

## Устойчивость пластин из зернистого композита с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрицей

Д. В. Бабич, Е. Н. Шикла

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

*Осуществлены постановка и решение задачи о бифуркационной устойчивости прямоугольных пластин из зернистых композитов с повреждающейся матрицей и физически нелинейными включениями.*

**Ключевые слова:** зернистый композит, повреждающаяся матрица, физически нелинейные включения, бифуркационная устойчивость, пластина.

**Введение.** Вопросы влияния поврежденности конструкционных материалов на их деформационные и прочностные свойства освещены в работах [1, 2].

Ранее [3–5] изложена структурная теория деформирования однородных и неоднородных линейно-упругих и физически нелинейных изотропных материалов при микроповреждаемости компонентов материала. Особенность повреждающихся материалов состоит в нелинейном характере деформирования, который обусловлен зависимостью концентрации повреждений в виде рассеянных квазисферических пор от величины нагрузки. Эффективные характеристики жесткости такого материала являются функциями компонентов тензора макродеформаций. Влияние микроповреждаемости на потерю устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся линейно-упругих материалов изучалось в [6–9].

Исследованию деформирования зернистых композитных материалов при физической нелинейности включений и кратковременной микроповреждаемости матрицы посвящена работа [5]. Представляют интерес постановка и решение задач о бифуркационной устойчивости тонкостенных конструкций из таких материалов. Физически нелинейные повреждающиеся материалы подобно линейно-упругим повреждающимся материалам также деформируются нелинейно с той разницей, что наряду с повреждаемостью дополнительной причиной нелинейности является, собственно, физическая нелинейность (например, пластичность) сплошного материала. Отмеченное обстоятельство позволяет при постановке задач о бифуркационной устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся линейно-упругих или физически нелинейных повреждающихся материалов использовать одинаковую процедуру вывода уравнений устойчивости, которая сводится к построению уравнений нейтрального равновесия в приращениях приведенных сил и моментов в точке бифуркации. Такая процедура является синтезом методики решения задач устойчивости пластин и оболочек в нелинейно-упругой области [10] и результатов моделирования связанных процессов деформирования и повреждаемости материалов с различными механическими свойствами [3–5].

В качестве примера такого синтеза рассматривается задача о бифуркационной устойчивости прямоугольных пластин из зернистых композитов с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрицей.

При исследовании устойчивости тонкостенных конструкций в нелинейно-упругой области наиболее распространенными являются два подхода к определению критических нагрузок [6, 10]: концепция приведенно-модульной нагрузки и концепция продолжающегося нагружения. В первом случае критические нагрузки находят при фиксированных значениях действующей нагрузки (приведенно-модульные критические нагрузки), во втором – при ее увеличении (касательно-модульные нагрузки). Ранее [6] показано, что подход к исследованию устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов на основе концепции продолжающегося нагружения предпочтительнее с точки зрения точности результатов и упрощения решения задач устойчивости, поскольку в этом случае отпадает необходимость в определении зон разгрузки и догрузки.

**Определяющие уравнения для зернистого композита с повреждающейся матрицей и физически нелинейными включениями.** Рассматривается деформирование зернистого композита с физически нелинейными включениями, которое сопровождается микроповреждаемостью матрицы в процессе нагружения. Микроповреждаемость матрицы моделируется образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превышают предельные значения микропрочности. Пусть матрица материала имеет пористость  $p_2$ . Физически нелинейное деформирование включений композита описывается зависимостью их упругих модулей от деформаций. Модули объемного сжатия и сдвига материала включений и каркаса матрицы соответственно обозначим  $K_1, \mu_1$  и  $K_2, \mu_2$ , объемные содержания включений и пористой матрицы –  $c_1, c_2$ , причем модули включений  $K_1$  и  $\mu_1$  зависят от деформаций, модули матрицы  $K_{2p}$  и  $\mu_{2p}$ , определяемые формулами [5]

$$K_{2p} = \frac{4K_2\mu_2(1-p_2)^2}{3K_2p_2 + 4\mu_2(1-p_2)}; \quad \mu_{2p} = \frac{(9K_2 + 8\mu_2)\mu_2(1-p_2)^2}{3K_2(3-p_2) + 4\mu_2(2+p_2)}, \quad (1)$$

– от ее пористости  $p_2$ .

Зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  композита представляются в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left( K^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (2)$$

причем эффективные модули объемного сжатия  $K^*$  и сдвига  $\mu^*$  будут функциями пористости матрицы  $p_2$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ .

Определение эффективных модулей упругости зернистого композита с физически нелинейными включениями и пористой матрицей сводится к сле-

дующему итерационному алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия  $K^{*(n)}$  и сдвига  $\mu^{*(n)}$  в  $n$ -м приближении определяются [5] через соответствующие модули включений в  $n$ -м приближении  $K_1^{(n)}$ ,  $\mu_1^{(n)}$  и модули матрицы  $K_{2p}$ ,  $\mu_{2p}$  по формулам

$$\begin{aligned} K^{*(n)} &= c_1 K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) + c_2 K_{2p} - c_1 c_2 \frac{[K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - K_{2p}]^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) + n_c^{(n)}}; \\ \mu^{*(n)} &= c_1 \mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) + c_2 \mu_{2p} - c_1 c_2 \frac{[\mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - \mu_{2p}]^2}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) + m_c^{(n)}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}$  – средние во включениях деформации в  $n$ -м приближении;

$$n_c^{(n)} = \frac{4}{3} \mu_c^{(n)}; \quad m_c^{(n)} = \frac{(9K_c^{(n)} + 8\mu_c^{(n)})\mu_c^{(n)}}{6(K_c^{(n)} + 2\mu_c^{(n)})}; \quad (4)$$

$$K_e^{(n)} = \frac{K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})K_{2p}}{c_1 K_{2p} + c_2 K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})}; \quad \mu_e^{(n)} = \frac{\mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})\mu_{2p}}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})}, \quad (5)$$

если жесткость включений больше жесткости матрицы.

Средние во включениях деформации  $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)}$  в  $(n+1)$ -м приближении, входящие в формулы (3), (5), определяются через макродеформации  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)} &= \frac{\langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij}}{6c_1 \mu^{*(n)} [\mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - \mu_{2p}] [K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - K_{2p}]} \times \\ &\times \{ 2\mu^{*(n)} [\mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - \mu_{2p}] (K^{*(n)} - K_{2p}) - \\ &- 3K^{*(n)} [K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - K_{2p}] (\mu^{*(n)} - \mu_{2p}) \} + \\ &+ \frac{\mu^{*(n)} - \mu_{2p}}{c_1 [\mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) - \mu_{2p}]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

В нулевом приближении включения полагают линейно деформируемыми:

$$K_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(0)}) = K_1(0); \quad \mu_1(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(0)}) = \mu_1(0). \quad (7)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  вычисляются как предельные значения итерационного процесса:

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (8)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала матрицы принимается критерий прочности Губера–Мизеса:

$$I_{\sigma}^{12} = k_2, \quad (9)$$

где  $I_{\sigma}^{12} = (\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{12} \rangle')^{1/2}$  – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений  $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle'$  неповрежденной части материала матрицы;  $k_2$  – предел микропрочности матрицы, являющийся случайной функцией координат. Поскольку инвариант  $I_{\sigma}^{12}$  связан с инвариантом девиатора средних деформаций в матрице  $I_{\varepsilon}^2 = (\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle')^{1/2}$  зависимостью

$$I_{\sigma}^{12} = \frac{2\mu_{2p}}{1-p_2} I_{\varepsilon}^2, \quad (10)$$

а инвариант  $I_{\varepsilon}^2$  определяется через инвариант  $I_{\varepsilon} = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$  для всего композита соотношением

$$I_{\varepsilon}^2 = \frac{\mu^* - \mu_1}{c_2(\mu_{2p} - \mu_1)} I_{\varepsilon}, \quad (11)$$

с учетом (10), (11) критерий прочности (9) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$\frac{2\mu_{2p}(\mu^* - \mu_1)}{c_2(1-p_2)(\mu_{2p} - \mu_1)} I_{\varepsilon} = k_2. \quad (12)$$

В качестве одноточечной функции распределения  $F_2(k_2)$  предела микропрочности  $k_2$  неповрежденной части материала матрицы используется распределение Вейбулла:

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{20}; \\ 1 - \exp[-m_2(k_2 - k_{20})^{n_2}], & k_2 \geq k_{20}, \end{cases} \quad (13)$$

где  $k_{20}$  – минимальное значение предела микропрочности матрицы;  $m_2, n_2$  – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функ-

ции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности.

