

## Нелинейное деформирование полипропиленовых нитей при конечных деформациях

Н. К. Кучер, Е. Л. Данильчук

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Предложен подход для конкретизации определяющих соотношений, описывающих ползучесть волокнистых полипропиленовых структур. Рассмотрены модели линейного и нелинейного вязкоупругого деформирования материалов при наличии конечных деформаций. Определена область применимости теории, учитывающей гипотезу о малых деформациях, и проанализирована эффективность определяющих соотношений.*

**Ключевые слова:** ползучесть, нелинейное вязкоупругое деформирование, волокнистые структуры, полипропиленовые нити, конечные деформации.

**Введение.** Широкое применение современных химических волокон и нитей позволило существенно улучшить эксплуатационные характеристики многих текстильных материалов технического назначения. К ним, в частности, относятся высокие прочностные и усталостные параметры изделий, значительное сопротивление действию ударных нагрузок и наличие концентраторов напряжений, хорошая адгезионная связь с полимерными покрытиями, а также устойчивость к воздействию влаги, света, высоких температур и активных сред [1, 2].

Значительное место среди технических нитей занимают полипропиленовые волокнистые нити и структуры, которые используются наиболее часто для прошивки изделий, изготовления канатов, упаковочных средств и страховочного оборудования [3]. Для создания на их основе оптимальных элементов конструкций на стадии проектирования необходимы эффективные определяющие соотношения, описывающие процессы деформирования в таких материалах.

Механика волокнистых материалов и нитей разработана в основном для упругих моделей на основе гипотезы о малых деформациях [4, 5]. В работах [6–10] предложены различные подходы для исследования неупругого деформирования волокон, нитей и нетканых материалов при малых деформациях. Описаны методики конкретизации определяющих соотношений указанных структур, рассмотрены процедуры для определения характеристик упругости, вязкоупругости и пластичности, проиллюстрирована работоспособность предлагаемых моделей.

Однако экспериментальные исследования механического поведения многих типов химических волокон [1, 2, 11] показывают, что в процессе их деформирования возникают большие (конечные) деформации. Например, деформации при разрушении полипропиленовых, поликапроамидных и полиэтилентерефталатных волокон и нитей достигают соответственно 40...70, 40...50 и 30...55% [1, 11]. Эти величины значительно увеличиваются при пропитке структур влагой [1].

Кроме того, процессы деформирования волокнистых материалов существенно зависят от истории скорости деформации. Прогнозирование несущей способности таких систем требует создания эффективных математических моделей для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций при наличии конечных деформаций. Анализ механического поведения полимеров при конечных деформациях для частной механической модели приведен в [11].

Целью настоящей работы является разработка определяющих уравнений наследственного типа для описания одноосной ползучести нитей при конечных деформациях и методики их конкретизации исходя из базовых опытов. Решение поставленной задачи проводится с помощью линейных и нелинейных моделей наследственного типа для конечных деформаций, определяются области применимости теории, учитывающей гипотезу о малых деформациях. Эффективность такого подхода исследуется при анализе механического поведения комплексной полипропиленовой некрученной нити [3].

**1. Нелинейная ползучесть вязкоупругих стержней.** В теориях деформирования материалов при наличии конечных деформаций необходимо различать координаты каждой частицы элемента в начальной конфигурации отсчета и во всех возможных деформированных (актуальных) конфигурациях.

Обозначим координаты характерной частицы в начальной конфигурации отсчета  $X_K$  ( $K=1, 2, 3$ ). Координаты этой же частицы в любой момент времени  $t$  определим как  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и отнесем их к той же системе фиксированных осей, к которой относятся координаты  $X_K$ . При этом полная история движения среды определяется соотношениями

$$x_i(\tau) = x_i(X_K, \tau), \quad -\infty \leq \tau \leq t, \quad (1)$$

где  $t$  – текущее время.

Деформированное состояние в точке  $X_K$  описывается градиентами деформации

$$x_{i,L}(X_K, \tau) = \frac{\partial x_i(X_K, \tau)}{\partial X_L}. \quad (2)$$

Частные производные по координатам в конфигурации отсчета определяют меру деформации, в качестве которой можно принять

$$2E_{KL}(X_K, \tau) = x_{k,K}x_{k,L} - \delta_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}, \quad (3)$$

где  $C_{KL}$  – правый тензор Коши–Грина;  $\delta_{KL}$  – символ Кронекера. (Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование.)

