УДК 539.3:534.1

Методика оптимизации структуры композитных пластин при динамических нагрузках

Е. В. Савченко

Черниговский государственный технологический университет, Чернигов, Украина

Рассматривается применение методов теории нелинейного программирования для создания оптимальных проектов многослойных пластин с максимальным демпфированием.

Ключевые слова: композиционные материалы, демпфирование, многослойная пластина, оптимизация.

Введение. Армированные волокнами композиционные материалы имеют ряд существенных преимуществ перед однородными материалами. Наиболее важными являются высокая удельная жесткость и возможность регуляции физико-механических характеристик путем изменения ориентации волокон и их концентрации. Благодаря этому при конструировании появляются дополнительные возможности, позволяющие значительно изменить процесс проектирования конструкции. При этом наличие дополнительных проектных параметров приводит к тому, что неотъемлемой частью проектирования конструкций из композиционных материалов становится оптимизация.

В данной работе рассматривается возможность оптимизации конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок, с учетом демпфирования, которое является определяющим фактором. Несмотря на это, в известных работах, посвященных проблеме оптимизации конструкций из композиционных материалов, демпфирование рассматривалось не как параметр проектирования, а как способ улучшения характеристик уже спроектированной конструкции.

Уравнение колебаний пластины из композиционных материалов. Рассмотрим задачу колебаний пластины, которая состоит из нескольких слоев композиционного материала с вязкоупругими свойствами материалов матрицы и армирующих волокон. Полагаем, что структура каждого армированного слоя отвечает ортотропному материалу (рис. 1), а физические уравнения для материалов, составляющих композит, описываются интегралом свертки Больцмана–Вольтерра [1].

После перехода в пространство преобразований Фурье зависимость между изображениями напряжений σ и деформаций ε определяется матрицей комплексных модулей C:

$$\sigma = C\varepsilon. \tag{1}$$

Компоненты матрицы C (комплексные модули) для монослоя композиционного материала определяются по методике, предложенной в [2].

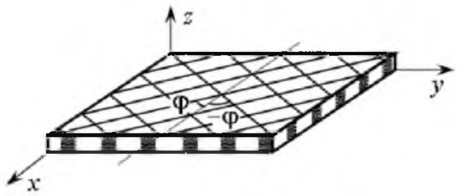

Рис. 1. Монослой композиционного материала.

Для получения уравнения колебаний и приведения задачи к двухмерной используем аппроксимацию перемещений по толщине слоя полиномами Лагранжа [3]:

$$u_z = N_z q_{xy}, \tag{2}$$

где u_z – вектор перемещений точки слоя с координатой z; q_{xy} – вектор перемещений точек на интерполяционных (узловых) поверхностях, $q_{xy} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_m \quad v_m \quad w_m]^T$ (рис. 2); N_z – матрица функций интерполяции по оси z,

$$N_z = [N_{zi} \quad N_{zm}], \qquad N_{zi} = \begin{bmatrix} f_i & 0 & 0 \\ 0 & f_i & 0 \\ 0 & 0 & f_i \end{bmatrix} \quad (i \Leftrightarrow m). \tag{3}$$

Можно показать, что этот вариант для однослойной пластины аналогичен теории Тимошенко, которая учитывает деформации сдвига по толщине, если пренебречь деформациями растяжения–сжатия по оси z. С другой стороны, такую модель можно назвать полуаналитическим методом конечных элементов.

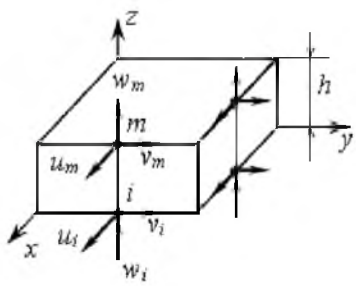

Рис. 2. Аппроксимация перемещений по толщине слоя.