Случайное поле предела микропрочности матрицы  $k_2$  является статистически однородным для реальных материалов. Его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаются пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле  $k_2$  и распределение микронапряжений в материале матрицы при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения  $F_2(k_2)$  определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, предел прочности которого меньше соответствующего значения  $k_2$ . Поэтому при ненулевых напряжениях  $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$  функция  $F_2(I_\sigma^{12})$  согласно (9), (13) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Поскольку разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость матрицы  $p_{20}$ , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости:

$$p_2 = p_{20} + (1 - p_{20})F_2(I_\sigma^{12}). \quad (14)$$

С учетом соотношений (10), (11) уравнение (14) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_2 = p_{20} + (1 - p_{20})F_2 \left[ \frac{2\mu_{2p}(\mu^* - \mu_1)}{c_2(1 - p_2)(\mu_{2p} - \mu_1)} I_\varepsilon \right], \quad (15)$$

где  $\mu^*$  и  $\mu_{2p}$  – соответственно эффективный модуль сдвига и модуль сдвига матрицы, определяемые формулами (1), (3)–(5).

Уравнения (1)–(7), (15) образуют замкнутую систему, описывающую процесс статистически однородного деформирования зернистого композита с физически нелинейными включениями при повреждаемости матрицы. Физическая нелинейность включений влияет на образование пористости в матрице при деформировании композита, а изменение пористости в процессе деформирования – на кривую деформирования композита. Процедура построения диаграммы деформирования зернистого композита с физически нелинейными включениями при повреждаемости матрицы в условиях заданных макродеформаций сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористой матрицей и физически нелинейными включениями согласно итерационному алгоритму (1), (3)–(7) и определению пористости матрицы из уравнения (15) итерационным методом [5]. Указанный алгоритм позволяет для заданного зернистого композита с физически нелинейными включениями и микроповреждающейся матрицей определять диаграммы макродеформирования (зависимости  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  от  $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$ ), необходимые при постановке и решении задач устойчивости пластин из исследуемых материалов.

При постановке задач устойчивости пластин наиболее удобно использовать секущие модули упругости  $E^*$ ,  $\nu^*$ , которые через эффективные модуль объемного сжатия композита  $K^*$  и модуль сдвига  $\mu^*$  определяются по формулам

$$E^* = \frac{9K^* \mu^*}{3K^* + \mu^*}; \quad \nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*}. \quad (16)$$

**Уравнения устойчивости пластин из зернистого композита с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрицей.** Рассматривается пластина в прямоугольной системе координат  $0x_1x_2x_3$ , связанной со срединной плоскостью. Оси координат  $0x_1$ ,  $0x_2$  совмещены со сторонами пластины, а координата  $x_3$  отсчитывается по нормали к срединной плоскости. Постановка задач устойчивости пластин проводится на основании уравнений состояния для плоского напряженного состояния ( $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ ). С учетом равенства  $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu^*}{1-\nu^*}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$  связь между макронапряжениями и макродеформациями (здесь и далее угловые скобки опускаются) имеет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \frac{E^*}{1+\nu^*} \varepsilon_{ij}, \quad i, j, r = 1, 2. \quad (17)$$

Эффективные секущие характеристики упругости в (17) определяются формулами (16).

При выводе уравнений устойчивости пластин используется подход, разработанный для исследования потери устойчивости упругопластических тел [10]. Для реализации этого подхода применяются уравнения состояния, которые определяются интенсивностями макронапряжений и макродеформаций:

$$I'_\sigma = \sqrt{2/3} \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}; \quad (18)$$

$$I'_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1-\nu^*)} \left[ (\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11})^2 - (\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22}) + (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11}) + \frac{3}{4}(1-\nu^{*2})\varepsilon_{12}^2 \right]^{1/2}. \quad (19)$$

С учетом (17) связь между интенсивностями (18), (19) и их приращениями определяется соотношениями

$$I'_\sigma = 2\mu^* I'_\varepsilon; \quad dI'_\sigma = 2\mu_k dI'_\varepsilon, \quad (20)$$

где  $\mu_k$  – касательный модуль сдвига,  $\mu_k = \mu^* + I'_\varepsilon \frac{\partial \mu^*}{\partial I'_\varepsilon}$ .