Согласно постулату теории простых материалов с загущающей памятью [12–16], такие текущие переменные поля, как напряжение и накопленная энергия деформации, зависят не только от текущих значений градиента деформации, но и от прошлой истории этого градиента. Для описания механического поведения вязкоупругих сред функционального типа можно записать [12–16]

$$\sigma_{ij}(t) = -p\delta_{ij} + x_{i,K}x_{j,L} \Psi_{KL}(E_{KL}(t-s), E_{KL}(t)), \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши;  $p$  – гидростатическое давление,  $p = \sigma_{kk}$ ;  $\Psi_{KL}()$  – тензорзначный функционал, преобразующий каждую историю изменения градиента деформации  $E_{KL}(t)$  при  $-\infty \leq t \leq \infty$  в соответствующую историю напряжений  $\sigma_{ij}(t)$ .

Согласно подходу Грина–Ривлина, действительный непрерывный скалярный функционал  $\Psi_{KL}()$  от  $E_{KL}(t)$  может быть представлен в виде равномерно сходящегося полиномиального ряда на множестве действительных непрерывных функционалов от  $E_{KL}(\tau)$  [14, 15]. Если воспользоваться при такой аппроксимации линейными функционалами вида

$$\int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial E_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

и ограничиться в разложении первыми членами ряда, то получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + x_{i,K}x_{j,L} & \left[ g_0\delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial E_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ & \left. + \delta_{KL} \int_0^t g_2(t-\tau) \frac{\partial E_{JJ}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для несжимаемых материалов справедливо соотношение

$$tr \mathbf{E} = tr(\mathbf{E}^2) - |tr(\mathbf{E})|^2 + \dots, \quad (6)$$

где  $tr$  – след матрицы  $\mathbf{E}$ , соответствующей  $E_{KL}$ .

В соотношении (5) можно пренебречь вторым интегралом, содержащим параметр  $E_{JJ}$ :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + x_{i,K}x_{j,L} \left[ g_0\delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial E_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right]. \quad (7)$$

Отметим, что при  $g_1(t) \equiv 0$  выражение (7) приводится к известному уравнению состояния нелинейной теории упругости для конечных деформаций [17].

Конкретизируем соотношения нелинейной теории вязкоупругости (7) применительно к одноосному деформированию. Будем считать, что справедлива гипотеза о постоянстве объема. В этом случае имеем

$$x_1 = \lambda X_1, \quad x_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} X_2, \quad x_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} X_3, \quad (8)$$

где  $\lambda$  – кратность удлинения, связанная с деформацией соотношением

$$\lambda = 1 + \varepsilon_{11}. \quad (9)$$

Тензор деформации (3) для соотношений (8) представим в виде

$$[2E_{KL}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{\lambda}} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{\lambda}} - 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Исходя из условий  $\sigma_{22} = 0, \sigma_{33} = 0$  перепишем уравнения состояния (7), ограничиваясь тремя членами ряда [18]:

$$\sigma_{11} = g_0 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{2\lambda} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\lambda} \right) d\tau + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\lambda^2}{d\tau} d\tau. \quad (11)$$

Разлагая затем величину  $\frac{1}{\lambda}$  в ряд Тейлора и ограничиваясь величинами второго порядка малости, получаем

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \approx 1 - \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^2. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в соотношение (11), и, пренебрегая при этом составляющими, содержащими члены  $\varepsilon_{11}^3$  и выше, получаем уравнение состояния для описания одномерных процессов деформирования:

$$\sigma_{11} = 3g_0 \varepsilon_{11}(t) + \frac{3}{2} [1 + \varepsilon_{11}(t)] \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (13)$$

Стандартные испытания на ползучесть, как правило, проводятся при постоянных значениях действующей нагрузки  $P$ . При постоянстве объема  $l_0 F_0 = lF$ , где  $l_0, F_0$  – длина и площадь поперечного сечения стержня в

исходном (недеформированном) состоянии;  $l$ ,  $F$  – аналогичные величины деформируемого элемента. Тогда

$$p_{11} = \frac{P}{F_0} = \frac{P}{F} \frac{F}{F_0} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda}. \quad (14)$$

Выражение для вычисления параметра  $p_{11}$  на основе представлений (12)–(14) следует из соотношения (13):

$$p_{11} = 3g_0 \varepsilon_{11}(t) [1 - \varepsilon_{11}(t)] + \frac{3}{2} \int_0^t g_1(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (15)$$

Если ввести новое обозначение подынтегральной функции

$$3g_0 + \frac{3}{2} g_1(t) = E(t), \quad (16)$$

то выражение, связывающее параметр  $p_{11}$  с деформацией ползучести, примет вид

$$p_{11} + 3g_0 \varepsilon_{11}^2(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (17)$$

Последнее соотношение можно представить следующим образом [18]:

$$\varepsilon_{11}(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} [p_{11}(\tau) + 3g_0 \varepsilon_{11}^2(\tau)] d\tau, \quad (18)$$

где  $J(t)$  – функция податливости, обратная к функции  $E(t)$ .