Деформации и напряжения в точках слоя имеют вид

$$\varepsilon = A u_z = A N_z q_{xy}; \qquad \sigma = C A N_z q_{xy}, \tag{4}$$

где A – матрица дифференциальных операторов [4].

Особенности закрепления пластины учитываются выбором функций аппроксимации перемещений по осям x и y. В данном случае имеем

$$q_{xy}(x, y) = N_{xy}q, \tag{5}$$

где

$$N_{xy} = \mathrm{diag}[N_{xyi} \quad N_{xym}]; \qquad q = \begin{bmatrix} q_i \\ q_m \end{bmatrix};$$

$$N_{xyi} = \begin{bmatrix} u_{i1} & & & u_{i2} & & & & u_{ir} & & \\ & v_{i1} & & & v_{i2} & & \ldots & & v_{ir} & \\ & & w_{i1} & & & w_{i2} & & & & w_{ir} \end{bmatrix} \quad (i \Leftrightarrow m); \tag{6}$$

$$q_i = [q_{iu1} \quad q_{iv1} \quad q_{iw1} \quad q_{iu2} \quad q_{iv2} \quad q_{iw2} \quad \cdots \quad q_{iur} \quad q_{ivr} \quad q_{iwr}]^T.$$

Функции N_{xy} можно принять непрерывными вдоль осей или кусочно-непрерывными. В первом случае приходим к классическому варианту метода Ритца, во втором – к методу конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. Отметим, что возможен и промежуточный вариант – аппроксимация по одной из осей (x или y) кусочно-непрерывными функциями, по другой – непрерывными, определенными на всей оси. Этот вариант соответствует так называемому ленточному варианту МКЭ. Очевидно, все варианты являются частными случаями рассматриваемых зависимостей.

С учетом (5), (6) получим

$$u_z = N_{xyz}q, \tag{7}$$

где N_{xyz} – матрица функций аппроксимации перемещений по осям x, y, z,

$$N_{xyz} = [\overline{N}_i \quad \overline{N}_m]; \qquad \overline{N}_i = N_{zi} \cdot N_{xyi}; \qquad \overline{N}_m = N_{zm} \cdot N_{xym}. \tag{8}$$

Матрицы жесткости, масс и внешних нагрузок получим традиционным способом с учетом того, что модель строится в пространстве преобразований Фурье, в частности вектор внешних сил определяется как прямое преобразование Фурье вектора действительных сил:

$$K(i\omega) = \int_V (AN_{xyz})^T C(AN_{xyz}) dV, \qquad M = \int_V N_{xyz}^T \rho N_{xyz} dV,$$

$$\Phi(i\omega) = \int_{S_1} N_{xyz}^T F \, dS.$$

Расчетное уравнение в пространстве преобразований Фурье имеет вид [4]

$$(K(i\omega) + (i\omega)^2 M)q = \Phi(i\omega) \qquad \text{или} \qquad Z(i\omega)q = \Phi(i\omega), \tag{9}$$

где q – изображение Фурье обобщенных перемещений; $\Phi(i\omega)$ – изображение Фурье внешних сил; M – матрица масс; $K(i\omega)$ – комплексная матрица жесткости; $Z(i\omega)$ – матрица динамической жесткости слоя пластины.

Для слоя пластины с шарнирно закрепленными краями функции аппроксимации перемещений в координатах x, y представим в виде

$$N_{xyu} = \cos\alpha x \sin\beta y; \qquad N_{xyv} = \sin\alpha x \cos\beta y; \qquad N_{xyw} = \sin\alpha x \sin\beta y$$

$$\left(\alpha = \frac{m\pi}{l}; \quad \beta = \frac{n\pi}{b}; \quad m, n = 1, 2, \ldots\right).$$

Для многослойной пластины матрицу динамической жесткости можно получить синтезом отдельных матриц $Z_k(i\omega)$ с учетом условий соединения слоев. Если разделить вектор перемещений k-го слоя на блоки в соответствии с индексами i, m

$$q_k = [q_{ki} \quad q_{km}]^T, \tag{10}$$

то условия соединения слоев можно записать как условия равенства перемещений на поверхностях контакта слоев:

$$q_{k,m} = q_{k+1,i} \qquad (k = 1 \ldots r). \tag{11}$$

В результате получим матрицу динамической жесткости для пластины в целом, при этом получаемое расчетное уравнение по форме аналогично уравнению (9) для одного слоя.

