0$. Вирази компонент вектора швидкості на площині $z = 0$ при $r > a$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} v_r|_{z=0} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varphi \int_0^a dt \left(C_1 \left(\varphi_1(t) \left(\frac{t^2}{r^2 \sqrt{r^2 - t^2}} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \int_0^{+\infty} g_1(\lambda) \left(J_0(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \right) \cos \lambda t d\lambda \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} g_2(\lambda) \left(J_0(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \right) \sin \lambda t d\lambda \right) + \\ &\quad + C_2 \varphi_3(t) \left(\frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{+\infty} g_4(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \cos \lambda t d\lambda \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\varphi|_{z=0} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \varphi \int_0^a dt \left(C_1 \left(\varphi_1(t) \left(\frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{r^2} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \int_0^{+\infty} g_1(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \cos \lambda t d\lambda \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} g_2(\lambda) \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \sin \lambda t d\lambda \right) + \\ &\quad + C_2 \varphi_3(t) \left(\frac{t^2}{r^2 \sqrt{r^2 - t^2}} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{+\infty} g_4(\lambda) \left(J_0(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r} \right) \cos \lambda t d\lambda \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z|_{z=0} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1 \cos \varphi \int_0^a dt \left(\varphi_1(t) \int_0^{+\infty} g_2(\lambda) \cos \lambda t d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(t) \left(\frac{t}{r \sqrt{r^2 - t^2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{+\infty} g_3(\lambda) J_1(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda \right) \right). \end{aligned}$$

На практиці також становить інтерес поведінка стрибка напружень через поверхню диска. Із спів-

відношень (16), (17), (14) і (23) одержимо:

$$\begin{aligned}
 f_{11}^{(2)}(r) - f_{11}^{(1)}(r) &= 4C_1 \left(\frac{\varphi_1(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{r^2} \int_0^a \varphi_1(t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \int_r^a \frac{\varphi_1(t)t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\varphi_1'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right) + \\
 &\quad + \frac{2C_2}{r^2} \left(\int_0^a \varphi_3(t) dt - \int_r^a \frac{\varphi_3(t)t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right), \\
 f_{21}^{(2)}(r) - f_{21}^{(1)}(r) &= \frac{4C_1}{r^2} \left(\int_0^a \varphi_1(t) dt - \int_r^a \frac{\varphi_1(t)t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right) + \\
 &\quad + 2C_2 \left(\frac{\varphi_3(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{r^2} \int_0^a \varphi_3(t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \int_r^a \frac{\varphi_3(t)t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\varphi_3'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right), \\
 f_{31}^{(2)}(r) - f_{31}^{(1)}(r) &= \frac{4C_2}{r} \left(\frac{\varphi_2(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\varphi_2'(t)t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогічно, з формул (7)–(9), (12) і (23) для стрибка тиску одержимо:

$$\Delta p(r) = \frac{8\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{C_1}{r} \left(-\frac{\varphi_2(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_r^a \frac{\varphi_2'(t)t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right),$$

де $(p^{(2)} - p^{(1)})|_{z=0} = \Delta p(r) \cos \varphi$.

Надалі покладемо для зручності:

$$\begin{aligned}
 \tau_1(r) &= \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(f_{11}^{(2)}(r) - f_{11}^{(1)}(r) \right), \\
 \tau_2(r) &= \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(f_{21}^{(2)}(r) - f_{21}^{(1)}(r) \right), \\
 \sigma(r) &= \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(f_{31}^{(2)}(r) - f_{31}^{(1)}(r) \right),
 \end{aligned} \tag{26}$$

Тоді, використовуючи формули (16), (17) та (23), знайдемо, що головний вектор та головний момент сил опору рухові диска мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \pi \int_0^a (\tau_1(r) + \tau_2(r)) r dr = \\
 &= 8\sqrt{2\pi} \mu C_1 \int_0^a \varphi_1(t) dt, \\
 P_y &= P_z = 0,
 \end{aligned} \tag{27}$$