С другой стороны, для задач ползучести параметр  $p_{11}$  определяется выражением

$$p_{11} = N H(t), \quad (19)$$

где  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда;  $N$  – усилие, отнесенное к начальной площади  $F_0$ ,  $N = P/F_0$ .

В результате подстановки соотношения (19) в (18) получим

$$\varepsilon_{11}(t) = J(t) N + 3g_0 \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{11}^2(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (20)$$

Тогда функцию податливости  $J(t)$  можно представить в виде

$$J(t) = \frac{\varepsilon_{11}(t)}{N} + \frac{f(t)}{N}, \quad (21)$$

где  $f(t)$  – некоторая новая функция, подлежащая определению. При  $f(t) \equiv 0$  из (21) следует известное соотношение для определения функции податливости линейной теории вязкоупругости. Следовательно, выражение  $f(t)/N$  определяет дополнительное слагаемое к функции податливости линейной теории, которое обусловлено эффектами нелинейности.

Подставляя представление (21) в соотношение (20), получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$f(t) + \frac{3g_0}{N} \int_0^t f(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{11}^2(\tau)}{d\tau} d\tau = -\frac{3g_0}{N} \int_0^t \varepsilon_{11}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{11}^2(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (22)$$

При известных из экспериментов параметрах  $g_0$ ,  $N$  и зависимости  $\varepsilon_{11}(t)$  путем численного решения уравнения (22) можно вычислить значения функции  $f(t)$  в некоторых фиксированных точках  $t_i$  и затем аппроксимировать ее соответствующим выражением.

## 2. Анализ закономерностей деформирования волокнистых структур.

Воспользуемся полученными ранее результатами исследований ползучести полипропиленовой некрученной комплексной нити LIPOLA/A-10 [3]. Они представлены в виде кривых ползучести  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t, P_k)$  для десяти фиксированных значений действующей нагрузки  $P_k$ , исходя из меры для малых деформаций, т.е.  $\bar{\varepsilon} = (l - l_0)/l_0$ . Здесь и далее для удобства изложения опущены индексы при обозначении компонент деформаций и напряжений  $\varepsilon = \varepsilon_{11}$ ,  $\sigma = \sigma_{11}$ .

Проанализируем результаты опытов, отказавшись от гипотезы о малых деформациях. В качестве меры конечных деформаций примем

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1 + \bar{\varepsilon}), \quad d\varepsilon = \frac{dl}{l}. \quad (23)$$

Для построения кривых ползучести в рамках этой модели достаточно пересчитать соотношения  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t, P_k)$  с использованием представления (23).

Истинное напряжение исходя из условия постоянства объема определяется выражением

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} \frac{F_0}{F} = \bar{\sigma}(1 + \bar{\varepsilon}). \quad (24)$$

При этом для каждой кривой ползучести будет постоянным только относительное усилие  $N$ , а не действующее напряжение, что имело место для малых деформаций.

Полученные зависимости конечных деформаций  $\varepsilon = \varepsilon(t, N_k)$  от времени  $t$  для различных фиксированных значений параметра  $N_k = P_k/F_0$  представлены на рис. 1. В качестве аппроксимирующих функций, описывающих экспериментальные данные, использовались функции вида  $\varepsilon = ab^t t^d$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $d$  – параметры кривых ползучести. Необходимо также отметить, что ввиду ограниченности временного диапазона на рис. 1 не приведены разрушающие

деформации, превышающие 30%. В частности, при  $N = 408,2$  МПа разрушающая истинная деформация  $\varepsilon_b = 36,5\%$ , что соответствует 44%, если использовать меру малых деформаций.

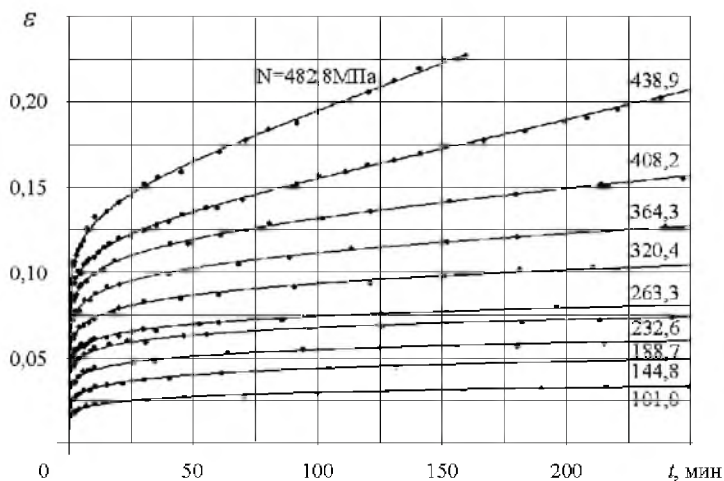


Рис. 1. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости деформаций комплексной нити LIPOLA/A-10 от времени для различных фиксированных значений параметра  $N$ .