Для анализа рассеяния энергии необходимо рассмотреть нелинейную задачу на собственные значения:

$$Z(i\omega)q = 0. \tag{12}$$

Собственные числа и векторы матрицы $Z(i\omega)$ можно определить по методике, описанной в [4]. Декремент колебаний, соответствующий выбранной форме, определяется как отношение потерянной энергии к удвоенной потенциальной:

$$\Delta = \frac{\Delta W}{2W} = \pi \frac{q^{\text{н}} Z''(\omega) q}{q^{\text{н}} Z'(\omega) q}, \tag{13}$$

где q – собственные векторы матрицы $Z(i\omega)$; $Z'(\omega)$, $Z''(\omega)$ – действительная и мнимая части матрицы $Z(i\omega)$; н – эрмитово транспонирование.

Декремент колебаний может быть определен также по известным собственным значениям (комплексные частоты) матрицы $Z(i\omega)$:

$$\Delta_k = \pi \operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\omega'} \approx 2\pi \frac{\omega''}{\omega'}, \tag{14}$$

где ω_k – комплексная частота колебаний, соответствующая k-й форме, $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$.

Оптимизация по критерию максимального демпфирования. Основные преимущества конструкций из композиционных материалов состоят в возможности более полного удовлетворения эксплуатационным требованиям за счет изменения углов и коэффициентов армирования, геометрических и физических характеристик, структуры пакета слоев для многослойных конструкций. Во многих случаях эти требования противоречат друг другу, что вынуждает использовать методы оптимального проектирования.

О возможности выбора параметров, которые могут обеспечить максимальные величины рассеяния энергии в конструкциях из композиционных материалов, свидетельствуют зависимости декремента колебаний от параметров структуры и вида напряженного состояния, что, в свою очередь, указывает на необходимость оптимизировать не материал, а конструкцию. Графики для шарнирно закрепленной пластины с ортотропной структурой показывают, что декременты зависят также от номера формы колебаний (рис. 3). Это накладывает на поиск оптимальных параметров еще одно условие: оптимальной конструкция может быть для данной формы колебаний.

Приведем примеры оптимизации по критерию максимального демпфирования. Рассматривалась пластина из трех ортотропных слоев с комплексными модулями материалов (рис. 4). Задача оптимизации формулировалась в следующем виде.

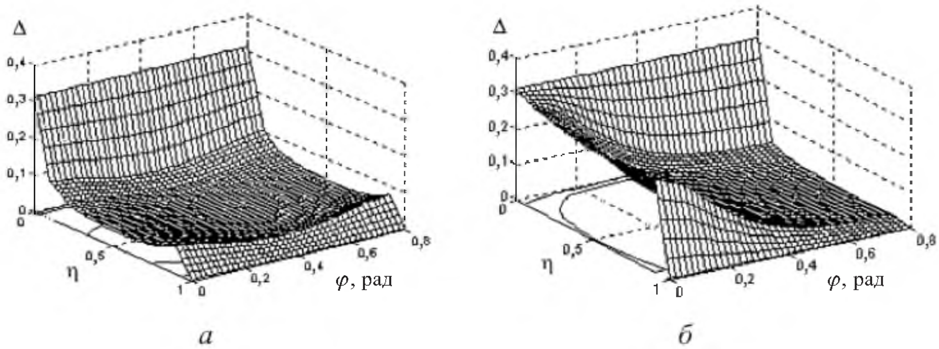

Рис. 3. Зависимость декремента колебаний шарнирно закрепленной пластины от угла φ и коэффициента армирования η для разных форм колебаний (m и n – количество полуволн по координатам x и y): *а* – $n = 1$, $m = 1$; *б* – $n = 1$, $m = 3$.