Для исследования устойчивости пластины из физически нелинейного материала при микроповреждаемости будем исходить из уравнения нейтрального равновесия [10]:

$$M_{ij,jj} + (T_{ij}^0 w_j)_{,i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (21)$$

где  $M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \bar{\sigma}_{ij} dx_3$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}$ ,  $w$  – соответственно приращения моментов и напряжений в пластине вследствие изгиба, а также прогибов срединной поверхности в возмущенном состоянии;  $T_{ij}^0$  – тангенциальные усилия в основном безмоментном напряженном состоянии,  $T_{ij}^0 = -\sigma_{ij}^0 h$ ;  $h$  – толщина пластины; запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

В (21) в общем случае усилия  $T_{ij}^0$  будут функциями тангенциальных координат  $x_1, x_2$ . Деформации пластины при изгибе без учета поперечных касательных напряжений определяются выражениями

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w_{,ij}(x_1, x_2), \quad i, j = 1, 2, \quad (22)$$

Приращения напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  определяются путем варьирования уравнений (17) в окрестности основного напряженного состояния  $\sigma_{ij}^0$  с учетом зависимостей (18)–(20):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= a_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{12} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{13} \bar{\varepsilon}_{12}; & \bar{\sigma}_{22} &= a_{21} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{22} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{23} \bar{\varepsilon}_{12}; \\ \bar{\sigma}_{12} &= a_{31} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{32} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{33} \bar{\varepsilon}_{12}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $a_{ij}$  – коэффициенты, определяемые соотношениями

$$a_{11} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad a_{12} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad \dots,$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11} &= \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2 - \nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^* - 1)\sigma_{22}^0] \sigma_{11}^0}{3(1 - \nu^{*2}) I_{\sigma_0}^2}; \\ a_{12} &= \frac{\nu^* E^*}{1 - \nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2 - \nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^* - 1)\sigma_{11}^0] \sigma_{11}^0}{3(1 - \nu^{*2}) I_{\sigma_0}^2}; \\ a_{21} &= \frac{\nu^* E^*}{1 - \nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2 - \nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^* - 1)\sigma_{22}^0] \sigma_{22}^0}{3(1 - \nu^{*2}) I_{\sigma_0}^2}; \\ a_{22} &= \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2 - \nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^* - 1)\sigma_{11}^0] \sigma_{22}^0}{3(1 - \nu^{*2}) I_{\sigma_0}^2}; \end{aligned} \right. \quad (24a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{13} &= 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{11}^0 \sigma_{12}^0}{(1 + \nu^*) I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{23} &= 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{22}^0 \sigma_{12}^0}{(1 + \nu^*) I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{31} &= \frac{(E_k - E^*) [(2 - \nu^*) \sigma_{11}^0 + (2\nu^* - 1) \sigma_{22}^0] \sigma_{12}^0}{3(1 - \nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{32} &= \frac{(E_k - E^*) [(2\nu^* - 1) \sigma_{11}^0 + (2 - \nu^*) \sigma_{22}^0] \sigma_{12}^0}{3(1 - \nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{33} &= \frac{E^*}{1 + \nu^*} + 2(E_k - E^*) \frac{(\sigma_{12}^0)^2}{(1 + \nu^*) I_{\sigma^0}^2}. \end{aligned} \right. \quad (246)$$

В случае однородного докритического напряженно-деформированного состояния уравнение (21) с учетом (23) принимает вид

$$\begin{aligned} D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] - \\ - T_{11}^0 w_{,11} - 2T_{12}^0 w_{,12} - T_{22}^0 w_{,22} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{a}_{11}; & a_2 &= \bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} + 2\bar{a}_{33}; & a_3 &= \bar{a}_{22}; & a_4 &= \bar{a}_{13} + \bar{a}_{31}; \\ \bar{a}_5 &= \bar{a}_{23} + \bar{a}_{32}; & \bar{a}_{ij} &= a_{ij}/E; & D &= Eh^3/12; \end{aligned}$$

$E$  – модуль упругости для неповрежденного материала включений.

При решении конкретных задач к уравнению (25) необходимо добавить краевые условия, соответствующие характеру закрепления торцов пластины.