Сравнение распределения деформаций во времени с результатами, полученными на основе гипотезы о малых деформациях [3], показывает, что истинная деформация ползучести полипропиленовых нитей может быть в некоторых случаях заметно меньшей, если использовать более точную расчетную модель с логарифмической мерой деформации. Различие по деформациям увеличивается при повышении последних и действующей нагрузки. Например, при  $N = 482,8$  МПа в момент времени  $t = 150$  мин предельная деформация меньше на 2,5%, чем полученная в [3], и соответственно при  $N = 263,3$  МПа для  $t = 250$  мин погрешность при определении максимальной деформаций составляет всего 0,46%. Поэтому вполне логичным является вывод работы [3] о возможности применения линейной теории вязкоупругости для малых деформаций к описанию процессов деформирования, если  $N \leq 0,4\bar{\sigma}_b = 263,3$  МПа.

В основе большинства моделей неупругого деформирования материалов лежит предположение о существовании мгновенной диаграммы деформирования (диаграммы свойств). Под такой диаграммой подразумевают зависимость напряжения от деформации, которая инварианта к виду напряженного состояния и скорости деформации [19, 20]. В частности, диаграмму свойств можно вычислить из серии кривых растяжения, которые получены при испытаниях образцов с различными постоянными скоростями напряжения. Более детально особенности методики моделирования мгновенной диаграммы деформирования при конечных деформациях изложены в [19].

Воспользуемся мгновенной кривой деформирования [3], построенной на основе гипотезы о малых деформациях. Обозначим ее  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ . При использовании логарифмической меры деформации из представлений (23), (24) на основе  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  легко вычислить мгновенную диаграмму деформирования

для конечных деформаций, т.е.  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Полученные соотношения для полипропиленовой нити приведены на рис. 2. Видно, что истинный предел прочности  $\sigma_b$  при растяжении нити и соответствующая ему предельная деформация  $\varepsilon_b$  соответственно равны 792 МПа и 19,1%. Модуль мгновенной упругости  $E_0$  в этом случае составляет 5070 МПа. За предел текучести  $\sigma_T$ , который определяется также из опытов на разгрузку, принято напряжение, соответствующее остаточной пластической деформации 0,2%, т.е.  $\sigma_T = 420$  МПа.

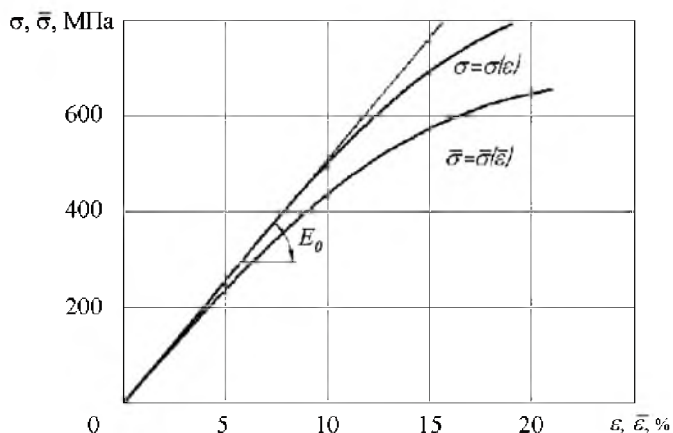


Рис. 2. Диаграммы мгновенного деформирования нити при различном выборе меры деформации.

Чтобы использовать приведенные в разд. 1 соотношения для описания нелинейной ползучести волокнистых структур, необходимо вычесть пластическую составляющую от общей деформации в распределении, показанном на рис. 1. Пластическую деформацию для  $k$ -й кривой ползучести вычисляем по соотношениям

$$\bar{\varepsilon}_k^P = \bar{\varepsilon}_k(0) - \bar{\varepsilon}_k^e = \bar{\varepsilon}_k(0) - \frac{\bar{\sigma}_k}{E_0}; \quad \varepsilon_k^P = \ln(1 + \bar{\varepsilon}_k^P) = \ln\left(1 + \bar{\varepsilon}_k(0) - \frac{\bar{\sigma}_k}{E_0}\right) \quad (25)$$

при  $\bar{\sigma}_k \geq \bar{\sigma}_T$ ,

где  $\bar{\varepsilon}_k(0)$  – деформация, соответствующая напряжению  $\bar{\sigma}_k$  на мгновенной кривой деформирования;  $\bar{\varepsilon}_k^e$ ,  $\bar{\varepsilon}_k^P$  – упругие и пластические составляющие деформации;  $E_0 = 4740$  МПа;  $\bar{\sigma}_T = 180$  МПа.