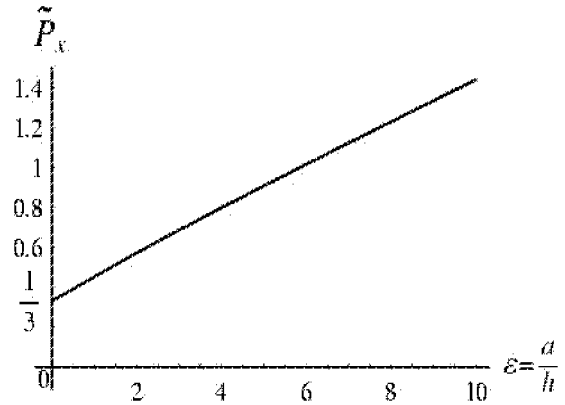


Рис. 2. Поведінка коефіцієнта опору

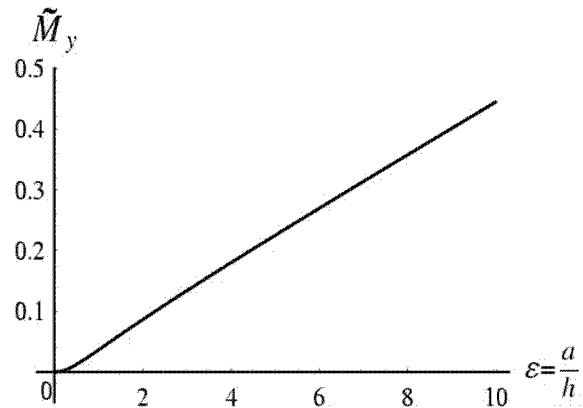


Рис. 3. Поведінка знерозміреного моменту

$$\begin{aligned}
 M_x &= M_z = 0, \\
 M_y &= \pi \int_0^a \sigma(r) r^2 dr = \\
 &= -8\sqrt{2\pi} \mu C_1 \int_0^a \varphi_2(t) t dt.
 \end{aligned} \tag{28}$$

5. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Поведінку знерозмірених величин

$$\tilde{P}_x = \frac{P_x}{32v_0\mu a}, \quad \tilde{M}_y = \frac{M_y}{32v_0\mu a^2}$$

залежно від величини відношення $\varepsilon = a/h$ представлено на рис. 2 та 3 відповідно. Як бачимо, коефіцієнт опору \tilde{P}_x монотонно зростає в разі збільшення ε , тобто коли зменшується відстань від диска до стінки півпростору, що, очевидно, пояснюється впливом стінки. Цікаво, що ця залежність фактично лінійна. Якщо її апроксимувати функ-

цією $y = 0.110729x + \frac{1}{3}$, то відхилення від лінійності не перевищуватиме 3 %. Рівність нулю P_y та M_x є наслідком симетрії задачі відносно площини xOz (тобто парності величин σ_z і непарності τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$ по змінній y). Рівність нулю P_z та M_z є як наслідком симетрії задачі відносно площини xOz , так і її антисиметрії відносно площини yOz (тобто непарності величин $\tau_{z\varphi}$, σ_z по змінній x).

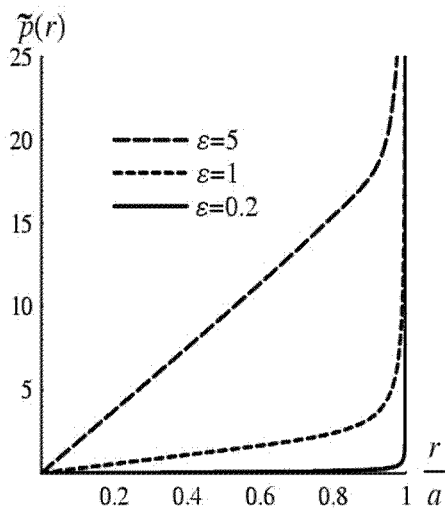


Рис. 4. Поведінка знерозміреного скачку тиску через поверхню диска

Поведінка знерозміреного моменту опору також свідчить про його монотонне збільшення в разі зменшення відстані від диска до стінки півпростору. Його знак показує, що при русі диска на нього діє момент, що намагається повернути його передній край донизу, тобто до стінки півпростору. Така поведінка моменту опору є неочевидною і добре узгоджується з відомою в літературі [14, с. 382–388] аналогічною поведінкою моменту опору руху сфероїда у півпросторі в'язкої рідини поблизу його стінки. Так, відомо, що під час його седиментації вздовж жорсткої стінки у в'язкій рідині на нього діє момент, який змушує його повертатися так, ніби він котився б по стінці [14, с. 385]. Представлена на рис. 4 поведінка стрибка тиску через поверхню диска свідчить про нескінчений розрив тиску поблизу краю диска. Причому тиск більший саме з того боку диска, де є стінка. Зрозуміло, що цей факт є наслідком зазначеної поведінки моменту опору, хоча сам по собі він теж не є очевидним. Стрибок тиску на рис. 4 та стрибки напружень, представлені на рис. 5, знерозмірено за формулами:

$$\tau_1(r) = \frac{\mu v_0}{a} \tilde{\tau}_1(r), \quad \tau_2(r) = \frac{\mu v_0}{a} \tilde{\tau}_2(r),$$

$$\sigma(r) = \frac{\mu v_0}{a} \tilde{\sigma}(r), \quad \Delta p(r) = \frac{\mu v_0}{a} \tilde{p}(r).$$

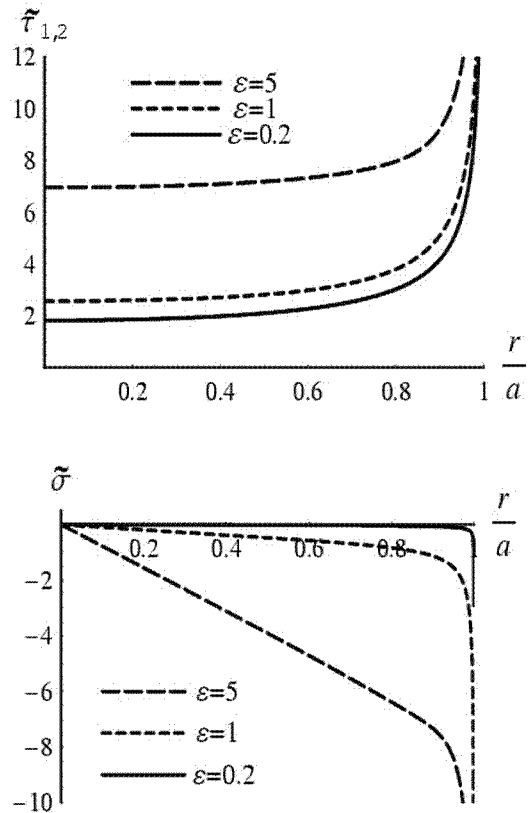


Рис. 5. Поведінка знерозмірених компонент τ_{zr} та $\tau_{z\varphi}$, а також знерозміреної компоненти σ_z тензора напружень при $z = 0$, $r < a$

На рис. 5 відбито той факт, що згідно з чисельними обрахунками функції $\tilde{\tau}_1(r)$ та $\tilde{\tau}_2(r)$ практично рівні між собою.

Для обрахунків компонент вектора швидкості на площині $z = 0$ їх було знерозмірено за формулами:

$$v_r|_{z=0} = v_0 \tilde{v}_1(r) \cos \varphi,$$

$$v_\varphi|_{z=0} = -v_0 \tilde{v}_2(r) \sin \varphi,$$

$$v_z|_{z=0} = v_0 \tilde{v}_3(r) \cos \varphi.$$

Поведінка величин \tilde{v}_1 , \tilde{v}_2 і \tilde{v}_3 при $r \geq a$ буде мати вигляд, представлений на рис. 6. Лінії току частинок матеріалу в площині $z = 0$, які в кожній своїй точці дотикаються вектора переміщень, представлено на рис. 7.