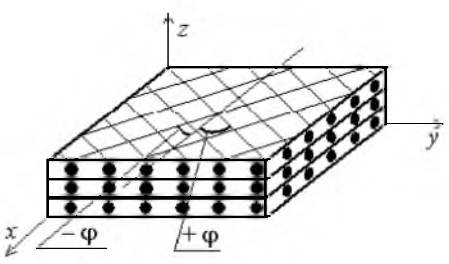

Рис. 4. Трехслойная пластина из слоев, армированных волокнами.

Найти вектор параметров $x = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, h_1, h_2, h_3)$, где φ_i – углы армирования; h_i – толщины слоев, обеспечивающие максимальное значение критерия оптимизации – декремента колебаний $\Delta(x) \to \Delta_{\max}(x_{opt})$, при ограничениях, накладываемых на параметры проектирования, $x_{\min} \le x \le x_{\max}$.

Постоянные параметры для пластины принимались следующие: габаритные размеры – $L_1 = 2$ м, $L_2 = 2$ м, $h = 0{,}03$ м, средняя плотность материала – $\rho = 2{,}85 \cdot 10^3$ кг/м^3; комплексные модули (объемный модуль и модуль сдвига) материала армирующих волокон и основы – $K_1 = 4 \cdot 10^{11}(1 + 0{,}001i)$ Па, $G_1 = 0{,}4K_1$ Па; $K_2 = 4 \cdot 10^9 (1 + 0{,}1i)$ Па, $G_2 = 0{,}4K_1$ Па; коэффициенты армирования слоев: $\eta = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]$.

Средние характеристики ортотропного материала для каждого слоя рассчитывались по заданным комплексным модулям исходных материалов, значениям угла и коэффициента армирования в соответствии с методикой, изложенной в [1]. Задача оптимизации с указанным вектором проектных параметров является многоэкстремальной. В работе [5] для поиска максимума целевой функции предлагалось рассмотреть последовательность одноэкстремальных задач, последовательно изменяя каждый проектный параметр при фиксированных остальных. Такой метод связан со значительным увеличением объема вычислений и, вообще говоря, не обеспечивает определение глобального экстремума.

В данном случае применялся поисковый метод, использующий вариант генетического алгоритма, адаптированного к рассматриваемой задаче. Результаты оптимизации трехслойной пластины для трех вариантов векторов коэффициентов армирования приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Начальные x_0, Δ_0 и оптимальные x_{opt}, Δ_{opt} значения параметров проектирования и целевой функции при коэффициенте армирования $\eta = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]$

x_0, Δ_0	x_{opt}, Δ_{opt}
$\left[\frac{\pi}{2{,}5} \quad \frac{\pi}{2{,}5} \quad \frac{\pi}{2{,}5} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0566$	$[0 \quad 0{,}7855 \quad 1{,}5708 \quad 0{,}0106 \quad 0{,}0078 \quad 0{,}0106]$ $\Delta_{opt} = 0{,}1927$
$\left[\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0196$	$[0 \quad 0{,}7854 \quad 1{,}5708 \quad 0{,}0106 \quad 0{,}0078 \quad 0{,}0106]$ $\Delta_{opt} = 0{,}1927$
$\left[\frac{\pi}{16} \quad \frac{\pi}{16} \quad \frac{\pi}{16} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0370$	$[0{,}5708 \quad 0{,}7855 \quad 0 \quad 0{,}0106 \quad 0{,}0078 \quad 0{,}0106]$ $\Delta_{opt} = 0{,}1927$

Ограничения во всех случаях принимались следующие:

$$x_{\min} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}001 \quad 0{,}001 \quad 0{,}001]; \quad x_{\max} = \left[\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad 0{,}02 \quad 0{,}02 \quad 0{,}02\right].$$