После вычитания пластической деформации из зависимостей  $\varepsilon = \varepsilon(t, N_k)$  получим кривые ползучести комплексной нити  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(t, N_k)$ , которые могут быть описаны в рамках модели нелинейного вязкоупругого тела. Здесь  $\tilde{\varepsilon}(t, N_k) = \varepsilon^e(N_k) + \varepsilon^c(t, N_k)$ .

**3. Определение области линейности конечного вязкоупругого поведения волокнистых структур.** Необходимым условием линейности конечных вязкоупругих деформаций является инвариантность функции податливости относительно действующих усилий  $N_k$ . В этом случае условие линейности представляется выражением



$$J(t) = \frac{\tilde{\varepsilon}(t, N_1)}{N_1} = \frac{\tilde{\varepsilon}(t, N_2)}{N_2} = \dots = \frac{\tilde{\varepsilon}(t, N_n)}{N_n}. \quad (26)$$

Однако вследствие статистической природы механических свойств материалов экспериментальные кривые податливости, построенные для каждого относительного усилия  $N_k$ , согласно представлению (26) будут расслаиваться. Следовательно, судить о совпадении функции податливости можно только с определенной погрешностью и вероятностью [7]. Линейным конечным вязкоупругим материалом с погрешностью  $2\delta = 10\%$  будем называть материал, для которого все экспериментальные кривые податливости попадают в интервал, ограниченный величинами  $\pm \delta$  относительно их выборочного среднего.

На рис. 3 приведены кривые функций податливости комплексной нити LIPOLA/A-10 для тех значений относительных усилий, при которых проявляются линейные свойства относительно конечных деформаций. Здесь тонкими сплошными линиями представлены результаты аппроксимации экспериментальных данных  $J_k(t)$ . На основе этих аппроксимаций рассчитывались среднеквадратичные значения функции податливости  $\bar{J}(t_j)$  (штриховая линия). Штрихпунктирными линиями отмечены границы интервала, соответствующего максимальной погрешности  $\delta$  от значений  $\bar{J}(t_j)$ .

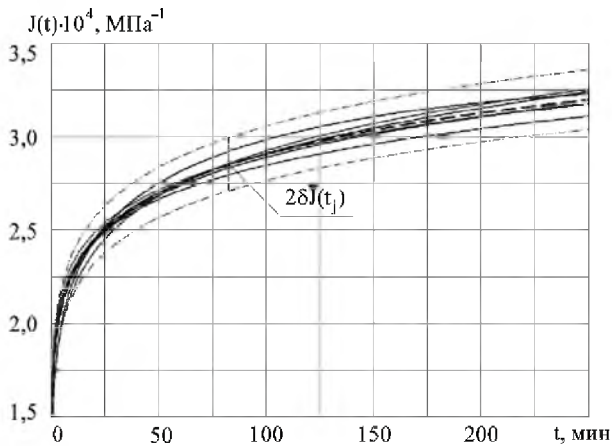


Рис. 3. Кривые функций податливости комплексной нити, их среднеквадратичные значения и границы доверительного интервала.

Сравнение представленных кривых податливости с аналогичными результатами [3] показывает, что при данном подходе область линейности конечного вязкоупругого поведения материалов несколько шире, так как в этом случае в нее попадают и функции податливости, полученные при  $\bar{\sigma} = 0,51\bar{\sigma}_b = 320,3$  МПа.

С помощью среднеквадратичной функции податливости  $\bar{J}(t)$  легко вычислить распределение деформаций для различных фиксированных значений относительных усилий  $N_k$  в рамках конечной линейной вязкоупругой модели. Результаты таких вычислений не приводим, поскольку они практически совпадают с данными работы [3].

4. **Конкретизация параметров нелинейной вязкоупругой модели.** Из соотношений (21), (22) и (26) следует, что функция податливости нелинейной теории вязкоупругости для конечных деформаций зависит от времени  $t$  и параметра  $N$ , т.е.  $J = J(t, N)$ .

Предположим, что  $J = J(t, N)$  может быть представлена в виде суммы экспоненциальных функций вида

$$J(t, N) = \sum_{i=1}^n A_i(N) \exp(\alpha_i(N)t), \quad (27)$$

где  $A_i(N)$ ,  $\alpha_i(N)$  – некоторые неизвестные функции, подлежащие определению. Относительно вида этих функций можно сказать, что они асимптотически должны стремиться к постоянным значениям  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{\alpha}_i$  для тех  $N$ , которые определяют диапазон линейной модели.