**Устойчивость пластин при одноосном сжатии.** Рассмотрим в качестве примера задачу о потере устойчивости длинной пластины при одноосном сжатии вдоль оси  $0x_1$  ( $T_{11}^0 \neq 0$ ). Уравнение (25) в этом случае принимает вид

$$Da_1 w_{,1111} - T_{11}^0 w_{,11} = 0. \quad (26)$$

Для данной задачи коэффициент  $a_1$  с учетом (24) определяется по выражению

$$a_1 = \frac{E^*}{(1 - \nu^{*2})E} + \frac{(E_k - E^*)(2 - \nu^*)}{2(1 - \nu^{*2})E}. \quad (27)$$

При шарнирном опирании длинных сторон пластины шириной  $b$  решение уравнения (26) имеет вид

$$w = A \sin \frac{n\pi x_1}{b}, \quad (28)$$

где  $n$  – количество полуволн формы потери устойчивости в направлении сжатия.

Критические напряжения согласно (26), (28) определяются соотношением

$$\sigma_{11}^0 = \frac{\pi^2 h^2 E a_1}{12 b^2}. \quad (29)$$

Выражение для критических напряжений (29) является нелинейным относительно  $\sigma_{11}^0$  уравнением и не дает явной информации о влиянии физической нелинейности включений и повреждаемости матрицы зернистого композитного материала на устойчивость пластины. Прямое решение нелинейных уравнений типа (29) для пластин заданных геометрических размеров можно осуществить с помощью итерационных методов с привлечением методики расчета эффективных параметров деформативности зернистого композита с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрицей, подробно изложенной выше.

Влияние микроповреждаемости матрицы зернистого композита с физически нелинейными включениями на устойчивость пластин можно исследовать по упрощенной процедуре, цель которой – установление явной зависимости безразмерной толщины пластины  $h/b$  от параметра нагружения  $\sigma_{11}^0$ , связанных нелинейным соотношением (29). Ее суть состоит в следующем:

в выбранном интервале  $(0, \bar{\varepsilon}_{11}^0)$  с некоторым шагом задается последовательность значений макродеформаций  $(\varepsilon_{11}^0)_i$ ;

с использованием формул (1)–(7), (15), (16) итерационным методом определяется последовательность соответствующих значений эффективных модулей, пористости и макронапряжений  $(\sigma_{11}^0)_i$ , которые отождествляются с критическими напряжениями в пластине;

последовательность значений касательного модуля упругости вычисляется по формуле

$$(E_k)^i = \frac{(\sigma_{11}^0)_{i+1} - (\sigma_{11}^0)_i}{(\varepsilon_{11}^0)_{i+1} - (\varepsilon_{11}^0)_i}.$$

Относительные толщины пластин, соответствующие последовательности значений  $(\sigma_{11}^0)_i$ , определяются по формуле  $\frac{h}{b} = \frac{2\sqrt{3\sigma_{11}^0}}{\pi\sqrt{a_1 E}}$ .

Результаты вычислений по указанной схеме представлены на рисунке, где сплошными, штриховыми, пунктирными и штрихпунктирными линиями соответственно обозначены зависимости безразмерного параметра критических напряжений  $\sigma_{11}^0/\mu_2$  от обратной величины относительной толщины пластины для зернистого композита со сплошной матрицей и линейно-упру-

гими включениями, для композита с физически нелинейными включениями и сплошной матрицей, для композита с линейно-упругими включениями и повреждающейся матрицей и для композита с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрицей. Расчеты выполнены для пластин из зернистого композитного материала с физически нелинейными включениями, у которых объемные деформации являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме сплошного материала включений имеют место соотношения:

$$\sigma_{rr}^I = K_1 \varepsilon_{rr}^I; \quad \sigma_{ij}^I = 2\mu_1(S_1) \varepsilon_{ij}^I.$$