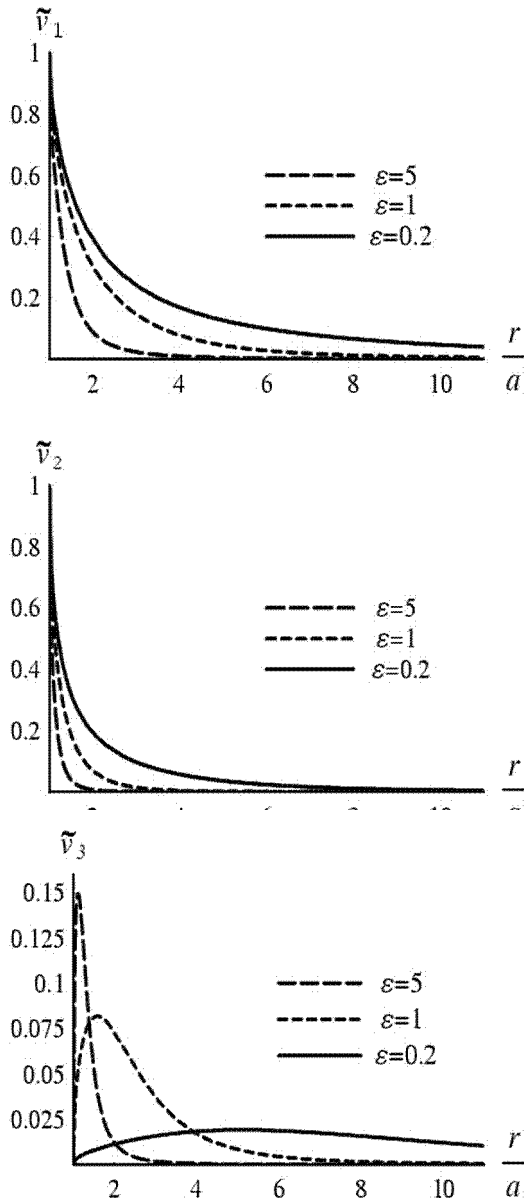


Рис. 6. Поведінка по змінній r знерозмірених компонент вектора швидкості

Якщо ж в отриманому розв'язку перейдемо до границі $h \rightarrow +\infty$, то одержимо розв'язок для задачі руху жорсткого диска в просторі, заповненому в'язкою рідиною (у наближенні Стокса), який збігається зі знайденим раніше в статті [9] (теж як граничний випадок).

Одержаний розв'язок також дає змогу легко дослідити асимптотичну поведінку фізичних величин задачі. Так, якщо скористатися лемою Рімана-Лебега для інтегралів Ханкеля [13, с. 503] та ознакою Абеля збіжності інтегралів, що залежать від

параметра, то, як і в статті [9], з формул (23) і (15) можна одержати поведінку компонент вектора швидкості v_r , v_φ і v_z в площині диска на великій відстані від нього. Для коефіцієнтів Фур'є (13) одержимо:

$$v_{11}(r) \sim \frac{2C_1}{r} \int_0^a \varphi_1(t) dt, \quad v_{21}(r) \sim \frac{iC_1}{r} \int_0^a \varphi_1(t) dt,$$

$$v_{31}(r) \sim \frac{C_1}{r^2} \left(\int_0^a \varphi_2(t) t dt + z \int_0^a \varphi_1(t) dt \right),$$

при $r \rightarrow +\infty$.

(29)

Для стрибків компонент тензора напружень, а також стрибка тиску легко одержати наведені нижче формули:

$$\tau_1(r) \sim \frac{8\mu}{\sqrt{2\pi}} C_1 \frac{\varphi_1(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

$$\tau_2(r) \sim \frac{4\mu}{\sqrt{2\pi}} C_2 \frac{\varphi_3(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

$$\sigma(r) \sim \frac{8\mu}{\sqrt{2\pi}} C_2 \frac{\varphi_2(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

$$\Delta p(r) \sim -\frac{8\mu}{\sqrt{2\pi}} C_1 \frac{\varphi_2(a)a}{r\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \text{при } r \rightarrow a - 0,$$
(30)

які добре узгоджуються з результатами статті [9].

Як бачимо, чисельні обрахунки, представлені на рис. 4, 5 і 6, підтверджують асимптотику фізичних величин (29), (30).

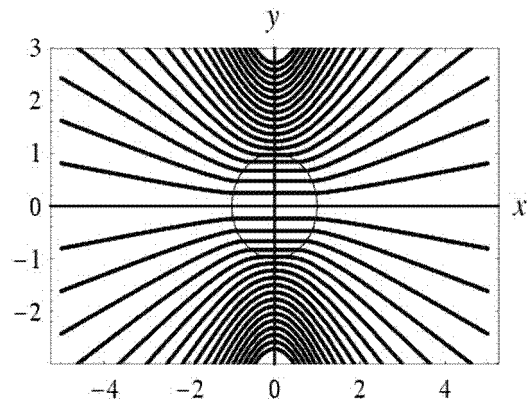


Рис. 7. Лінії току частинок в'язкої рідини на площині $z = 0$. Координати на площині xOy є кратними радіусу диска a

Чисельні розрахунки виконано на ЕОМ за допомогою програми Mathematica 5.0. Для підрахунку власних інтегралів використано квадратурну формулу Гауса-Лежандра 60-го порядку. При цьому

похибка розв'язку інтегральних рівнянь, зростаючи в разі збільшення ε , не перевищила порядку 10^{-8} . Для підрахунку невластних інтегралів було перетворено їхні підінтегральні вирази та використано факт, що вони експоненціально спадають. Похибка виконання граничних умов щодо переміщень і напружень при цьому не перевищила порядку 1 %.