Параметры функции податливости (27) можно легко вычислить, в частности, исходя из серии экспериментальных кривых ползучести, которые получены при постоянных значениях параметра  $N_k$ . В этом случае значения податливости  $J(t, N_k)$  определяются соотношением (21) при  $N = N_k$ . Слагаемое  $f(t)/N_k$  к функции податливости линейной теории можно определить путем численного решения интегро-дифференциального уравнения (22).

Заметим, что для упругой составляющей деформации  $\varepsilon^e$  из соотношения (22) следует, что  $f(t) \equiv 0$ . Следовательно, функция  $f(t)$  зависит только от компоненты  $\varepsilon^c(t)$ . Кроме того, если  $\varepsilon(t)$  в соотношении (22) заменить  $\varepsilon^c(t)$ , то при  $t=0$  из данного представления получим  $f(0) = f_0 = 0$ .

Рассмотрим вначале определение значений функции податливости в фиксированных точках, исходя из одной кривой ползучести, например, соответствующей  $N_1 = 408,2$  МПа. Для удобства решения уравнения (22) экспериментальные зависимости  $\varepsilon_3^c(t, N_1)$  аппроксимируем выражениями в виде

суммы четырех экспонент, т.е.  $\varepsilon_3^c(t, N_1) = \sum_{j=1}^4 B_j \exp(\beta_j t)$ . Методика аппроксимации заданной функции экспонентами изложена в [15]. В этом случае разрешающее уравнение (22) можно записать в виде

$$f(t) - \frac{3g_0}{N_1} \int_0^t f(\tau) \frac{d(\varepsilon_3^c(t-\tau))^2}{d\tau} d\tau = -\frac{3g_0}{N_1} \int_0^t \varepsilon_3^c(t-\tau) \frac{d(\varepsilon_3^c(\tau))^2}{d\tau} d\tau. \quad (28)$$

Тогда, разбивая участок интегрирования  $[0, t]$  на  $n$  равных частей и аппроксимируя  $f(t)$  линейной функцией вида  $k_i t + \beta_i$  на каждом участке, с помощью итерационной процедуры последовательно вычисляем значения искомой функции в реперных точках, т.е.  $f_i = k_i t_i + \beta_i$ , где  $t_i = ih$ ;  $h = t_b/n$ ;  $n$  – некоторое наперед заданное целое число, выбираемое из условия малости  $h$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Вид вычисленной функции  $f(t)$  представлен на вставке

рис. 4. Исходя из этой функции были определены затем значения функции податливости для линейной и нелинейной модели при  $N = N_1$  (рис. 4).

Как видно из рис. 4, функция податливости для нелинейной модели при  $N_1 = 408,2$  МПа определяет несколько заниженные значения по сравнению с аналогичной функцией для линейной модели. Аппроксимируя полученную зависимость с помощью экспоненциальных функций и ограничиваясь в представлении (27) четырьмя членами ряда, вычисляем  $A_i(N_1)$  и  $\alpha_i(N_1)$  для  $i = 1, 2, 3, 4$ .

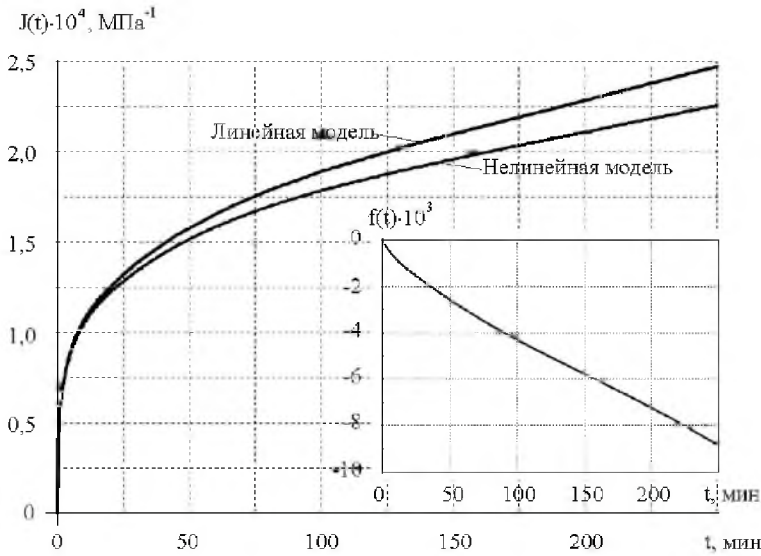


Рис. 4. Значения функции податливости для линейной и нелинейной модели, вычисленные с помощью кривой ползучести, соответствующей  $N_1 = 408,2$  МПа.

Аналогично могут быть вычислены значения этих функций при  $N_2, N_3, N_4$  и т.д., исходя из имеющихся кривых ползучести, учитывая и те, которые соответствуют линейной модели. Аппроксимируя затем вычисленные значения функций подходящим выражением, определяем искомые зависимости  $A_i(N)$  и  $\alpha_i(N)$  для  $i = 1, 2, 3, 4$ .