Расчеты показывают, что во всем диапазоне начальных значений углов армирования вектор оптимальных параметров оказался одинаковым, что

Т а б л и ц а 2

Начальные x_0, Δ_0 и оптимальные x_{opt}, Δ_{opt} значения параметров проектирования и целевой функции при коэффициенте армирования $\eta = [0{,}1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}1]$

x_0, Δ_0	x_{opt}, Δ_{opt}
$\left[\frac{\pi}{2{,}5} \quad \frac{\pi}{2{,}5} \quad \frac{\pi}{2{,}5} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0759$	$[0 \quad 0{,}7851 \quad 1{,}5707 \quad 0{,}0142 \quad 0{,}0025 \quad 0{,}0142]$ $\Delta_{opt} = 0{,}2199$
$\left[\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0196$	$[0 \quad 0{,}7854 \quad 1{,}5706 \quad 0{,}0142 \quad 0{,}0025 \quad 0{,}0142]$ $\Delta_{opt} = 0{,}2199$
$\left[\frac{\pi}{16} \quad \frac{\pi}{16} \quad \frac{\pi}{16} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0370$	$[0{,}5707 \quad 0{,}7856 \quad 0 \quad 0{,}0142 \quad 0{,}0025 \quad 0{,}0142]$ $\Delta_{opt} = 0{,}2199$

Т а б л и ц а 3

Начальные x_0, Δ_0 и оптимальные x_{opt}, Δ_{opt} значения параметров проектирования и целевой функции при коэффициенте армирования $\eta = [0{,}9 \quad 0{,}1 \quad 0{,}9]$

x_0, Δ_0	x_{opt}, Δ_{opt}
$\left[\frac{\pi}{2{,}5} \quad \frac{\pi}{2{,}5} \quad \frac{\pi}{2{,}5} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0772$	$[0 \quad 0{,}7853 \quad 1{,}5707 \quad 0{,}0075 \quad 0{,}0140 \quad 0{,}0075]$ $\Delta_{opt} = 0{,}2436$
$\left[\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0336$	$[1{,}5708 \quad 0{,}7853 \quad 0 \quad 0{,}0075 \quad 0{,}0140 \quad 0{,}0075]$ $\Delta_{opt} = 0{,}2436$
$\left[\frac{\pi}{16} \quad \frac{\pi}{16} \quad \frac{\pi}{16} \quad 0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01\right]$ $\Delta_0 = 0{,}0673$	$[1{,}5707 \quad 0{,}7854 \quad 0 \quad 0{,}0075 \quad 0{,}0140 \quad 0{,}0075]$ $\Delta_{opt} = 0{,}2436$

свидетельствует об определении глобального экстремума для каждого из векторов коэффициентов армирования.

В композитных конструкциях, в частности в многослойных пластинах, при колебаниях по одной из изгибных форм возбуждаются колебания, обусловленные взаимным перемещением слоев. Декременты колебаний, соответствующие этим формам, могут быть меньше декремента колебаний основной изгибной формы, в связи с чем необходимо максимизировать минимальный декремент колебаний возникающих форм. Задача максимизации минимального значения нескольких функций в заданном диапазоне изменения аргументов известна как задача минимакса (максимина). Минимаксные алгоритмы решают, по сути, многокритериальную задачу оптимизации.

На рис. 5 приведены результаты использования минимаксного алгоритма для определения оптимальных параметров (угла и коэффициента армирования) пластины, армированной волокнами, при заданной толщине ($h = 0{,}03$ м). Параметры материалов приведены выше. Максимизировалось значение наименьшего декремента колебаний из первых пяти форм. Программа оптимизации позволяет получить одинаковые результаты для угла и коэффициента армирования в широком диапазоне начальных значений вектора проектных параметров. Заметим, что в связи с большим декрементом материала основы результаты относительно влияния коэффициента армирования очевидны: максимальные значения декремента соответствовали минимальным коэффициентам армирования. Это свидетельствует о возможности фиксации коэффициента армирования при постановке задач оптимизации (рис. 5).