ПІДСУМКИ

Використання методу власних векторних функцій та прийомів теорії парних інтегральних рівнянь дало змогу ефективно розв'язати складну векторну змішану крайову задачу про рух жорсткого диска у півпросторі в'язкої рідини вздовж його стінки. Розв'язок одержано через квадратури, що містять функції, які, в свою чергу, є розв'язками системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Така форма розв'язку уможливило аналітично дослідити фізичні величини, що дало змогу знайти асимптотичну поведінку компонент вектора швидкості диска на великій відстані від нього та стрибка напружень і тиску через поверхню диска в околі його краю. Чисельні обрахунки виявили неочевидний факт, що під час руху диска на нього буде діяти момент, який намагається повернути його передній край до стінки півпростору. Така поведінка моменту опору знаходить своє підтвердження в аналогічній його поведінці в задачі про рух сфероїда у півпросторі в'язкої рідини, досліджену раніше в [14]. У статті наведено чисельний аналіз інших основних фізичних величин задачі.

Застосований метод дає змогу також розглянути задачу про аналогічний рух диска в шарі в'язкої рідини між двома паралельними стінками в площині, яка паралельна їм та розташована від них на різних відстанях. Найближчим часом заплановано статтю з таким дослідженням. Тим більше, що становить інтерес дослідити поведінку моменту опору рухові диска для цього випадку, щоб порівняти її з аналогічною, дослідженою раніше іншим методом в [14], поведінкою моменту опору руху сфероїда.

1. *Shail R., Norton D. J.* On the slow broadside motion of a thin disc along the axis of a fluid-filled circular duct // Proc. Camb. Phil. Soc.– 1969.– Vol. 65.– P. 793-802.
2. *Ranger K. B.* The circular disk straddling the interface of a two-phase flow // Int. J. Multiphase Flow.– 1978.– Vol. 4.– P. 263-277.
3. *Davis A. M. J.* Slow viscous flow due to motion of an annular disk; pressure-driven extrusion through an annular hole in a wall // J. Fluid Mech.– 1991.– Vol. 231.– P. 51-71.
4. *Imai I.* Some applications of function theory to fluid dynamics // 2nd Int. JSME Symp., Fluid Machinery and Fluidies, (Tokyo): P. 15-23.
5. *Davis A. M. J.* Stokes drag on a disk sedimenting toward a plane or with other disks; additional effects of a side wall or free surface // Phys. Fluids A.– 1990.– Vol. 2, N 3.– P. 301-312.
6. *Davis A. M. J.* Stokes drag on a narrow annular disk sedimenting in the presence of fixed boundaries or other disks // Phys. Fluids A.– 1991.– Vol. 3, N 2.– P. 249-257.
7. *Davis A. M. J.* The use of disks to approximate finite axisymmetric bodies in Stokes flow // Phys. Fluids A.– 1992.– Vol. 4, N 1.– P. 7-15.
8. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственных задачах теории упругости // Киев: Изд. дом "Академперіодика", 2002.
9. *Климик Я. Л.* Зміщення жорсткого диску в пружному шарі в площині його розташування та аналогічна задача для стокової течії в'язкої рідини // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.– 2001.– N 1.– С. 120-133.
10. *Климик Я. Л.* Розв'язок системи парних інтегральних рівнянь спеціального вигляду // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка.– 2000.– N 5.– С. 26-30.
11. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости // Л.: Наука. ЛО, 1967.
12. *Бейтмен Г. и Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболы цилиндра, ортогональные многочлены // М.: Наука, 1966.
13. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций // М.: Инлитиздат, 1949.
14. *Хашпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса // М.: Мир, 1976.