За аппроксимирующие функции примем

$$A(N) = p + q \operatorname{th}\left(\frac{N - r}{s}\right), \quad \alpha(N) = \mu + \varphi \operatorname{th}\left(\frac{N - \psi}{\rho}\right), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A(N) &= \{A_1(N), A_2(N), A_3(N), A_4(N)\}^T; \\ \alpha(N) &= \{\alpha_1(N), \alpha_2(N), \alpha_3(N), \alpha_4(N)\}^T; \end{aligned} \quad (30)$$

$p, q, r, s, \mu, \varphi, \psi, \rho$  – четырехмерные вектор-столбцы, определяемые из наилучшего соответствия расчетных и экспериментальных данных;  $\operatorname{th}(x)$  – функция гиперболического тангенса; верхний индекс “Т” в (30) обозначает транспонирование матрицы.

В качестве примера корреляции аппроксимирующих функций с экспериментальными данными приведем зависимости  $A_1(N)$  и  $\alpha_1(N)$  от параметра  $N$  (рис. 5). Как видно, расчетные и экспериментальные данные хорошо коррелируют во всем рассматриваемом диапазоне относительных усилий  $N$ . Такое же соответствие расчета и эксперимента характерно и для других функций. При  $N \leq 350$  МПа данные функции асимптотически стремятся к некоторым постоянным значениям, что подтверждает независимость функции податливости линейной модели от параметра  $N$ .

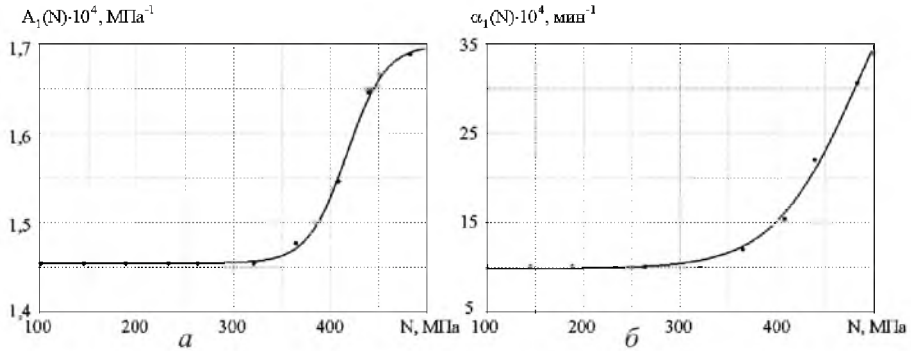


Рис. 5. Зависимость параметров  $A_1(N)$  (а) и  $\alpha_1(N)$  (б) от величины относительного усилия  $N$ .

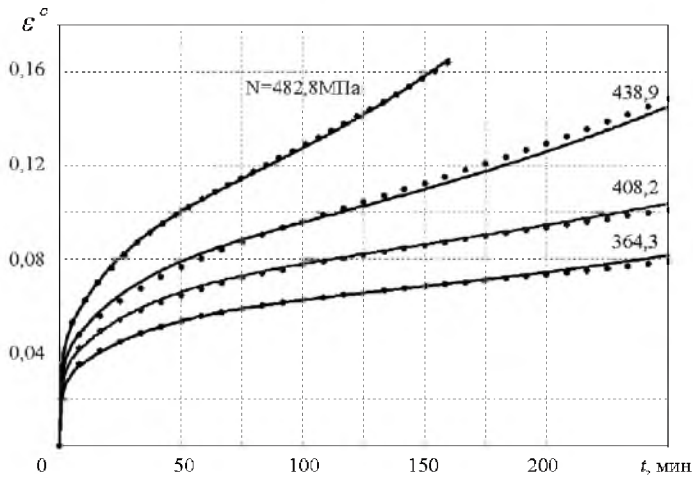


Рис. 6. Расчетные (линии) и экспериментальные (точки) зависимости деформаций ползучести  $\varepsilon^c$  от времени  $t$  при различных фиксированных значениях параметра  $N$ .

Таким образом, для исследуемых волокнистых структур функция податливости нелинейной теории вязкоупругости для конечных деформаций может быть представлена в виде (27) при  $n = 4$ . Для более точного описания процессов длительного деформирования количество используемых членов ряда может быть и больше. Однако в этом случае требуется также большее количество базовых экспериментов на ползучесть для конкретизации уравнений состояния.

На основе предложенного выражения (27) для функции податливости нелинейной модели путем численного решения интегро-дифференциального

уравнения (20) были рассчитаны зависимости деформации ползучести от времени для различных фиксированных значений параметра  $N_k$ . При этом применялась такая же итерационная процедура, как и для решения соотношения (22). Вычисленные распределения деформаций ползучести  $\varepsilon^c$  от времени  $t$  приведены на рис. 6. Как видно, наблюдается достаточно хорошее соответствие между расчетными и экспериментальными данными для всего рассматриваемого диапазона параметра  $N_k$ .