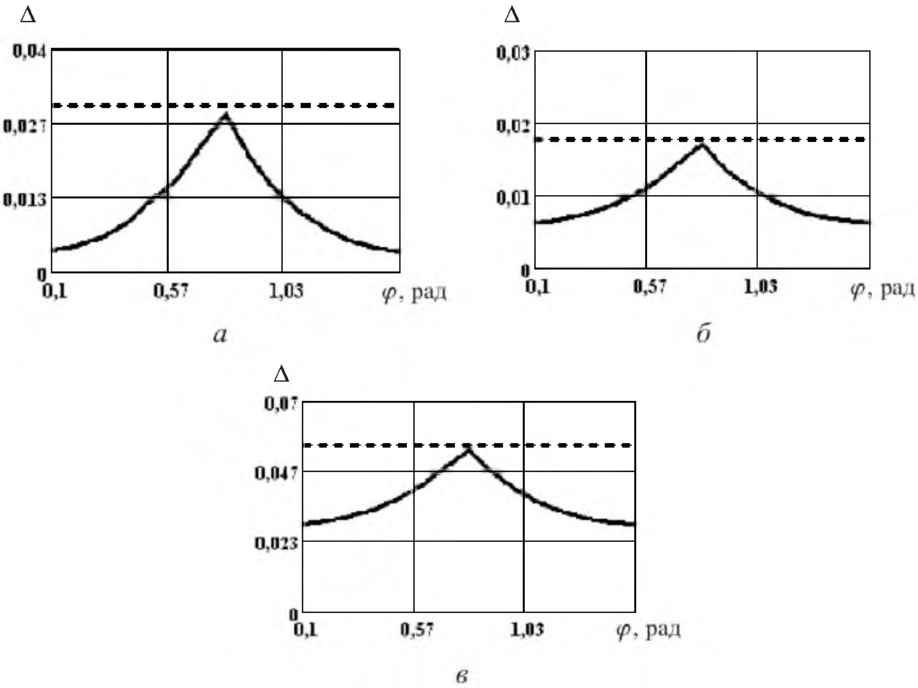

Рис. 5. Значения минимального декремента колебаний пластины при заданных (сплошные линии) и оптимальных (штриховые линии) параметрах при фиксированном коэффициенте армирования: *а* – $\eta = 0{,}9$, $\Delta_{\min} = 0{,}0298$, $\varphi_{opt} = 0{,}7854$; *б* – $\eta = 0{,}5$, $\Delta_{\min} = 0{,}0177$, $\varphi_{opt} = 0{,}7854$; *в* – $\eta = 0{,}1$, $\Delta_{\min} = 0{,}0552$, $\varphi_{opt} = 0{,}7854$.

Заключение. Предложенная методика оптимизации композитных конструкций с учетом рассеяния энергии в материале как равноправного параметра проектирования построена на математическом моделировании колебаний композитных конструкций в пространстве преобразований Фурье и может быть использована при проектировании конструкций, работающих при динамических нагрузках, в частности тонкостенных конструкций из композиционных вязкоупругих материалов.

Р е з ю м е

Розглядається застосування методів теорії нелінійного програмування для створення оптимальних проектів багатошарових пластин із максимальним демпфіруванням.

1. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 368 с.
2. *Дубенец В. Г.* Моделирование несовершенно-упругих свойств композитных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № 12. – С. 81 – 86.
3. *Дубенец В. Г.*, *Хильчевский В. В.* Колебания демпфированных композитных конструкций. – Киев: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 210 с.
4. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: ООО "Видавництво Аспект-Поліграф", 2006. – 232 с.
5. *Баничук Н. В.*, *Кобелев В. В.*, *Рикардс Р. Б.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 222 с.

Поступила 11. 07. 2007