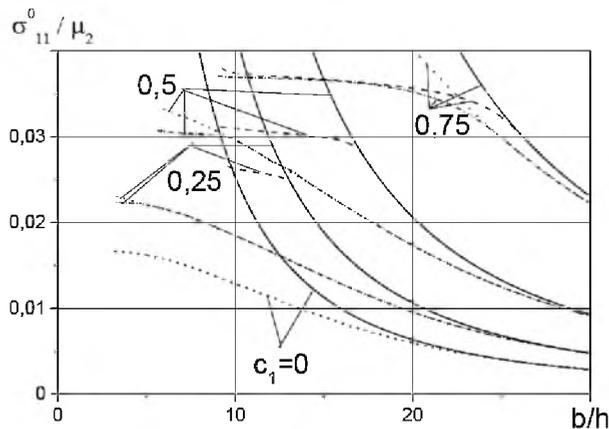
Здесь  $K_1$  – модуль объемного сжатия, который не зависит от деформаций;  $\mu_1(S_1)$  – модуль сдвига, описываемый функцией

$$\mu_1(S_1) = \begin{cases} \mu_{10}, & T_1 \leq T_{10}; \\ \mu'_1 + \left(1 - \frac{\mu'_1}{\mu_{10}}\right) \frac{T_{10}}{2S_1}, & T_1 > T_{10}, \end{cases}$$

причем

$$S_1 = (\varepsilon_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I)^{1/2}; \quad T_1 = (\sigma_{ij}^I \sigma_{ij}^I)^{1/2}; \quad T_{10} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{10},$$

где  $\varepsilon_{ij}^I$ ,  $\sigma_{ij}^I$  – компоненты девиаторов соответственно деформаций и напряжений;  $\sigma_{10}$  – предел пропорциональности;  $\mu_{10}$ ,  $\mu'_1$  – постоянные материала включений.



Зависимости безразмерного параметра критических напряжений от обратной величины безразмерной толщины пластины из повреждающихся зернистых композитов.

В качестве компонентов композита использовались зерна из алюмоборосиликатного стекла ( $K_1 = 38,89$  ГПа;  $\mu_{10} = 29,17$  ГПа;  $\mu'_1 = 0,334$  ГПа) и линейно-упругая эпоксидная матрица ( $K_2 = 3,33$  ГПа;  $\mu_2 = 1,11$  ГПа).

Полагали, что предел пропорциональности включений  $\sigma_{10} = 0,05$  ГПа, минимальная микропрочность матрицы  $k_{20} = 0,00245$  ГПа.

Характер распределения микропрочности матрицы описывается законом Вейбулла с характеристиками разброса прочности:  $n_2 = 2$ ;  $m_2 = 10^3$ .

**Заключение.** Представленные результаты показывают, что физическая нелинейность включений и микроповреждаемость матрицы зернистого композитного материала приводят к снижению устойчивости пластин. Степень влияния указанных факторов на уменьшение критических нагрузок повышается с увеличением относительной толщины пластин.

## Резюме

Виконано постановку і розв'язок задачі про біфуркаційну стійкість прямокутних пластин із зернистих композитних матеріалів із фізично нелінійними включеннями і пошкоджуваною матрицею.

1. Бобырь Н. И. Обобщенная модель повреждаемости конструкционных материалов при сложном малоцикловом нагружении // Пробл. прочности. – 2000. – № 5. – С. 112 – 121.
2. Лебедев А. А., Чаусов Н. Г., Богинич И. О., Недосека С. А. Комплексная оценка поврежденности материала при пластическом деформировании // Там же. – 1996. – № 5. – С. 23 – 30.
3. Khoroshun L. P. Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No. 10. – P. 1035 – 1041.
4. Khoroshun L. P. and Shikula E. N. A theory of short-term micromechanics of homogeneous material for the physically nonlinear deformation // Ibid. – 2004. – **40**, No. 4. – P. 388 – 395.
5. Khoroshun L. P. and Shikula E. N. Short-term microdamageability of granular material under physically nonlinear deformation // Ibid. – No. 6. – P. 656 – 663.
6. Khoroshun L. P. and Babich D. V. Problems of plate stability in short-term damaging of a material // Ibid. – 2001. – **37**, No. 2. – P. 898 – 905.
7. Khoroshun L. P. and Babich D. V. Stability of plates made of a granular composite with damageable components // Ibid. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 803 – 809.
8. Khoroshun L. P. and Babich D. V. Stability of cylindrical shells made of fibrous composite with damageable matrix // Ibid. – 2005. – **41**, No. 6. – P. 675 – 681.
9. Khoroshun L. P. and Babich D. V. Stability of shells of revolution made of fibrous composite with damageable matrix // Ibid. – No. 10. – P. 1148 – 1154.
10. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.

Поступила 19. 06. 2006