Отметим, что предлагаемый подход конкретизации уравнений состояния может использоваться также при зависимости параметров определяющих соотношений от действующего напряжения.

## Выводы

1. При деформировании волокнистых полипропиленовых структур в ряде случаев возникают значительные (конечные) деформации, достигающие при разрушении 36% и более. Прогнозирование их механического поведения исходя из гипотезы о малых деформациях может привести к существенным изменениям напряженно-деформированного состояния. В частности, погрешности при определении разрушающих напряжений и деформаций на мгновенной кривой деформирования при таком подходе достигают соответственно 21 и 10%.

2. Предлагаемый вариант нелинейной теории вязкоупругости, базирующийся на логарифмической мере деформации и на гипотезах о постоянстве деформируемого объема и зависимости параметров уравнения состояния от величины действующего усилия, позволяет достаточно эффективно описывать ползучесть элементов конструкций при деформациях до 70%.

3. С помощью разработанной методики конкретизации определяющих соотношений можно оценить области применимости других, более простых моделей деформированного твердого тела, когда один или несколько параметров уравнений состояния являются константами материала. Точность аппроксимации характеристик материала от величины действующего усилия зависит от количества базовых опытов и корректности экспериментальных данных.

## Резюме

Запропоновано підхід для конкретизації визначальних співвідношень, що описують повзучість волокнистих поліпропіленових структур. Розглянуто моделі лінійного та нелінійного в'язкопружного деформування матеріалів за наявності скінченних деформацій. Визначено область застосування теорії, що базується на гіпотезі про малі деформації, та проаналізовано ефективність визначальних співвідношень.

1. *Перепелкин К. Е.* Современные химические волокна и перспективы их применения в текстильной промышленности // Рос. хим. журн. – 2002. – 46, № 1. – С. 31 – 48.
2. *Попов Л. Н., Керимов С. Г.* Текстильные материалы технического назначения. Справочник-каталог. – Ярославль: Изд-во НИИ техн. тканей, 2006. – 492 с.

3. Кучер Н. К., Земцов М. П., Данильчук Е. Л. Кратковременная ползучесть и прочность полипропиленовых волокнистых структур // Пробл. прочности. – 2007. – № 6. – С. 77 – 90.
4. Белицин М. Н. Синтетические нити (структура, свойства, методы расчета). – М.: Легкая индустрия, 1970. – 192 с.
5. Хирл Дж. Механика нитей и нетканых материалов // Тканые конструкционные композиты / Под ред. Т.-В. Чу и Ф. Ко. – М.: Мир, 1991. – С. 46 – 89.
6. Работнов Ю. Н., Милейко С. Т. Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
7. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Нелинейная ползучесть вязкоупругих органических волокон при растяжении // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 7. – С. 102 – 115.
8. Мишаков В. Ю., Слуцкер Г. Я., Сталевич А. М. Моделирование вязкоупругости нетканого материала с учетом необратимой компоненты деформации // Хим. волокна. – 2006. – № 1. – С. 38 – 41.
9. Sarkisov V. Sh., Moskin I. V., and Tiranov V. G. Model description of the nonlinear viscoelasticity of oriented polyethylene terephthalate and polycapromide fibres // Fibre Chemistry. – 2006. – 38, No. 3. – P. 191 – 194.
10. Демидов А. В., Макаров А. Г., Сталевич А. М. Системный анализ вязкоупругости полиэфирных нитей // Хим. волокна. – 2007. – № 1. – С. 62 – 65.
11. Akhtar Khan and Haoyue Zhang. Finite deformation of: experiments and modeling // Int. J. Plasticity. – 2001. – 17, No. 9. – P. 1167 – 1188.
12. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. – М.: Мир, 1974. – 192 с.
13. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
14. Pipkin A. S. and Rivlin R. S. Mechanics of rate-independent materials // Z. Ang. Math. Physik. – 1965. – 16, No. 3. – S. 313 – 326.
15. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
16. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.
17. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
18. Cristensen R. M. A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers // Trans. ASME. Appl. Mech. – 1980. – 47, No. 4. – P. 762 – 768.
19. Агальцов В. И., Владимиров С. А., Дегтярев В. П. Математическое моделирование механических свойств металлов и сплавов при больших деформациях // Механика твердого тела. – 2007. – № 1. – С. 149 – 159.
20. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее применение к расчету элементов тонкостенных конструкций. – Киев: Наук. думка, 2005. – 221 с.

Поступила 10. 07. 2008